

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCC.
1903

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XII.

1° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1903

1777

REPUBLICAN PARTY

1877

1877

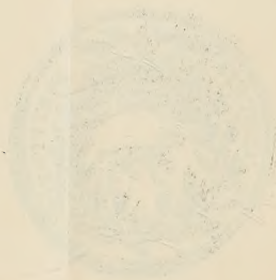
REPUBLICAN PARTY

REPUBLICAN PARTY

REPUBLICAN PARTY

REPUBLICAN PARTY

REPUBLICAN PARTY



REPUBLICAN PARTY

REPUBLICAN PARTY

REPUBLICAN PARTY

1877

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 gennaio 1903.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche.* Nota II di ONORATO NICCOLETTI, presentata dal Socio U. DINI.

5. Facendo seguito alla mia Nota precedente ⁽¹⁾, rimane ancora a dimostrare che la trascendente intera $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ può determinarsi in guisa che dalla equazione

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

si possa trarre una delle variabili, ad es. x_i , in funzione analitica e trascendente delle altre $n - 1$, cioè che dall'equazione stessa si può dedurre una serie di potenze

$$x_i - \xi_i = P.(x_1 - \xi_1, \dots, x_{i-1} - \xi_{i-1}, x_{i+1} - \xi_{i+1}, \dots, x_n - \xi_n)$$

che soddisfi all'equazione stessa, ma non insieme ad una qualsiasi equazione algebrica.

Indichiamo perciò con α un numero intero, positivo, affatto arbitrario, e consideriamo la funzione $F^{(\alpha)}(x_1 \dots x_n)$, già definita colla formola (17):

$$(23) \quad F^{(\alpha)}(x_1 x_2 \dots x_n; u_0, u_1 \dots u_\alpha) = u_0 \omega_0(x_1 x_2 \dots x_n) + \\ + u_1 \omega_1(x_1 x_2 \dots x_n) + \dots + u_\alpha \omega_\alpha(x_1 x_2 \dots x_n),$$

⁽¹⁾ Cfr. Rendiconti Lincei, seduta del 7 Dicembre 1902. Per maggior chiarezza, oltre conservare tutte le notazioni di questa Nota, la numerazione dei §§ e delle formole fa seguito a quella della Nota stessa.

dove per le (7) è:

$$\omega_0(x_1 x_2 \dots x_n) = \theta_0(x_1 x_2 \dots x_n);$$

$$\omega_t(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1^{u_1^{(t)}} x_2^{u_2^{(t)}} \dots x_n^{u_n^{(t)}} \cdot \theta_t(x_1 \dots x_n) \psi_t(x_1 x_2 \dots x_n)^{\xi_t} \quad (t=1, 2, \dots, \alpha).$$

Pensando questa funzione $F^{(\alpha)}$ come funzione delle variabili indipendenti $x_1 \dots x_n, u_0, u_1 \dots u_\alpha$, si può sempre fare in modo che essa sia irriducibile in tutte queste variabili (nel campo assoluto di razionalità); essendo infatti essa lineare omogenea in $u_0, u_1, \dots, u_\alpha$, qualunque suo divisore non può dipendere che dalle $x_1 x_2 \dots x_n$, e dovrebbe quindi essere un divisore comune dei polinomi $\omega_0 = \theta_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\alpha$; se dunque questi polinomi non hanno fattori comuni, la $F^{(\alpha)}$, pensata come funzione delle x e delle u , è irriducibile. Ora si può sempre, ed in infiniti modi, fare che i polinomi $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_\alpha$ non abbiano fattori comuni; basta perciò ad es: supporre che: a) i polinomi $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_\alpha$ non abbiano fattori comuni e insieme: b) il polinomio θ_0 non abbia fattori (irriducibili) di altezza minore od uguale ad α ; in questa ipotesi infatti, come subito si riconosce, i polinomi $\omega_0, \omega_1 \dots \omega_\alpha$ non hanno fattori comuni.

La (23) è adunque irriducibile; lo sarà allora anche il numeratore della funzione razionale fratta che si ha da essa, ponendovi

$$(24) \quad x_i = \frac{1}{\xi_i} \quad (i=1, \dots, n); \quad u_t = \frac{1}{v_t} \quad ; \quad (t=0, \dots, \alpha)$$

si ha in tal guisa (indicando con r_s il grado della $F^{(\alpha)}$ nella x_s):

$$(25) \quad F^{(\alpha)} \left(\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \dots, \frac{1}{\xi_n}; \frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{s=1}^n \xi_s^{r_s} \cdot v_0 \dots v_\alpha} G^{(\alpha)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; v_0, v_1, \dots, v_\alpha)$$

e sarà

$$(25') \quad G^{(\alpha)}(\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_n; v_0, v_1, \dots, v_\alpha)$$

irriducibile nei suoi argomenti. Per un noto teorema di Hilbert ⁽¹⁾ potremo allora dare alle variabili $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1}$ tali valori intieri, non minori di α in valore assoluto, $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} \dots \lambda_{n-1}^{(1)}$, in guisa che la funzione di ξ_n e delle $v_0, v_1, \dots, v_\alpha$

$$(26) \quad G^{(\alpha)}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{n-1}^{(1)}, \xi_n; v_0, v_1, \dots, v_\alpha)$$

(1) Cfr. Hilbert, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen* (Giornale di Crelle, vol. 110, pag. 122).

sia ancora irriducibile ed abbia in ξ_n lo stesso grado della (25') ⁽¹⁾. Determinate così in un modo qualunque, conforme alle ipotesi precedenti, le $\lambda_i^{(1)}$ ($i = 1, 2 \dots n-1$), potremo poi nella (26) assegnare alle $v_0, v_1 \dots v_\alpha$ valori razionali interi $c_0, c_1 \dots c_\alpha$, che soddisfaccia (a causa delle (13)) alle condizioni

$$|c_p| > \frac{1}{\varepsilon_p} \quad (p = 0, 1, \dots, \alpha),$$

in guisa che anche la funzione *della sola* ξ_n :

$$(27) \quad G^{(\alpha)}(\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{n-1}^{(1)}, \xi_n; c_0, c_1 \dots c_\alpha)$$

sia irriducibile ed abbia ancora in ξ_n il grado della (25'). Saranno allora irriducibili, nel campo assoluto di razionalità, anche le due funzioni:

$$(26^*) \quad F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(1)}}, \frac{1}{\lambda_2^{(1)}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(1)}}, x_n; u_0, u_1 \dots u_\alpha\right)$$

$$(27^*) \quad F^{(\alpha)}\left(\frac{1}{\lambda_1^{(1)}}, \frac{1}{\lambda_2^{(1)}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(1)}}; x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \dots \frac{1}{c_\alpha}\right)$$

ed avranno inoltre nella x_n il medesimo grado della (23); infatti ove questo non fosse, una almeno delle (26), (27) avrebbe come fattore una potenza, con esponente non nullo, di ξ_n , e sarebbe quindi riducibile.

6. Ne segue che anche la funzione:

$$(28) \quad F^{(\alpha)}\left(x_1 x_2 \dots x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1}, \dots, \frac{1}{c_\alpha}\right)$$

è irriducibile nel campo assoluto di razionalità. Se infatti così non fosse, essa dovrebbe spezzarsi in due fattori $\varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n)$, $\varphi_2(x_1 \dots x_n)$; si avrebbe cioè:

$$F^{(\alpha)}\left(x_1 x_2 \dots x_n, \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \dots \frac{1}{c_\alpha}\right) = \varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n) \cdot \varphi_2(x_1 \dots x_n);$$

ma, poichè per $x_i = \frac{1}{\lambda_i^{(1)}} (i = 1, 2 \dots n-1)$ la (28) si riduce alla (27*)

⁽¹⁾ Questo è sempre possibile, prendendo le $\lambda_1^{(1)} \dots \lambda_{n-1}^{(1)}$ in guisa che, oltre la (26), anche la funzione

$$\xi_n^{r_n} G^{(\alpha)}\left(\lambda_1^{(1)} \dots \lambda_{n-1}^{(1)}, \frac{1}{\xi_n}; v_0 \dots v_\alpha\right)$$

(dove r_n è il grado della (25) in ξ_n) rimanga irriducibile (cf. Hilbert, l. c.; pag. 117).

che è irriducibile, quando si faccia questa posizione, uno dei due fattori φ_1, φ_2 deve ridursi all'unità, l'altro alla (27*). Sia ad es. $\varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n)$ quello dei due fattori della (28), che per $x_i = \frac{1}{\lambda_i^{(1)}} (i = 1, \dots, n-1)$ si riduce alla (27*); esso avrà allora in x_n il grado della (27*) e quindi anche della (28); l'altro fattore φ_2 deve quindi avere nella x_n il grado zero, *deve essere cioè una funzione delle sole $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$* . Ma si può sempre evitare che la (28) ammetta un tale divisore: supponiamo infatti nella (23) che il polinomio θ_0 abbia qualche termine funzione della sola x_n ; qualunque sistema di valori si dia allora alle $u_0, u_1 \dots u_\alpha$ (purchè $u_0 \neq 0$) per la proprietà b) dei polinomi ω_r (cf. n. 2) un tal termine non verrà a mancare nella (28); questa dunque non può ammettere un divisore funzione delle sole $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$.

Consideriamo ancora un momento la (28), che abbiamo dimostrato essere irriducibile. Se c è il minimo multiplo comune dei numeri $c_0, c_1 \dots c_\alpha$, essa, moltiplicata per c , diventa una funzione razionale intera irriducibile delle $x_1 x_2 \dots x_n$, a coefficienti interi e privi di fattori comuni; la sua altezza inoltre sarà evidentemente non minore della somma dei rapporti $\left| \frac{c_0}{c_0} \right|, \left| \frac{c}{c_1} \right|, \dots, \left| \frac{c}{c_\alpha} \right|$, (in particolare quindi *maggiore di α*).

Chiamiamo ora con $\alpha_1 - 1$ la minima delle $\lambda_i^{(1)}$, e supponiamo che i numeri interi $c_0, c_1 \dots c_\alpha$ sian stati presi in guisa che la somma ora detta:

$$c \left\{ \frac{1}{|c_0|} + \frac{1}{|c_1|} + \dots + \frac{1}{|c_\alpha|} \right\}$$

sia anche maggiore di α_1 (questo è sempre possibile, ad es. prendendo prima in un modo qualunque $c_0, c_1, \dots, c_{\alpha-1}$, e quindi c_α maggiore in valore assoluto di $\alpha_1 \cdot c_{\alpha-1}$); la (28) avrà allora un'altezza maggiore di α_1 .

7. Poniamo ora nella (14):

$$(29) \quad u_0 = \frac{1}{c_0}; u_1 = \frac{1}{c_1}, \dots; u_\alpha = \frac{1}{c_\alpha}; u_{\alpha+1} = u_{\alpha+2} = \dots = u_{\alpha_1-1} = 0;$$

e consideriamo la:

$$(30) \quad F^{(\alpha_1)}(x_1, \dots, x_n; u_{\alpha_1}) = F^{(\alpha)}\left(x_1 x_2 \dots x_n; \frac{1}{c_0}, \frac{1}{c_1} \dots \frac{1}{c_\alpha}\right) + u_{\alpha_1} \omega_{\alpha_1}(x_1 x_2 \dots x_n).$$

Si può sempre fare in modo che la (30) come funzione delle variabili $x_1, x_2 \dots x_n, u_{\alpha_1}$ sia irriducibile; basta perciò che non ammetta un divisore

funzione delle sole $x_1 \dots x_n$; questo sarà certamente, quando si supponga che il polinomio θ_{α_1} non abbia fattori irriducibili di altezza maggiore di α_1 ; in questo caso infatti qualunque divisore irriducibile del polinomio ω_{α_1} ha un'altezza non maggiore di α_1 , e non può quindi coincidere colla (28) che è irriducibile ed ha un'altezza maggiore di α_1 .

Potremo allora, come per la $F^{(\alpha)}$, determinare dei numeri razionali interi $\lambda_i^{(2)}$ ($i = 1, 2 \dots n-1$), maggiori in valore assoluto di α_1 , e poi un numero intero c_{α_1} , maggiore in valore assoluto di $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha_1}}$ e di tutte le $\lambda_i^{(2)}$, tali che ciascuna delle tre funzioni:

$$(31) \quad F^{(\alpha_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1^{(2)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(2)}}, x_n; u_{\alpha_1} \right)$$

$$(32) \quad F^{(\alpha_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1^{(2)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(2)}}, x_n; \frac{1}{c_{\alpha_1}} \right)$$

$$(33) \quad F^{(\alpha_1)} \left(x_1, x_2 \dots x_n; \frac{1}{c_{\alpha_1}} \right)$$

sia irriducibile nelle sue variabili; ed inoltre, detta $\alpha_2 - 1$ la minima delle $\lambda_i^{(2)}$, la (33) abbia un'altezza maggiore di α_2 .

È chiaro ora come si possa procedere oltre. Adunque:

a) se da un certo valore α in poi ogni polinomio θ_r ha fattori irriducibili di altezza non maggiore di r ;

b) se i polinomi $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_\alpha$ non hanno fattori comuni;

c) se qualsiasi fattore irriducibile del polinomio θ_0 ha un'altezza maggiore di α ;

d) se in θ_0 v'è qualche termine funzione della sola variabile x_n ; potremo, procedendo come sopra, costruire una successione divergente di numeri interi e positivi:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_h \dots$$

e corrispondentemente n successioni congruenti, ancora divergenti e di numeri interi:

$$\lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)} \dots \lambda_i^{(h)} \dots \quad (i = 1, 2 \dots n-1)$$

$$c_0, c_1, c_2, \dots c_\alpha, c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2} \dots c_{\alpha_h} \dots$$

tali, che ciascuna delle funzioni:

$$(34) \quad F^{(\alpha_i)} \left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}}, \frac{1}{\lambda_2^{(i+1)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}; x_n, \frac{1}{c_{\alpha_i}} \right)$$

$$(35) \quad F^{(\alpha_i)} \left(x_1, x_2 \dots x_n; \frac{1}{c_{\alpha_i}} \right)$$

sia irriducibile (in x_n , in $x_1 x_2 \dots x_n$ rispettivamente) nel campo assoluto di razionalità ed inoltre la (35) abbia un'altezza maggiore di α_{i+1} .

Osserviamo anche che la (34) e (35) hanno in x_n un grado non minore di $\mu_{\alpha_i}^{(n)}$; questi gradi formano dunque anche essi una successione divergente.

8. Ciò premesso, consideriamo la funzione:

$$(36) \quad \overline{F}(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{c_0} \omega_0(x_1 \dots x_n) + \\ + \frac{1}{c_1} \omega_1(x_1 \dots x_n) + \dots + \frac{1}{c_\alpha} \omega_\alpha(x_1 x_2 \dots x_n) + \frac{1}{c_{\alpha_1}} \omega_{\alpha_1}(x_1 x_2 \dots x_n) + \dots;$$

e supponiamo che: per $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ il polinomio $\omega_0 = \theta_0$ si annulli e ciascuna delle derivate $\frac{\partial \theta_0}{\partial x_i}$ sia inoltre in questo punto diversa da zero; questo è evidentemente possibile in infiniti modi, restando insieme anche soddisfatte le condizioni b), c), d) del n. 7. Allora dalla equazione:

$$(36^*) \quad \overline{F}(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

possiamo dedurre un elemento analitico, una serie di potenze:

$$(37) \quad x_n = P(x_1 x_2 \dots x_{n-1}) \quad (P(0, \dots, 0) = 0)$$

che soddisfa all'equazione stessa ed è assolutamente ed uniformemente convergente in un certo campo $C(x_1 x_2 \dots x_{n-1})$ attorno al punto $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

Nelle ipotesi superiori l'elemento analitico (37) è trascendente.

Si ammetta infatti che non lo sia; e soddisfaccia alla equazione algebrica irriducibile:

$$(38) \quad g(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) = 0$$

di grado m ; ponendo nella (38) per $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$ valori razionali affatto arbitrari, otterremo sempre un'equazione in x_n irriducibile o meno, di grado minore od uguale ad m .

Sia ora:

$$\overline{F}^{(\alpha_i)} \left(x_1 x_2 \dots x_n, \frac{1}{c_{\alpha_i}} \right)$$

una delle funzioni (35), il cui grado nella x_n superi m e tale inoltre che il punto $x_r = \frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}}$, ($r = 1, 2 \dots n-1$) cada nel campo di convergenza della serie (37).

Poniamo allora nella (36*), (37), (38):

$$x_r = \frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}} \quad (r = 1, 2 \dots n-1);$$

dalla (37) si avrà, detto $\frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}}$ il valore di x_n (algebrico, come sappiamo):

$$(39) \quad \frac{1}{\lambda_n^{(i+1)}} = P \left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}} \right);$$

la (38) diventerà una equazione:

$$(40) \quad g \left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}} \dots \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}, x_n \right) = 0$$

a coefficienti razionali di grado non superiore ad m ; quanto alla (36*) si osservi che tra le $\lambda_r^{(i+1)}$ ($r = 1, 2 \dots n-1$) ve ne è una che in valore assoluto è uguale ad $\alpha_{i+1} - 1$; se questa è la $\lambda_r^{(i+1)}$, il numero $\frac{1}{\lambda_r^{(i+1)}}$ è un numero algebrico di altezza α_{i+1} e perciò per questa sostituzione si annullano tutti i polinomi ω_i per cui è $t \geq \alpha_{i+1}$; la (36*) si riduce perciò alla equazione *irriducibile* e di grado *maggiore di m* :

$$(41) \quad \overline{F}^{(\alpha_i)} \left(\frac{1}{\lambda_1^{(i+1)}}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n-1}^{(i+1)}}, x_n; \frac{1}{c_{\alpha_i}} \right) = 0.$$

Questa equazione e la (40) che è di grado inferiore, dovrebbero avere una radice comune, la (39), il che è assurdo. Non può dunque aversi un'equazione come la (38) cui la serie (37) soddisfaccia; essa serie rappresenta perciò una funzione trascendente delle $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$, come avevamo affermato.

9. Riassumendo, possiamo enunciare il teorema:

Esistono delle trascendenti intere in n variabili complesse $x_1 x_2 \dots x_n$, che, uguagliate allo zero, definiscono (in un campo conveniente) una *qualunque* di esse variabili in funzione analitica e *trascendente* delle altre, in guisa che su qualsiasi varietà *algebrica* dell' S_n complesso ($x_1 x_2 \dots x_n$) e ciascuna di esse funzioni e qualunque loro derivata si riducono a funzioni *algebriche* di alcune delle $x_1 x_2 \dots x_n$.

Una tale proprietà *non* è adunque caratteristica delle funzioni algebriche.

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico generato da una carica elettrica in moto circolare uniforme.* Nota di G. PICCIATI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite a Corleto nell'estate del 1898.* Nota di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio BLASERNA.

Chimica. — *L'impiego di alcune anidridi e cloroanidridi in alcalimetria.* Nota del prof. BERNARDO ODDO, presentata dal Socio PATERNÒ.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'ossidazione del dimetilpirrolo asimmetrico* ⁽¹⁾. Nota di G. PLANCHER e F. CATTADORI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Da lungo tempo è noto che per distillazione a secco dell'ematina si ottengono dei vapori che danno, col fuscello di abete, la reazione dei pirroli; più recentemente Nencki e Sieber ⁽²⁾ hanno confermato questa osservazione di Hoppe Seyler fondendo l'ematina con potassa caustica.

D'altra parte E. Schunck e Marchlewski ⁽³⁾ osservarono gli stessi fenomeni colla fillotaonina, sostanza madre della filloporfirina e derivato della clorofilla.

Questi fatti stavano a dimostrare che, tanto le sostanze coloranti del sangue, come quelle delle foglie verdi sono derivati del pirrolo; restava tuttavia il sospetto che il nucleo pirrolico non fosse preesistente in queste sostanze, ma il pirrolo si formasse in via secondaria.

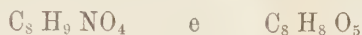
Restava poi indeterminato se i vapori che davano la reazione del fuscello fossero del pirrolo vero e proprio, oppure di un suo omologo identico o diverso nelle due serie di sostanze coloranti.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

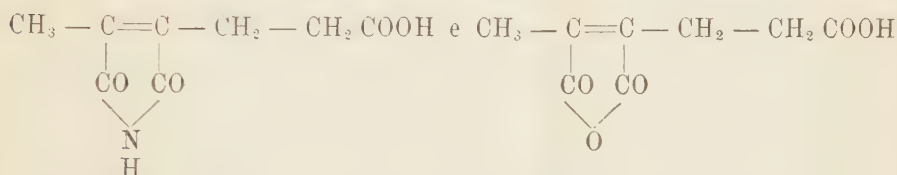
(2) Berichte XVII, 2275.

(3) Liebigs Ann. 288, 218.

Questo quesito si avviò alla soluzione quando W. Küster (1) ossidando la ematina, con acido cromico, ottenne gli acidi da lui detti ematinici, l'uno azotato e l'altro no, aventi le formole rispettive



e potè per essi proporre le due formole costituzionali di natura maleica



Suppose egli, per ciò, che esistesse preformato nell'ematina un analogo complesso pirrolico da quale prendessero origine gli acidi ematinici, come la bibromomaleinimide si forma dal pirrolo a mezzo dell'ipobromito sodico (2).

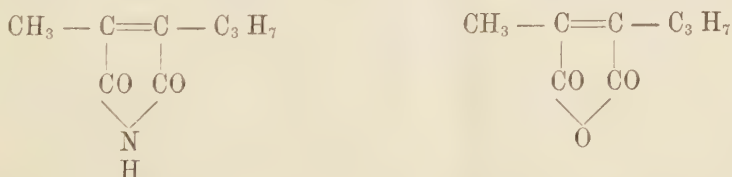
Le ricerche di Nencki e Zaleski diedero a questo riguardo dei risultati ancor più precisi (3). Questi autori dimostrarono che riducendo l'ematina, l'ematoporfirina e la mesoporfirina con acido jodidrico e joduro di fosfonio si ottiene un corpo della composizione.



che per le sue proprietà ritennero fosse un omologo del pirrolo, vale a dire, o il β, β' -metilpropilpirrolo o il β -butilpirrolo e chiamarono *emopirrolo*.

Se la relazione tra la filloporfirina e la ematoporfirina era così stretta quale l'avevano supposta Schunck e Marchlewski, vale a dire che i due corpi fossero diversi stadi di ossidazione di una stessa sostanza fondamentale (4), anche le sostanze coloranti clorofilliane avrebbero dovuto dare pirrolo per riduzione collo stesso metodo; e Nencki e Marchlewski ottennero di fatto l'emopirrolo (5) dalla fillocianina.

Più recentemente W. Küster (6) sottoponendo all'ossidazione l'emopirrolo ottenne un'imide maleica sostituita e l'anidride relativa corrispondenti probabilmente alle formole:



e confermò coll'ossidazione le formole dei suoi acidi ematinici.

(1) Berichte XXXIII, 3021; Liebigs Ann. 315, 175.

(2) Ciamician e Silber, Berichte XVII, 1745, e XX, 2595.

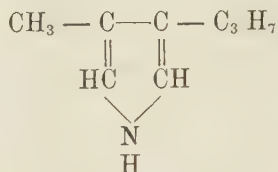
(3) Berichte XXXIV, 997.

(4) Liebigs Ann. 290, 308.

(5) Berichte XXXIV, 1687.

(6) Berichte XXXV, 2953.

Questi fatti complessivamente presi, comprovano che l'emopirrolo è un β -metil- β' -propilpirrolo:



e che l'ematina e le sostanze coloranti clorofilliche, e più precisamente le porfirine dal sangue e dalla clorofilla, non sono che emopirrolo condensato e ossidato.

Poteva però ancora restare qualche dubbio sulla costituzione dell'emopirrolo, giacchè nessuno dei prodotti maleinici ottenuti da Küster, s'era potuto rigorosamente identificare con sostanze già note e di costituzione ben accertata, e perchè nessuno dei pirroli, salvo quelli alogenati, si era potuto trasformare in prodotti maleici per mezzo della ossidazione.

L'ossidazione graduale dei pirroli fu invano tentata altre volte, si ebbe invece sempre la demolizione dello scheletro pirrolico.

Supponemmo adunque, che la stabilità dei derivati maleici di Küster dipendesse dal fatto che questi sono derivati maleici bisostituiti (l'acido pirocinconico o dimetilmaleico è stabile anche al permanganato), e per fornire alla ossidazione di Küster l'appoggio di un caso analogo riflettente un pirrolo già ben noto come tale, abbiamo tentato l'ossidazione dell' α - β' dimetilpirrolo. Abbiamo scelto questo pirrolo perchè esso, indubbiamente, è quello che resiste meglio agli acidi e perchè avendo esso un sostituyente nella posizione β , i prodotti maleici che ne derivano dovevano essere dotati di una certa stabilità.

Come ossidante abbiamo scelto l'acido cromatico sotto forma della cosiddetta miscela di Beckmann, vale a dire in soluzione solforica, la quale è particolarmente indicata ed ha servito bene in molti casi in cui si volle avere una ossidazione limitata.

L'esperienza ha avuto buon esito e dal suddetto pirrolo ottenemmo come principale prodotto la *citraconimide* o *metilmaleinimide*.



Questo risultato toglie anche l'ultimo dubbio sulla costituzione dell'emopirrolo e degli acidi ematinici e sulle conseguenze relative alla costituzione dell'ematina e della clorofilla che si erano tratte dalla formazione di questi corpi.

Nella miscela di Beckmann, fatta con 60 gr. di bicromato potassico, 50 di acido solforico e 300 ccm. di acqua scaldata a 40° si versano lentamente a goccia a goccia ed agitando fortemente cinque grammi di $\alpha\beta'$ dimetilpirrolo. Durante l'aggiunta del pirrolo la temperatura tenderebbe ad innalzarsi, si svolge dell'anidride carbonica, e si avverte un leggero odore di uandorle amare, mentre la miscela cromica assume un color bruno intenso. Si lascia raffreddare la miscela, quindi si isola il prodotto con ripetute estrazioni con etere (almeno 10 estrazioni). L'estratto eterico è gialliccio ed odora degli acidi grassi inferiori, però la maggior parte del prodotto è una sostanza neutra.

Infatti se si secca l'etere con carbonato potassico calcinato, esso diventa quasi incolore e lascia pure un residuo poco colorato, che seccato di nuovo nel vuoto e cristallizzato dall'etere di petrolio, dove è poco solubile, si separa sotto forma di prismetti aghiformi che fondono dopo due cristallizzazioni a 109° con leggero rammollimento preventivo.

Analisi: In 100 parti:

Calcolato per $C_5H_5NO_2$	C	54,02	H	4,53	N	12,64
Trovato	C	54,33	H	4,78	N	12,72

Questa sostanza sublima in aghetti molto sviluppati.

È alquanto solubile in acqua, poco in etere, ed in etere di petrolio meno ancora. Con nitrato d'argento ammoniacale dà un composto argenteo poco solubile. Questi appunto sono i caratteri della citraconimide (¹).

Abbiamo in corso altre esperienze sul comportamento dei pirroli coi diversi ossidanti e ne riferiremo tra breve i risultati.

Patologia. — *Sulla eziologia e patogenesi della peste rossa delle anguille.* Nota preventiva del dott. F. INGHILLERI, presentata dal Socio PATERNÒ.

Durante la campagna antimalarica del 1901 in quel di Grosseto, il prof. B. Gosio ebbe campo di osservare una grave epizoozia che faceva strage delle anguille degli stagni di Orbetello, e poté costantemente isolare dal fegato e dal sangue di anguille ammalate o di recente morte uno speciale bacillo, che mi diede a studiare, onde vedere in quale rapporto di patogenicità esso stesse col processo morboso osservato, e se trattavasi di un germe già conosciuto o di una nuova entità biologica e patogenetica.

Questo germe inoculato nelle anguille del Tevere e di altre località dell'Agro Romano, riproduceva la malattia con tutti i caratteri nosografici ed

(¹) Ciamician e Dennstedt, Gazz. Chim. A. 13-501.

anatomo-patologici che si riscontrano nel processo morboso naturale; dunque nessun dubbio che esso rappresentasse l'agente etiologico di quel processo infettivo.

Le anguille, inoculate sia sottocute che nel cavo peritoneale, come pure quelle che erano poste a vivere in acqua infetta artificialmente, o in acqua ove erano vissute e morte per tale infezione altre anguille, cominciavano già al primo giorno, o secondo i casi più tardi, a mostrare una minore vivacità di movimenti, e poi a presentare sparse per tutto il sistema tegumentario delle numerose emorragie puntiformi, più confluenti nella parte ventrale, nelle pinne e in corrispondenza delle aperture anale e boccale e dell'opercolo, le quali davano all'anguilla un aspetto caratteristico. In quelle poi inoculate sottocute o nel cavo peritoneale, ma più nelle prime, si aveva che in corrispondenza del punto d'inoculazione queste emorragie si mostravano più numerose, il tessuto si edemizzava, e spesso, se il processo decorreva lentamente, vi si formava una vera ulcera atonica a fondo necrotico lardaceo; anche le altre, cioè quelle poste a vivere nell'acqua infetta, presentavano alle volte dei focolai ulcerosi. La morte avveniva generalmente dopo due o tre giorni; ma si davano dei casi in cui il processo infettivo decorreva più lentamente, impiegando 6-8 giorni, e in questi casi il processo assumeva un carattere marantico, ed altri che finivano colla guarigione ed in questi, se si avevano processi ulcerativi, essi in un tempo più o meno lungo si risolvevano in cicatrice. All'autopsia l'esame microscopico rilevava: numerose emorragie puntiformi più o meno confluenti nel tessuto tegumentario, nelle sierose e nella mucosa specialmente dello stomaco e della cloaca, dove erano sì confluenti da aversi una superficie suffusa di sangue, il quale si trovava pure commisto al contenuto cloacale, versamento siero-ematico nel cavo peritoneale, fegato per lo più ingrossato, friabile, alle volte anemico, per lo più congesto con numerose emorragie sottocapsulari ed intralobulari, milza grandeggiante ed iperemica.

L'esame microscopico mostrava: rigonfiamento torbido e alle volte degenerazione grassa degli epiteli e specialmente degli endotelii dei vasi capillari, leucocitosi, numeroso il germe caratteristico nel sangue e nei capillari e spazii linfatici dei tessuti e degli organi.

Questi fatti davano, come si vede, il quadro tipico di una vera setticemia emorragica, sì che era dato stabilire trattarsi di quella speciale epizoozia delle anguille, conosciuta sotto il nome di peste rossa delle anguille.

Questa epizoozia che colpisce alle volte, come nel caso osservato dal Gosio, sì fieramente un'industria tanto utile e che spesso forma la sola risorsa economica di alcune località, già da tempo ha richiamata l'attenzione dei piscicultori e degli ittiopatologi. Ma pochi dati si possiedono in proposito, e tra questi quelli che meritano una maggiore considerazione sono le ricerche batteriologiche del Canestrini, che in una sua Memoria comparsa

nella dispensa VI degli Atti del R. Istituto Veneto (1892-93) descrive brevemente un bacillo da lui isolato e denominato *B. anguillarum*, emettendo contemporaneamente l'ipotesi che il meccanismo epizootosologico di questa infezione debba stare in rapporto colla funzione favoreggiatrice della salsedine dell'acqua sulla patogenicità di esso germe.

Però il Canestrini in quella sua Memoria si contenta di darci solo alcuni dati riguardanti alcuni caratteri morfologici, culturali e patogenetici del germe, i quali nella loro brevità non soddisfano le esigenze scientifiche attuali nel descrivere ed individualizzare un dato microbo. Inoltre, fin dalle prime ricerche io potei constatare che delle differenze importanti esistevano tra il *B. anguillarum* del Canestrini e quello isolato del Gosio, sicchè il problema meritava ancora di essere studiato non solo dal punto di vista della storia naturale di esso germe, ma della sua patogenicità, e vedere perciò quale pericolo eventualmente esso possa rappresentare per l'uomo, data la costumanza di ritenere non solo come non pericolose, ma come più nutritive le anguille infette o morte per tale infezione.

Sono questi i motivi che mossero il Gosio a ritenere utile che nuove ricerche si istituissero in proposito nel laboratorio da lui diretto, affidandone a me l'onorifico incarico.

Morfologia. — Caratteri microscopici. Nei tessuti e negli essudati patologici questo microbio si presenta sotto forma di un bacillo ad estremità arrotondate, isolato, o riunito a coppia, lunga da 2 a 3 μ ., largo da 0,4 a 0,3 μ .. Assume bene i colori basici di anilina, ma non resiste al metodo di Gram, presenta spiccato il fenomeno della colorazione polare, e lascia osservare un sottile alone incolore, che nell'insieme lo rassomiglia ad un diploobacillo.

Nei terreni culturali questi caratteri si conservano e variano solo nei limiti delle vicende vitali; però nelle culture in agar si presenta in ammassi di aspetto zoogleico, e nell'acqua di condensazione, come pure nelle vecchie culture in brodo, alle volte in forma di sottili filamenti non segmentati.

Colorato col metodo Nicolle-Morax lascia osservare delle ciglia disposte alla periferia.

Caratteri culturali. — Si coltiva bene e facilmente su tutti i comuni terreni nutritivi sia alla temperatura di 18°-20° che sembra preferire, che a quella della stufa a 35°.

Nella gelatina sia a piatto che per infissione, si sviluppa in maniera analoga al kommbacillo. Nelle culture in agar lascia osservare un notevole fenomeno di autobatteriolisi; l'agar contemporaneamente s'imbrunisce, acquista un aspetto vitreo e mostra numerosi cristalli prismatici, variamente aggruppati; nelle prime 24-36 ore, queste culture lasciano osservare una leggiera fluorescenza bluastra. Dissolve rapidamente il siero di sangue solidificato, con produzione di numerose concrezioni di struttura cristallina aghiformi. Sulla patata a becco di flauto forma una patina di colorito giallo-mogano. In brodo

semplice, peptonizzato, ed in acqua peptonizzata si sviluppa bene, però il germe si addensa maggiormente alla superficie, dove si raccoglie spesso in una sottile membranella. Scinde il latte con precipitazione di caseina, che poi ridiscioglie. Nel brodo latto-fenoltaleinico si sviluppa senza decolorarlo, e nei terreni addizionati di zuccheri mono o poli-saccaridi non dà luogo nè a fatti d'inversione, nè a produzione di gas. Riduce il bleu di metilene nella sua leucobase.

I caratteri rilevati e descritti si riferiscono al microbio integro nelle sue proprietà bio-chimiche e patogenetiche, e perciò son dati da questo microbio appena o da poco isolato dai tessuti di anguille infette. Nei successivi passaggi in questi mezzi nutritivi, come pure quando vien passato ripetutamente per la cavia, essi lasciano osservare delle marcate differenze: diminuito il potere di liquefare la gelatina, di sciogliere il siero di sangue solidificato, di scindere il latte e ridisciogliere la caseina precipitata, di auto-batteriolisi, d'imbrunire i tessuti nutritivi.

Biologia. — Questo microbio si mostra mobile, non forma spore e provvede alla sua conservazione con delle forme vegetative dotate di maggiore resistenza. L'ossigeno favorisce il suo sviluppo, ma esso vive anche quando vien coltivato in assenza di questo elemento.

È poco esigente in fatto di temperatura, preferisce quella di 20°; una temperatura superiore a 35° influisce sulla sua integrità bio-chimica e lo attenua. Si sviluppa bene nei terreni ordinari di cultura, ma vive e si moltiplica anche nei terreni poveri sia artificiali che naturali. Preferisce una reazione alcalina, ma si adatta a vivere anche in quelli che ne presentano una leggermente acida. Con i successivi passaggi culturali si attenua e mostra alcuni cambiamenti nelle sue caratteristiche; però basta coltivarlo in acqua peptonizzata + Na Cl al 3:100 e passarlo ripetutamente per l'anguilla, per reintegrarlo nei suoi caratteri bio-chimici, culturali e patogenetici.

Vaccina verso se stesso i terreni in cui si sviluppa, e dona fin da principio a tutti i mezzi culturali una spiccata reazione alcalina, e conferisce nei primi tempi a tutte le culture un odore leggermente fecaloide. Si mostra gran produttore di cristalli di fosfato d'ammonio, di leucina e di tirosina; forma indacano e presenta la Rothreaction solo nelle culture in brodo di almeno 10 giorni. È poco resistente verso gli agenti naturali ed artificiali fisici e chimici della disinfezione, ma per il suo facile saprofitismo resiste nei processi di concorrenza vitale, specialmente a contatto delle flore idriche, e prevale sugli altri microbi se nel mezzo si trova del Na Cl nel rapporto del 2-3-4:100.

Ricambio materiale. — Lo studio del meccanismo chimico di alcuni caratteri culturali e lo studio di alcuni fatti vitali che si osservano nelle culture quali quelli di liquefare la gelatina, di scindere il latte e ridisciogliere la caseina precipitata, di dissolvere il siero di sangue solidificato, di

auto ed etero-batteriolisi da una parte; di non saccarificare l'amido, di non invertire il saccarosio, di non bruciare la molecola del glucosio e del lattosio dall'altra, ci permettono di delineare la fisionomia caratteristica fondamentale dell'attività bio-chimica di questo microbio allo stato di virulenza specifica per l'anguilla; cioè che mentre si mostra un attivo fermento della molecola proteica, sembra risparmiare quella degli idrati di carbonio.

Però si ha che quando è coltivato in presenza di glucosio, progressivamente la reazione di Fehling si fa meno sensibile, mentre il liquido assume una sempre maggiore consistenza sciropposa e s'imbrunisce. Questa riduzione quantitativa non è operata da un fermento, perchè non si ottiene facendo agire i filtrati culturali; ed è perciò che a spiegarla mi sembra razionale avanzare l'ipotesi che si tratti dell'azione riducente di alcuni prodotti gassosi del ricambio materiale del microbio, quali l'H e l'H₂, S che, con meccanismo chimico simile a quello con cui agiscono sul bleu di metilene riducendolo nella sua leucobase, agiscono sul gruppo aldeidico del glucosio e trasformano perciò questo monosaccaride nel suo alcool corrispondente.

Ma se questo microbio sembra risparmiare gli idrati di C., attacca attivamente la molecola proteica con speciali diastasi. Queste diastasi sono:

- 1° una diastasi fluidificante la gelatina;
- 2° una batterio-presase;
- 3° una batterio-casease;
- 4° una diastasi che dissolve il siero di sangue solidificato (batterio-tripsina);
- 5° una diastasi auto ed etero-batteriolitica.

I prodotti principali dell'attività chimica di queste diastasi sono l'NH₃, l'H₂S, H, il peptone, la tirosina, la leucina, l'indacano, l'indolo; gli altri prodotti non ho ricercati, perchè lo studio di essi molto mi avrebbe allontanato dai giusti confini di questo lavoro.

Oltre questi composti dovuti all'attività escretiva e secretiva del microbio, nei terreni di cultura si rinvencono delle toxo-albumine, le quali hanno la proprietà di determinare in vivo delle lesioni proporzionali alla dose, e di conferire all'organismo, quando vengono adoperate con speciali accorgimenti uno stato di immunità, però transitoria, non solo verso le dosi tossiche mortali dei filtrati, ma anche verso lo stesso microbio.

Queste toxo-albumine dimostrano un'azione vaso-paralizzante, ed un'elezione specifica distrofogena per gli endotelii, nonchè proprietà emolitiche.

Patogenicità del microbio della peste rossa. — Oltre che per l'anguilla questo microbio si mostra patogeno per molte varietà di pesci d'acqua dolce, pel tritone e per la salamandra, ma non è patogeno per la rana. Inoltre è patogeno in ordine di sensibilità, per la cavia, il coniglio, il *Rattus decumanus albus*, il topolino grigio; nei piccioni non determina che delle lesioni

locali. Lo studio istopatologico delle lesioni che determina negli animali sensibili assegna questa infezione al gruppo delle settico-emorragiche.

POSTO DEL BACILLO DELLA PESTE DELLE ANGUILLE
TRA I GERMI PATOGENI CONOSCIUTI.

Quanto siamo venuti esponendo sui caratteri morfologici, culturali, biochimici e patogenici del bacillo della peste-rossa ci facilita nella disamina delle parentele e delle affinità che questo microbio mostra con altri germi la critica per assegnare il posto che gli spetta tra i microbi patogeni conosciuti; se rappresenta, in altri termini, un'entità biologica a sè, o se invece non esprime che una proprietà patogenetica caratteristica di un germe noto, dovuta a contingenze speciali.

Certo oggi la più larga conoscenza della Storia naturale dei bacteri e delle leggi che ne governano i fenomeni vitali in vitro e nell'organismo vivente, non permette più di stabilire o negare l'identità tra due microbi basandoci su somiglianze o differenze che presentano nei loro caratteri e che spesso sono l'opera dell'artificio o il risultato contingente di cause transitorie, tranne quando le une e le altre non si mostrano immutabili nella loro fenomenologia. Ma neppure è concesso di forzare l'interpretazione dei dati su cui tali parentele si basano o si escludono alla tesi che si cerca di sostenere, negando perciò o affermando artificiosamente una data identità; in quanto si può dare che forme in apparenza distinte appartengano alla stessa specie, come forme molto simili rappresentare, se non specie diverse, varietà di una stessa specie, le quali però si sono individualizzate per la trasmissione ereditaria di nuove proprietà vitali.

Però prima di procedere a questa critica a proposito dei legami di parentela e di identità che questo microbio mostra possedere con alcuni germi noti, credo opportuno sgombrare il terreno di una questione per così dire pregiudiziale: è il microbio da me studiato, quello isolato e descritto dal Canestrini?

Nella prima parte di questa Nota, accennando a tale quesito, dissi che dalla breve Nota del Canestrini non risulta netta, caratteristica la fisionomia biologica del *B. anguillarum*; in quanto mancano tutti quei dati che l'esigenze scientifiche attuali domandano per stabilire l'individualità di un germe.

Dire che un microbio scioglie la gelatina, si coltiva in tutti i terreni ordinari, si mostra poco esigente in fatto di temperatura, non basta per stabilirne l'identità, anche quando questi dati si accompagnano a proprietà patogenetiche specifiche, che possono rappresentare la funzione di cause accidentali e transitorie. Del resto tra il bacillo descritto dal Canestrini e quello da me studiato intercedono delle differenze importantissime, perchè mentre

questo è un macrobio facoltativo, l'altro è un acrobio obbligato; mentre il mio non resiste al metodo di Gram, quello del Canestrini vi si colora; mentre il mio si mostra patogeno per la cavia, pel coniglio e pel *Rattus decumanus albus*, quello del Canestrini non presenta tale patogenicità. Un giudizio assoluto in ogni modo non credo poterlo dare; perchè può darsi il caso che il Canestrini ed io abbiamo studiato lo stesso germe, e che le differenze ubbidiscano solo a difetto di tecnica dovuto al momento diverso in cui si è operato, ad una minore importanza accordata allo studio di alcuni caratteri importantissimi per la diagnosi biologica, ovvero che la peste rossa delle anguille, come alcune altre zoonosi del gruppo delle setticemie emorragiche, non rappresenti una unità nosogenica, e possa di conseguenza esser prodotta da germi diversi per quanto tra loro affini, e che forse rappresentano delle varietà di una stessa specie.

Una prova avrebbe potuto decidere della controversia, cioè quella del potere immunizzante o agglutinante reciproco; ma non mi è stato possibile farla, perchè il *B. anguillarum* non si trova nelle collezioni dei microbi patogeni.

Ma oltre che con il *B. anguillarum* questo microbio presenta delle affinità spiccatissime con il *B. Pyocianens* e con l'*Hydrophilus fuscus* del Sanarelli, il ranicida di Ernst, e il *B.* della cancrena delle rane del Legrain. Ed è specialmente con questi ultimi tre che il *B.* della peste rossa mostra così stretti legami da riuscire difficile poter stabilire se tutti e quattro rappresentino o no lo stesso microbio in momenti patogenetici diversi, ovvero delle varietà di una stessa specie. Però devo affermare che per quando io abbia cercato, non mi fu possibile ridurre il bacillo della peste rossa a mostrarsi patogeno per la rana, sia ricorrendo a delle inoculazioni nei sacchi linfatici di dose altissime di germe ora patogeno, ora attenuato, sia ricorrendo ad un adattamento patogenetico graduale. Però come questi il microbio della peste rossa si mostra un comune abitatore delle acque. Ed a proposito credo opportuno ricordare un fatto da me accidentalmente osservato e che ritengo importante per l'apprezzamento del meccanismo epizoonosologico di questa infezione: avendo fatto comprare dei pesci d'acqua dolce e avendoli messi a vivere in una vasca che si trova nel cortile del laboratorio onde sperimentare la patogenicità del microbio verso di essi, dopo qualche giorno, prima che io avessi proceduto all'esperimento, fui avvertito dal custode che si era manifestata una moria tra quei pesci; i quali cominciavano, siccome potei osservare seguendo in qualche caso di essi tutta la malattia, col presentare da principio una esquamazione più o meno estesa dovuta ad edemizzazione dei tessuti sottostanti, poi qualche focolo emorragico nell'apparato pinnale, e morivano in due o tre giorni, mostrando all'autopsia trattarsi di una infezione a tipo emorragico. Da questi pesci morti o ammalati io potei isolare un bacillo, e così pure dall'acqua della vasca, il quale presentava gli stessi caratteri mor-

fologici culturali e meno spiccate le stesse proprietà biochimiche del bacillo della peste rossa, ma che non era patogeno nè per l'anguilla, nè per la rana.

Però questo microbio messo a vivere nei terreni nutritivi addizionali di NaCl al 3: 100, dopo varî passaggi finiva col mostrarsi patogeno per l'anguilla, dando luogo in essa ad un'infezione molto simile nella fenomenologia alla peste rossa; inoltre si aveva che il siero del sangue di queste anguille ammalate presentava uno spiccato potere agglutinante per il *B.* della peste-rossa e viceversa.

Io non credo che il fatto che il *B.* della peste rossa non si mostra patogeno per la rana, quando specialmente i bacilli del Sanarelli e di Ernst sono patogeni per l'anguilla, possa fare escludere la loro identità; ma non credo neppure che tale identità si possa ammettere senza che intervenga l'*experimentum crucis* del potere vaccinante o agglutinante reciproco; specialmente se si tiene conto che tra questi germi esistono pure delle notevoli differenze di natura biologica e per citarne qualcuna, l'esigenza di fronte all'ossigeno, in quanto mentre gli uni sono degli aerobii obbligati, il bacillo della peste rossa si mostra un anaerobio facoltativo. Io non credo dovermi indugiare ancora in una critica più lunga e più sottile delle differenze e delle identità che questo microbio presenta con quest'altri e con altri germi del gruppo dei settico-emorragici, e specialmente con il *Pyociano*. Per quanto riguarda i bacilli del Sanarelli, di Ernst e di Legrain, come per il *B. anguillarum*, un giudizio categorico non mi è dato esprimerlo, perchè non mi è stato dato poter ricorrere alla prova diagnostica specifica del potere agglutinante o vaccinante; per ciò che riguarda il *Pyociano* in special modo, perchè degli altri non è il caso discutere, sebbene i due germi dimostrino una stretta parentela per le somiglianze culturali, morfologiche e bio-chimiche che presentano, rese nel loro significato ancora maggiori dalla variabilità che il *Pyociano* dimostra, pure mi è stato possibile escluderne l'identità, in quanto i due germi non possiedono potere agglutinante reciproco, e il *Pyociano* non acquista la proprietà di diventare patogeno per l'anguilla.

Sicchè nel complesso devo ritenere che se stretti legami di parentela o di identità intercedono tra il *B.* della peste rossa e molti altri microbi, essi non possono portare che all'affermazione generica, che stretti rapporti filogenetici intercedono tra questi microbi, i quali forse originatisi da un istesso capostipite, nei misteriosi processi della lotta per l'esistenza, hanno finito coll'acquistare delle proprietà caratteristiche ed individualizzarsi, costituendo o delle specie nuove, o delle varietà di una stessa specie.

Un ultimo quesito mi toccava di studiare, cioè se l'uso alimentare delle anguille ammalate o morte di peste rossa possa costituire un pericolo per l'uomo, data la costumanza in alcuni paesi di ritenere la carne di dette anguille infette più saporosa e nutriente; però il tempo non m'ha concesso

d'iniziare tale studio che sarà argomento di ulteriori ricerche, già disposte dal prof. Gosio.

Ma se si pensa, che le cavia e così pure i conigli contraggono questa infezione anche per via gastrica, se ne deve considerare l'uso almeno non consigliabile, anche, perchè esclusa ogni patogenicità di questo microbio per l'uomo, il fatto che esso si mostra squisitamente tossico, deve portare alla conclusione che la carne delle anguille infette di peste rossa, se non è specificamente pericolosa in quanto non è infettante per l'uomo, ha perduto gran parte dei caratteri igienici di un alimento sano.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente BLASERNA dà il doloroso annuncio della perdita fatta dalla Classe nella persona del Corrispondente prof. ANTONIO D'ACHIARDI, mancato ai vivi il 10 dicembre 1902; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 18 luglio 1899.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci HELMERT, JANNSSEN e PFLUEGER; fa inoltre particolare menzione di un lavoro a stampa intitolato: *L'arco elastico senza cerniere*, offerto dall'autore prof. C. GUIDI.

Il Socio TODARO fa omaggio, a nome degli autori professori MARCHIAFAVA e BIGNAMI, dell'opera: *La infezione malarica — Manuale per Medici e Studenti*, e ne parla.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario CERRUTI dà comunicazione degli elenchi dei lavori presentati all'Accademia per prender parte ai concorsi scaduti col 31 dicembre 1902.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re
per l'*Astronomia*.

(Premio di L. 10,000. Scadenza 31 dicembre 1902).

1. BARONE GIOVANNI. — 1) *Osservazioni delle Perseidi del 1896, fatte in Alassio, e confutazione dei risultati ottenuti da P. Stroobant al Belgio, nel calcolo degli elementi parabolici delle Andromeidi del 1895 (st.)*. —

- 2) *Studio sulla corrente meteorica delle Perseidi* (st.). — 3) *Abaco per determinare le elongazioni dei radianti veri dell'apice del moto di rivoluzione della Terra e le velocità relative delle meteore corrispondenti* (ms.). — 4) *Abaco per determinare le distanze perielie delle orbite paraboliche* (ms.).

2. MILLOSEVICH ELIA. — *Il pianeta Eros* (st.).

3. REINA VINCENZO. — 1) *Determinazioni di latitudine e di azimut eseguite nel 1898 nei punti M. Mario, M. Cavo, Fiumicino* (st.). — 2) *Determinazione astronomica di latitudine e di azimut eseguita a M. Pisarello nel 1899* (st.). — 3) *Determinazione astronomica di latitudine e di azimut eseguita a M. Soratte nel 1900* (st.). — 4) *Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut eseguite lungo il meridiano di Roma* (ms.). — 5) *Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi. Relazione sulle esperienze eseguite dai proff. G. Pisati ed E. Pucci* (st.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere ai premi del Ministero della P. I.
per le *Scienze fisiche e chimiche*

(Due premi del valore complessivo di L. 3200. Scadenza 31 dicembre 1902).

1. BOCCARA VITTORIO EMANUELE. — 1) *Sulle variazioni diurne della rifrazione atmosferica*, due Memorie (st.). — 2) *La Fata Morgana* (st.). — 3) *Relazioni di apparecchi costruiti durante gli anni scolastici 1900-1901 e 1901-1902* (lit.).

2. CICONETTI GIOVANNI e PIERPAOLI NAZZARENO. — *Il coefficiente di rifrazione terrestre a Udine* (st.).

3. PETTINELLI PARISINO. — *Un nuovo procedimento per trovare molte relazioni note ed ignote fra le quantità fisiche* (st.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio Carpi
per la *Botanica*.

(Premio L. 900. Scadenza 31 dicembre 1902).

1. DE TONI ETTORE. — *Il Codice Erbario di Pietro Antonio Michiel* (ms.).

2. LONGO BIAGIO. — *Ricerche sulle Cucurbitacee e il significato del percorso intercellulare (endotropico) del tubetto pollinico* (ms.).

CORRISPONDENZA

Il Vicepresidente BLASERNA richiama l'attenzione della Classe sugli importanti risultati ottenuti da GUGLIELMO MARCONI, il quale è riuscito a congiungere, per mezzo della telegrafia senza fili, l'Europa coll'America. Il

senatore Blaserna ricorda che l'Accademia dei Lincei conferì, nello scorso anno, un premio della fondazione *Santoro* al Marconi, per i progressi da lui raggiunti e per incoraggiarlo a continuare le sue belle ricerche.

Su proposta del suo Presidente, la Classe approva unanime l'invio d'un telegramma di felicitazioni vivissime a Guglielmo Marconi, pel trionfo ottenuto, invitandolo a dar notizia all'Accademia dei grandi impianti da lui testè immaginati e portati a compimento.

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; la Società zoologica di Tokyo; le Società geologiche di Washington e di Sydney; la Biblioteca Bodleiana di Oxford.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

L'Accademia delle scienze di Cracovia; l'Istituto geodetico di Potsdam; le Commissioni geodetiche di Losanna e di Washington; la Biblioteca nazionale di Rio de Janeiro.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA *presentate nella seduta del 4 gennaio 1903.*

Borredon G. — La legge del sistema planetario o l'armonia del moto dei suoi corpi. Napoli, 1902. 8°.

De Angelis d'Ossat G. — Observations géologiques sur les méthodes d'exploitation de quelques mines pétrolifères de la Roumanie. Bucarest, 1902. 16°.

Id. — Un nuovo giacimento di cinabro presso Saturnia (prov. di Grosseto). Torino, G. U. Cassone succ. G. Candeletti, 1902. 8°.

Di Vincenzo L. — Metamorfosi del modello cartilagineo primitivo delle ossa. Napoli, 1902. 8°.

Guidi C. — L'arco elastico senza cerniere. Torino, Clausen, 1903. 4°.

Helmert F. R. — Ueber die Reduction der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerebeschleunigungen auf ein gemeinsames Niveau. Berlin, 1902. 8°.

Hescheler K. — *Sepia officinalis* L. Der gemeine Tintenfisch. Zürich, Zürcher & Furrer, 1902. 4°.

Janssen. — Science et poésie. Paris, F. Didot, 1902. 4°.

Jatta A. — Licheni cinesi raccolti allo Shen-si negli anni 1894-1898 dal rev. Padre Missionario G. Giraldi. Firenze, 1902. 8°.

- Marchiafava E. e Bignami A.* — La infezione malarica. Milano, 1902. 8°.
- Pepere A.* — Tumeur primitive du foie originaire des germes aberrants de la capsule surrénale. Paris, Masson et C^{ie}, 1902. 8°.
- Pflüger E.* — Vorschriften zur Ausführung einer quantitativen Glykogenanalyse. Bonn, 1902. 8°.
- Severino G.* — Descrizione del doppio freno idropneumatico S. Giuliano brevettato a cilindri oscillanti e tripla-azione progressiva combinata e simultanea. Torino, Sacerdote, 1902. 8°.
- Viola C.* — Beitrag zur Zwillingsbildung. — Die Bestimmung der optischen Constanten eines Krystalles aus einem einzigen beliebigen Schnitte. Leipzig, 1902. 8°.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.



Seduta del 18 gennaio 1903.

P. VILLARI, Presidente.



MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fotografia del cielo. — *Lavoro della stazione internazionale nell'Osservatorio di Catania per la Carta fotografica del Cielo.*
Nota III del Corrispondente A. RICCÒ.

Essendo trascorso un anno e mezzo dall'epoca dell'altra Nota, che ebbi l'onore di presentare all'Accademia ⁽¹⁾, e siccome ora i lavori stanno entrando in un nuovo stadio, quello della trasformazione delle fotografie in catalogo di posizioni di stelle, credo mio dovere d'informare l'Accademia di quanto abbiamo potuto fare per adempiere all'impegno che l'Italia ha assunto di fronte alle altre nazioni ed alla scienza.

Fotografie. — Dallo scrivente e dall'ing. Mascari, efficacemente assistiti dal sig. Taffara, sono state rifatte in gran parte quelle fotografie stellari del catalogo che erano andate perdute per il distacco della pellicola: ed altre si sono rifatte per ottenerle in migliori condizioni; inoltre sono state fatte altre fotografie nuove. Queste fotografie di mano in mano che si eseguiscano, vengono controllate, confrontandole, se occorre, coll'Atlante celeste di Argelander (Mascari).

Oltre le solite fotografie che si debbono fare per constatare la sensibilità delle lastre, la centratura e l'orientamento delle medesime, dallo scrivente sono state eseguite pure delle fotografie per ottenere una scala di confronto delle grandezze stellari. Si è riconosciuto subito che per avere di una

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. X, 2° sem. 1901, serie 5ª, fasc. 5°.

stella, poniamo di 6^a grandezza, delle immagini eguali a quelle delle stelle di grandezza

7^a 8^a 9^a 10^a 11^a

non basta ridurre la posa o l'apertura (area) dell'obbiettivo in ragione della decrescente intensità luminosa per le diverse grandezze, ossia come

(0,4) (0,4)² (0,4)³ (0,4)⁴ (0,4)⁵

ma sarebbe necessario ricorrere ad una progressione molto più rapidamente decrescente; e siccome così, partendo dalla posa normale di 5 minuti, si arriverebbe per le grandezze (od immagini) minori ad esposizioni brevissime, di cui sarebbe stato impossibile valutare esattamente la durata (almeno coi mezzi di cui disponiamo noi); si è dovuto combinare la riduzione della posa colla riduzione dell'apertura dell'obbiettivo.

Dopo molte prove si è giunti ad ottenere prossimamente la detta scala, nelle seguenti condizioni:

Grandezze stellari.	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	
Pose in secondi .	300	180	108	65	39	23	rapp. = 0,6
Diam. dell'apertura							
in millimetri.	328	207	131	83	52	33	rapp. delle aree = 0,4

Ma confrontando mediante il *Comparatore delle grandezze stellari* le immagini così ottenute con quelle delle stelle delle *Pleiadi* per le diverse grandezze, si sono trovate ancora delle discordanze irregolari, per cui si è dovuto ritoccare le pose precedenti onde avvicinare maggiormente le immagini della scala a quelle delle corrispondenti grandezze nelle dette fotografie delle *Pleiadi*. Si è così giunti empiricamente alla seguente scala, alla quale però occorrono pur sempre delle piccole correzioni, come è indicato appresso:

Grandezza	6 ^a	7 ^a	8 ^a	9 ^a	10 ^a	11 ^a	
Pose	300	200	110	65	39	25	
Aperture	328	207	131	83	32	33	
Correzioni medie in							
grandezze . .	— 0,15	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,05	— 0,25	— 0,05	

Continueremo le prove nell'estate prossima, quando avremo più frequenti le notti serene, e quindi maggior tempo disponibile per queste fotografie.

Il numero delle fotografie fatte in quest'anno e mezzo è il seguente:

Fotografie per il catalogo	n.	487
Aree tipiche, per controllo della sensibilità delle lastre . . .	"	16
Pleiadi	"	12
Per l'orientamento e centratura	"	8
Scala fotometrica	"	10
Totale	n.	533

Nelle fotografie fatte, che ora si conservano entro cassette di legno al secondo piano dell'Osservatorio, in locale ove sono piccole le variazioni della temperatura e dell'umidità, è cessato l'inconveniente del distacco delle pellicole.

E dopo che lo sviluppo ed il lavaggio delle lastre si fa in un locale del sottosuolo dell'Osservatorio, ove l'acqua arriva per condotta tutta sotterranea, non si ha più da temere nell'estate alterazioni della gelatina delle lastre per temperatura troppo alta; però nelle epoche di maggior calore bisogna tuttavia ricorrere al ghiaccio, per abbassare la temperatura dei reattivi fotografici. L'operazione dello sviluppo, che richiede molta cura e pazienza, è affidata al sig. Taffara.

Misure. — La misura al macromicrometro delle immagini stellari sulle lastre in due posizioni a 180° , è stata continuata per opera dei sigg. ing. Franco e Massa; il sig. Mazzarella ed il dott. Mendola (assunto al posto lasciato dal dott. Eredia dal 1° novembre 1901) si sono occupati della riduzione delle misure a parti dello intervallo dei tratti del reticolato di riferimento (che è fotografato sulle lastre medesime), ridotto a 5 giri della vite micrometrica; e si sono occupati pure del controllo derivante dal confronto delle misure nelle due posizioni della lastra: controllo che si è trovato utilissimo per eliminare gli equivoci di lettura del micrometro o di scrittura, ed anche per ovviare alla dimenticanza di qualche stellina. Poi i medesimi sigg. Mazzarella e Mendola hanno fatto le medie delle due misure per ognuna delle due coordinate delle stelle.

Si sono così misurate due volte:

Lastre del catalogo	n.	170
Contenenti stelle	"	31200

Aggiungendo quelle misurate prima, si ha il totale di misure eseguite finora:

Lastre del catalogo	n.	229
Stelle	"	53635

Dunque si è fatto quasi un quarto del lavoro di misura delle 1008 *lastre del catalogo* spettanti all'Osservatorio di Catania.

Il limite di tolleranza nella differenza delle predette misure nelle due posizioni è stato ridotto da $0^{\text{mm}},010$ a $0^{\text{mm}},009$; con tutto ciò le misure che risultano errate sono attualmente solo circa il 2%.

I sigg. ing. Franco e Taffara hanno costruito la tavola delle correzioni dei singoli lati delle maglie del reticolato n. 88. Questo reticolato ha sostituito l'altro n. 82, perchè nel vetro argentato inciso che serviva ad imprimerlo sulle nostre fotografie, si erano staccate particelle d'argento (inconveniente solito). Il n. 88, che abbiamo conservato in cassetta a doppio fondo con calce viva, per preservarlo dall'umidità e dalle muffe, ha resistito assai più lungamente.

Il lavoro di osservazione procede alacramente in tutti i detti Osservatori, ed anzi abbiamo già ricevuta una parte delle posizioni di stelle già ridotte al 1900.0.

Nell'Osservatorio di Catania sono state calcolate e pubblicate, come preparazione al predetto lavoro, le posizioni apparenti di 10 in 10 giorni per il 1902 di 50 stelle fondamentali di Newcomb per le riosservazioni da farsi nei sei Osservatori (Mazzarella, Taffara, Pastore). Per il 1903 si è fatto lo stesso lavoro per 40 stelle fondamentali (Taffara, Pastore).

Si sono calcolate inoltre le posizioni approssimate per il 1902 di 563 stelle fra quelle da riosservarsi; e ciò ad uso di uno degli Osservatori partecipanti alla riosservazione (Taffara).

Riduzione delle posizioni misurate in catalogo. — Il prof. Boccardi ha fatto uno studio ed esame comparativo minuzioso ed esauriente dei metodi proposti per la detta riduzione, ed ha elaborata una Memoria, di prossima pubblicazione, sulla teoria e pratica di tale riduzione. I risultati più essenziali di questo lavoro sono:

1°. Nella riduzione delle lastre si ottiene maggiore esattezza coll'impiego di quattro costanti, anzichè di sei.

2°. La teoria ed il calcolo provano che si possono tralasciare le numerose correzioni preliminari (generalmente ritenute necessarie), conseguendo in minor tempo l'identico grado di esattezza.

3°. Per conseguenza la costruzione e l'utilizzazione del catalogo a coordinate rettangolari riusciranno più facili e più rapide.

Dalla predetta Memoria si sono tratte le norme e le tavole per la esecuzione pratica della riduzione medesima (Boccardi, Pastore).

Avendo già nel catalogo compilato un buon numero di stelle di riferimento, e le posizioni di altre essendoci state già comunicate dagli Osservatori partecipanti alla riosservazione, come prima prova si è fatta la riduzione di 6 lastre con metodi diversi (Boccardi, Mendola, Pastore). I risultati sono molto soddisfacenti: le coordinate equatoriali delle stelle di riferimento (12 a 16 per lastra), dedotte dalla misura mediante le costanti ottenute per le singole lastre, si accordano colle posizioni del nostro catalogo compilato, lasciando divergenze medie:

$$\Delta\alpha \cos \delta = \pm 0^s.02 \quad \Delta\delta = \pm 0''.4$$

Le altre stelle della lastra danno divergenze medie

$$\Delta\alpha \cos \delta = \pm 0^s.05 \quad \Delta\delta = \pm 1''.2$$

Per le stelle comuni a due lastre contigue (che si sovrappongono per $\frac{1}{4}$ della superficie) le posizioni, ottenute colla riduzione dell'una e dell'altra lastra, si accordano bene, lasciando divergenze medie:

$$\Delta\alpha \cos \delta = \pm 0^s.06 \quad \Delta\delta = \pm 0''.6$$

La poca entità delle riferite divergenze dimostra che fotografie, misure e calcoli, vanno bene.

L'accordo delle posizioni delle stelle in lastre attigue ci ha provato che possiamo dispensarci dal ricorrere ai complicati metodi di raccordamento delle posizioni date da lastre diverse.

Dai detti calcoli delle 6 lastre è risultato pure che la lunghezza focale del nostro obbiettivo fotografico differisce pochissimo dalla teorica, per cui un millimetro sulla lastra deve rappresentare un arco di un minuto. La differenza approssimata è solo $0^{\text{mm}}.001$, e varia pochissimo da lastra a lastra.

Ciò facilita notevolmente i calcoli di riduzione. Inoltre ciò ha per noi una importanza speciale; perchè avendo dovuto lo scrivente avvicinare di un millimetro i due vetri dell'obbiettivo per far scomparire un'immagine secondaria, come già fu detto all'Accademia (¹), era da temersi una dannosa variazione della lunghezza focale. Debbo aggiungere però che anche le determinazioni dirette, o fotografiche, della lunghezza focale, fatte prima e dopo la detta correzione dell'obbiettivo non avevano dato una sensibile variazione.

Dirò di più che le medesime determinazioni della lunghezza focale, fatte in stagioni diverse, dimostrano che è indipendente dalle variazioni di temperatura, o per lo meno per quelle abbastanza miti del clima di Catania, cioè da $+7^{\circ}$ e $+30^{\circ}$, di notte nel padiglione fotografico; perciò da molto tempo non si sposta più il tubo porta *châssis* dell'equatoriale fotografico per metterlo più esattamente a fuoco nelle diverse stagioni.

Dopo i suddetti lavori preliminari, è cominciato di recente il lavoro corrente di riduzione delle lastre.

Nel finire mi pregio di presentare vivissimi ringraziamenti ai chiarissimi colleghi, Direttori ed Astronomi degli Osservatori (che con mirabile accordo prendono parte alla riosservazione delle nostre stelle di riferimento) per aver accettato gentilmente il carico gravoso che si aggiunge alle incombenze ed ai lavori importanti, che, sia per dovere d'ufficio, sia per iniziativa propria, compiono nei loro Osservatori. Tale collaborazione onora altamente l'Osservatorio di Catania.

Sono grato altresì ai miei collaboratori dell'Osservatorio di Catania, che mi hanno secondato con tanto impegno nell'adempimento della nostra parte nella cospicua impresa internazionale della Carta fotografica del Cielo.

(¹) Rendiconti, vol. VI, 1° sem. 1897, serie 5^a.

Matematica. — *I problemi di riduzione di Pfaff e di Jacobi nel caso del second'ordine.* Nota del Corrispondente E. PASCAL.

Una delle quistioni importanti che, quando intrapresi i miei studî sulle equazioni ai differenziali di 2° ordine, io mi proponevo di trattare, era quella della estensione del problema di Pfaff⁽¹⁾, che, come è noto, ha, nella teoria delle ordinarie equazioni pfaffiane, un interesse fondamentale. Colla presente Nota io mi propongo appunto di risolvere questo problema per il caso del second'ordine, e di mostrare come, mediante le formole e i risultati ottenuti nelle mie precedenti Note, la soluzione del problema venga ad acquistare una grande semplicità.

Enuncierò il problema, nel nostro caso, sotto la seguente forma: *Trovare le condizioni perchè esistano trasformazioni di variabili per le quali una equazione ai differenziali totali di 2° ordine si riduca ad una dipendente da un numero minore di variabili, e trovare tutte le trasformazioni per le quali si effettui questa riduzione.*

Alla soluzione di questo problema giungerò per due vie, una diretta, e l'altra fondata sulla teoria della trasformazioni infinitesime e sui risultati all'uopo da me ottenuti in un'altra recente Nota presentata a questa stessa Accademia⁽²⁾.

Considererò infine, accanto alla riduzione che può chiamarsi di Pfaff-Grassmann, perchè da questi autori studiata nel caso del primo ordine, altre due riduzioni, che si possono ambedue far corrispondere, in due diversi sensi, a quella che alcuni chiamano di Jacobi⁽³⁾.

1. Si abbia la forma

$$U \equiv \sum_{i=1}^n X_i d^2 x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij} dx_i dx_j$$

e si voglia trovare una trasformazione

$$y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

in modo che la forma trasformata U' sia eguale al prodotto di una forma

(1) V. p. es. la prefazione alla mia Memoria in *Annali di Matematica* (3), t. 7.

(2) *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2° ordine*, Rend. Acc. Lincei (5), t. XI, 1902, 2° sem., p. 167.

A proposito di questo lavoro è bene avvertire dell'evidente errore di stampa incorso alla pag. 172; alla riga 16^a invece di *deve* si ha da leggere *non deve*, e alla riga seguente invece di *è zero* deve leggersi *non è zero*.

(3) Vedi E. v. Weber, *Vorl. über das Pfaff'sche Problem*, etc., Leipzig 1900, p. 161.

in sole $n - 1$ variabili, p. es. $y_1 \dots y_{n-1}$, e di un fattore finito contenente tutte le variabili.

Indicando con Y_h, Y_{hk} i coefficienti della forma trasformata, dovrà aversi

$$(1) \quad Y_n = 0, \quad Y_{hn} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

e inoltre

$$(2) \quad \frac{1}{Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial y_n} = \frac{1}{Y_{hl}} \frac{\partial Y_{hl}}{\partial y_n} = \varrho, \quad (h, k, l = 1, 2, \dots, n-1)$$

da cui, richiamando le espressioni delle Y per mezzo delle X , si hanno le:

$$(3) \quad \frac{\partial Y_k}{\partial y_n} = \varrho \sum_1^n X_i \frac{\partial x_i}{\partial y_k}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$(4) \quad \frac{\partial Y_{hl}}{\partial y_n} = \varrho \left[\sum_1^n X_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_l} + \sum_1^n \sum_1^n X_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_j}{\partial y_l} \right] (h, l = 1, 2, \dots, n-1).$$

Calcoliamo ora i simboli $(kn)'$, $\{h l n'\}$ relativi alla forma trasformata e osserviamo che, per effetto delle (1), essi non sono altro che i primi membri delle (3) e (4). Ma intanto ricordiamo che questi simboli si esprimono, mediante quelli espressi nelle X , colle formole (1):

$$(kn)' = \sum_i \left[\sum_j (ij) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} \right] \frac{\partial x_i}{\partial y_k}$$

$$\{h l n'\} = \sum_i \left[\sum_j \{ij\} \frac{\partial x_j}{\partial x_n} \right] \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_l} + \sum_r \sum_s \left[\sum_j \{rsj\} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \right] \frac{\partial x_r}{\partial y_h} \frac{\partial x_s}{\partial y_l},$$

dunque, paragonando i secondi membri di queste con quelli di (3) e (4) e scrivendo la prima delle (1) espressa nelle X , si hanno le equazioni lineari:

$$(5) \quad \begin{cases} \sum_j X_j \frac{\partial x_j}{\partial y_n} = 0 \\ \sum_j (ij) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} = \varrho X_i, & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_j \{ij\} \frac{\partial x_j}{\partial y_n} = \varrho X_i, & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_j \{rsj\} \frac{\partial x_j}{\partial y_n} = \varrho X_{rs}, & (r, s = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

e a queste devono soddisfare le derivate rispetto alla y_n delle antiche variabili. La matrice di queste equazioni lineari è quella medesima da me studiata nelle Note sopracitate e nelle altre in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35,

(1) Vedi la mia Nota in Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, pag. 1180, ovvero l'altra in Rend. Acc. Lincei (5), t. XI, 1902, 2° sem., p. 105.

pag. 835 e 875, e di cui ho dimostrata la notevole proprietà che la sua caratteristica è invariante per qualunque trasformazione di variabili. Essa è rappresentata nelle mie precedenti Note colla notazione $M + (M) + \{M\} + \{M\}$.

Possiamo far vedere che la sussistenza delle (5) è condizione anche *sufficiente* per la desiderata riduzione; giacchè in primo luogo è evidente che dalle (5) si hanno le (3), (4) e quindi le (2), e inoltre la prima delle (1); resta perciò solo a dimostrare che ne risulta anche la seconda delle (1). Ora sottraendo le seconde e terze delle (5) si hanno le

$$\sum_j ((j\ i)) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} = 0$$

donde

$$\sum_i \sum_j ((j\ i)) \frac{\partial x_j}{\partial y_n} \frac{\partial x_i}{\partial y_n} = 0.$$

Ma per le formole di trasformazione del simbolo $((n\ h))$ ⁽¹⁾, il primo membro di questa equazione non è altro che $((n\ h))$ calcolato per la forma trasformata cioè $((n\ h))'$, dunque si ha:

$$((n\ h))' = \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} - Y_{nh} = 0$$

donde, essendo già $Y_n = 0$, resta $Y_{nh} = 0$.

Sia di caratteristica *non* maggiore di n , la matrice delle equazioni lineari (5) cioè la matrice $M + (M) + \{M\} + \{M\}$, e sia allora $\xi_1 \dots \xi_n$, ϱ una soluzione del sistema (5), e formiamo l'equazione a derivate parziali

$$(6) \quad \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

della quale potranno trovarsi gli $n - 1$ integrali indipendenti $y_1 \dots y_{n-1}$.

Scegliamo arbitrariamente una nuova funzione y_n delle x , colla sola condizione che sia indipendente dalle precedenti; la trasformazione

$$(7) \quad y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

risolve il nostro problema, e ogni trasformazione che risolve il problema deve essere di questa specie. Infatti i differenziali delle $x_1 \dots x_n$, ricavati dalle prime $n - 1$ delle (7) soddisfanno a

$$(8) \quad \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n}$$

per effetto di (6), e quindi, introducendo la funzione y_n , si ha che i rap-

⁽¹⁾ Op. cit.

porti $\frac{dx_j}{dy_n}$ sono proporzionali alle ξ_j e perciò soddisfanno le (5). Viceversa se le (5) sono soddisfatte, lo saranno le (8) e quindi (6). Abbiamo perciò il risultato:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una trasformazione per cui la forma data si riduca, a meno di un fattore, ad una contenente una variabile di meno, è che la matrice $M + (M) + \{M\} + \{M\}$ abbia caratteristica eguale o minore di n . In tal caso una trasformazione di tale specie si ottiene cercando una soluzione $\xi_1 \dots \xi_n$ ϱ delle equazioni lineari

$$(9) \quad \begin{cases} \sum X_j \quad \xi_j = 0 \\ \sum_j (i j) \quad \xi_j = \varrho X_i & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_j \{i j\} \quad \xi_j = \varrho X_i & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_j \{r s j\} \quad \xi_j = \varrho X_{rs} & (r, s = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

e indi gli $n - 1$ integrali indipendenti dell'equazione a derivate parziali:

$$(10) \quad \sum \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Chiamando $y_1 \dots y_{n-1}$ tali integrali e costruendo arbitrariamente una nuova funzione y_n indipendente dalle precedenti, la trasformazione

$$(11) \quad y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

è la richiesta; e ognuna di tal natura si ottiene in tal modo.

Sia $\nu < n$ la caratteristica della predetta matrice. Colla trasformazione (11) si abbia $U = \varrho U_1$, dove U_1 non dipenda più dalla variabile y_n .

La matrice relativa alla forma U_1 ha alcune linee di meno (quelle che dipendono dall'indice n) e una colonna di meno (l'ultima); per un teorema da noi già dimostrato (¹), quella matrice, che ha ora n colonne, ha la stessa caratteristica che quella relativa ad U , cioè $\nu < n$. Ne deduciamo che essendo di nuovo soddisfatte le condizioni espresse dal teorema precedente, sarà possibile una nuova riduzione e si ha $U_1 = \varrho_1 U_2$ dove U_2 non conterrà che solo $n - 2$ variabili, e così di seguito, finchè ci riduciamo ad una $U_{n-\nu+1}$ di cui la matrice corrispondente contiene solo ν colonne e che perciò, dovendo avere sempre caratteristica ν , è diversa da zero. Allora non sarà più, per questa via, possibile una ulteriore riduzione, e si sarà così trasformata la U in un'altra che, a meno di un fattore, dipenderà solo da $\nu - 1$ variabili.

(¹) *Estensione di alcuni teoremi di Frobenius*, Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pag. 875, § 1.

Cioè: Se è ν la caratteristica della matrice $M + (M) + \{M\} + \{M\}$, esisteranno sempre trasformazioni per le quali la EQUAZIONE $U = 0$ si trasformi in una con $\nu - 1$ variabili.

2. Vogliamo ora mostrare con quanta eleganza e semplicità si può ritrovare il medesimo teorema del § precedente servendosi della teoria delle trasformazioni infinitesime e dei risultati da me già ottenuti nella Nota presentata a questa stessa Accademia e citata in principio.

Posto

$$U = \varrho U_1 \equiv U'$$

e ammesso che U_1 non contenga la variabile y_n , si osserva che la U' ammette (nel senso della precedente Nota) la trasformazione infinitesima

$$Y = \sigma(y_1 \dots y_n) \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Infatti il risultato dell'applicazione di Y ad U' è

$$Y U' = \frac{\sigma}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial y_n} U'.$$

Intanto l'invariante simultaneo \mathcal{A} e il covariante simultaneo C di U' e Y (v. nota cit.), sono zero, come si riconosce a colpo d'occhio, dunque, potendo affermare che le stesse proprietà sussisteranno fra la U e la trasformata, nelle x , Ξ della Y , abbiamo che questa Ξ deve essere una di quelle studiate nell'ultimo teorema della Nota citata e per la cui esistenza, come sappiamo, è necessario e basta che la matrice $M + (M) + \{M\} + \{M\}$ abbia caratteristica minore o al più eguale ad n .

Se dunque è possibile la riduzione di Pfaff, se ne deduce la esistenza di una trasformazione infinitesima Ξ di cui sono zero l'invariante \mathcal{A} e il covariante C e che lascia invariata U .

Viceversa dall'esistenza di una tale Ξ si ricava la riduzione di Pfaff. Giacchè sieno $y_1 \dots y_{n-1}$ gli $n - 1$ integrali indipendenti dell'equazione

$$(12) \quad \Xi f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

formiamo una nuova funzione y_n indipendente dalle precedenti e consideriamo la trasformazione

$$(13) \quad y_i = \varphi_i(x_1 \dots x_n), \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Se la trasformata della U ha per coefficienti le Y , poichè la trasformata di Ξ sarà del tipo

$$\sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial y_k} \equiv \sigma \frac{\partial}{\partial y_n},$$

dovendo essere zero l'invariante $\mathcal{A} = \sum_k \eta_k Y_k$, ne risulta

$$Y_n = 0;$$

e dovendo inoltre essere zero tutti i coefficienti di

$$C = \sum_k C_k dy_k = \sum_k \left[\sum_h ((hk)) \eta_h \right] dy_k,$$

ne risulta

$$((nk)) = 0$$

cioè

$$\frac{\partial Y_n}{\partial y_k} - Y_{nk} = 0,$$

donde, essendo già $Y_n = 0$, si ha

$$Y_{nk} = 0.$$

Dunque la U trasformata, cioè la U' , non contiene termini *differenziali* in y_n . Si può far vedere che il rapporto degli altri coefficienti è indipendente da y_n ; giacchè dovendo la Ξ essere una trasformazione che lascia invariata la U , sarà

$$\sigma \frac{\partial}{\partial y_n} U' = \varrho U'$$

cioè

$$\sigma \sum_1^{n-1} \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} d^2 y_i + \sigma \sum_1^{n-1} \sum_1^{n-1} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_n} dy_i dy_j = \varrho U'$$

donde

$$\sigma \frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \varrho Y_i, \quad \sigma \frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_n} = \varrho Y_{ij}$$

cioè si hanno relazioni come le (2) del § 1, le quali mostrano che la U' è eguale al prodotto di un fattore finito, dipendente da tutte le variabili, per una forma nelle sole $y_1 \dots y_{n-1}$. Abbiamo dunque:

Perchè sia possibile una riduzione di Pfaff per la forma U del secondo ordine, è necessario e sufficiente che esista una trasformazione infinitesima che lasci invariata la U e di cui sieno zero l'invariante \mathcal{A} e il covariante C .

Ricordando il risultato, relativo a siffatte trasformazioni infinitesime, da noi ottenuto alla fine della Nota: *Trasformazioni infinitesime e forme ai differenziali di 2° ordine* (Rend. Acc. Lincei (5), t. XI, 1902, 2° sem., pag. 167) il precedente risultato coincide con quello ottenuto nel § 1.

È bene osservare che con questo teorema si viene a dare un significato notevole al primo membro dell'equazione (10), donde nel § 1 si ricavava la trasformazione (11) colla quale si ottiene la richiesta riduzione. Quel primo membro non è altro che la Ξ di questo paragrafo, cioè:

Per costruire la trasformazione che effettua la riduzione di Pfaff si devono cercare gli $n-1$ integrali indipendenti $y_1 \dots y_{n-1}$ della equazione $\Xi f = 0$, il cui primo membro è una trasformazione infinitesima di cui sono zero A e C , e che lascia invariata U , e indi procedere come nel teorema del § precedente.

3. Ricerchiamo ora l'estensione della cosiddetta *riduzione di Jacobi*; vogliamo cioè trovare le condizioni perchè la forma U si possa trasformare in

$$U = U_1 + d^2 \varphi = U'$$

dove U_1 non contenga la variabile y_n , e φ contenga invece tutte le variabili; insieme vogliamo trovare la più generale trasformazione che effettui questa riduzione.

È facile riconoscere che aggiungendo ad una forma un differenziale secondo esatto, i simboli (ij) , $\{ij\}$, $\{ijr\}$ restano inalterati; dunque quelli relativi ad U_1 saranno eguali a quelli relativi a U' ; ma i simboli (in) , $\{in\}$, $\{ijn\}$ relativi ad U_1 sono zero, perchè U_1 non contiene y_n , dunque lo saranno anche quelli relativi ad U' ; indicando perciò questi ultimi cogli apici, abbiamo

$$(in)' = 0, \quad \{in\}' = 0, \quad \{ijn\}' = 0$$

per tutti i valori di $i, j = 1, 2, \dots n$.

Ricordando intanto le formole di trasformazione relative a questi simboli (v. la citazione fatta al principio del § 1) si ottengono le equazioni:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (in)' &= \sum_r \sum_s (rs) \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 \\ \{in\}' &= \sum_r \sum_s \{rs\} \frac{\partial x_r}{\partial y_i} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0 \\ \{ijn\}' &= \sum_r \sum_s \{rs\} \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} + \sum_r \sum_t \sum_s \{rst\} \frac{\partial x_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_t}{\partial y_j} \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Dalla prima di queste, facendo variare i da 1 ad n , ed osservando che deve essere naturalmente diverso da zero il determinante funzionale delle x rispetto alle y , si deduce

$$(15) \quad \sum_s (rs) \frac{\partial x_s}{\partial y_n} = 0,$$

e con simile procedimento dalle seconde delle (14) si deduce

$$(16) \quad \sum_s \{r s\} \frac{\partial \tilde{x}_s}{\partial y_n} = 0$$

per cui dalle terze delle (14) si deduce infine in simil modo:

$$(17) \quad \sum_s \{r t s\} \frac{\partial \tilde{x}_s}{\partial y_n} = 0.$$

Le (15) (16) (17), di cui la matrice dei coefficienti è (giusta la notazione adoperata nelle Note succitate) la $(M') + \{M'\} + \{M'\}$, sono condizioni *necessarie* perchè sia possibile la richiesta riduzione; esse sono anche *sufficienti*. Giacchè da esse seguono le (14), e perciò anche le $((i n))' = 0$; quindi, chiamando al solito Y i coefficienti della forma trasformata, si ha

$$\frac{\partial Y_i}{\partial y_n} = \frac{\partial Y_n}{\partial y_i} = Y_{ni}$$

e ponendo

$$\int Y_n dy = \varphi, \quad Y_n = \frac{\partial \varphi}{\partial y_n},$$

si ha, integrando:

$$Y_i = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + Z_i(y_1, \dots, y_{n-1}), \quad Y_{ni} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_n},$$

e indi da

$$\{i j n\}' = 0 = \frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_n} - \frac{\partial Y_{in}}{\partial y_j} - \frac{\partial Y_{jn}}{\partial y_i} + \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y_i \partial y_j}$$

si ha infine:

$$Y_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i \partial y_j} + Z_{ij}(y_1, \dots, y_{n-1})$$

e perciò la U trasformata ha precisamente la forma richiesta.

Colle stesse considerazioni che nel § 1 si ricava pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente perchè sia possibile la riduzione alla forma $U = U_1 + d^2 \varphi$ dove U_1 non contenga la variabile y_n , è che la matrice $(M') + \{M'\} + \{M'\}$ sia zero, cioè abbia caratteristica minore di n . Soddisfatta che sia tale condizione, per ottenere una trasformazione che effettui la indicata riduzione, si scelga una soluzione $\xi_1 \dots \xi_n$ delle equazioni lineari

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_s (r s) \xi_s = 0 \\ \sum_s \{r s\} \xi_s = 0 \\ \sum_s \{r t s\} \xi_s = 0 \end{array} \right.$$

e si formi l'equazione

$$(19) \quad \Xi' f \equiv \sum_s \xi_s \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0$$

di cui si cerchino gli $n - 1$ integrali indipendenti $y_1 \dots y_{n-1}$; con una nuova e arbitraria funzione y_n , indipendente dalle precedenti, si formerà allora, nel modo solito, la richiesta trasformazione. Ogni trasformazione di tal natura dovrà potersi ottenere nel modo indicato.

Si potrebbe anche qui ritrovare questo stesso risultato, coi principî della teoria delle trasformazioni infinitesime. Ci limiteremo però solo alle seguenti considerazioni: la trasformazione infinitesima Ξ' ha il covariante C eguale a zero, perchè sottraendo le due prime delle (18) si ha

$$(20) \quad \sum_s ((s r)) \xi_s = 0$$

e il primo membro di questa non è che il coefficiente generico C_s della C .

Inoltre per la formola (8) della mia Nota citata *Trasformazioni infinitesime* etc. (Rend. Acc. Lincei, 1902, 2° sem., pag. 167) si riconosce che

$$(21) \quad \Xi' U = d^2 A,$$

cioè Ξ' è una trasformazione infinitesima che applicata sulla U la riduce al differenziale secondo esatto dell'invariante A .

Ora è evidente che la trasformazione finita ottenuta nel solito modo, indicato alla fine del teorema precedente, da una Ξ' avente queste due proprietà, effettua sempre la riduzione richiesta; in effetti da queste due proprietà possono sempre dedursi la sussistenza delle (18), ovvero delle (15), (16), (17) e quindi procedere come si è fatto di sopra. Onde:

Per l'esistenza di una trasformazione che effettui la riduzione di Jacobi estesa al second'ordine è necessario e basta che esista una trasformazione infinitesima Ξ' di cui sia zero il covariante C , mentre si abbia $\Xi' U = d^2 A$.

4. Tratteremo infine brevemente del caso in cui si voglia trasformare la U nella somma di una forma con sole $n - 1$ variabili e del differenziale primo di una forma di primo ordine:

$$(22) \quad U = U_1 + d \left(\sum_1^n Z_i dy_i \right) \equiv U'.$$

Osservando che i simboli $\{i j\}$ e $\{i j h\}$ relativi ad U_1 sono gli stessi che quelli relativi ad U' e che quelli, fra questi, nei quali l'ultimo indice è n , relativi ad U_1 , sono zero perchè U_1 non dipende da y_n , si ha:

$$(23) \quad \{i n\}' = 0 \quad , \quad \{i j n\}' = 0$$

donde, come al § 3, si deducono le equazioni (16) e (17) di cui la matrice dei coefficienti è $\{M'\} + \{M'\}$.

Le (16) e (17) sono viceversa *sufficienti* perchè la U si riduca alla forma (22); giacchè da esse si deducono le (23), e quindi, indicati al solito con Y i coefficienti di U' e posto

$$\begin{aligned} Y_i &= T_i + Z_i & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ Y_n &= Z_n \end{aligned}$$

dove le T sono delle *arbitrarie* funzioni delle sole $y_1 \dots y_{n-1}$, da $\{i n'\} = 0$ si deduce

$$Y_{ni} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_n} + \frac{\partial Z_n}{\partial y_i} \right)$$

e da $\{i j n'\} = 0$ si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{ij}}{\partial y_n} &= \frac{\partial Y_{in}}{\partial y_j} + \frac{\partial Y_{jn}}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 Y_n}{\partial y_i \partial y_j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_n} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i} \right), \end{aligned}$$

donde

$$Y_{ij} = T_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z_i}{\partial y_j} + \frac{\partial Z_j}{\partial y_i} \right)$$

dove le T_{ij} sono indipendenti da y_n ; perciò la U ha la forma (22).

Formando la trasformazione infinitesima

$$\Xi'' = \sum \xi_s \frac{\partial}{\partial x_s}$$

i cui coefficienti ξ soddisfanno alle sole equazioni

$$(24) \quad \begin{cases} \sum_s \{r s\} \xi_s = 0 \\ \sum_s \{r t s\} \xi_s = 0, \end{cases}$$

si ha evidentemente una trasformazione che applicata ad U la riduce a

$$(25) \quad \Xi'' U = d^2 A - 2 dC$$

(v. formola (8) della mia Nota citata nel § 3), e quindi, ragionando come nel § precedente, abbiamo infine il risultato:

Perchè esista una trasformazione che riduca la U alla forma (22), in cui U_1 non contenga la y_n , è necessario e basta che la matrice $\{M'\} + \{M'\}$

abbia caratteristica minore di n ; se ciò si verifica, tutte le trasformazioni della specie richiesta si ottengono cercando le soluzioni di (24), indi gli $n-1$ integrali indipendenti $y_1 \dots y_{n-1}$ di $\Xi''f=0$ e assumendo questi come nuove variabili insieme ad una nuova y_n , funzione arbitraria delle x , ma indipendente dalle altre y .

La trasformazione infinitesima Ξ'' applicata ad U la riduce a $d^2A - 2dC$, e ogni trasformazione infinitesima di tal natura risolve il problema.

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico generato da una carica elettrica in moto circolare uniforme.* Nota di G. PICCIATI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Si consideri un dielettrico indefinito impolarizzabile ed in quiete ed il campo elettromagnetico generato da una carica elettrica m in moto circolare uniforme.

Indicando le componenti della forza elettrica con X, Y, Z , e con L, M, N quelle della forza magnetica esse debbono esser soluzioni del sistema

$$(I) \quad \begin{cases} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}; \end{cases} \quad (II) \quad \begin{cases} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dx}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{cases}$$

e delle due

$$(III) \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \quad (IV) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

essendo A l'inversa della velocità della luce nell'etere. L e X, Y, \dots, N soluzioni del sistema (I), \dots , (IV) debbono presentare una singolarità (variabile con t) nel punto occupato dalla carica, ed esser nulle all'infinito come $\frac{1}{r^2}$ almeno ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). La determinazione diretta di questi

integrali non si presenta nè facile, nè agevole; invece si perviene immediatamente alle loro espressioni facendo uso dei potenziali ritardati, ed applicando un metodo generale dato dal prof. Levi-Civita (¹), il quale permette di determinare in ogni caso il campo elettromagnetico dovuto al moto di

(¹) *Sur le champ électromagnétique etc.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, sér. III, t. IV, 1902.

una carica unica. Oltre potere assegnare le componenti delle forze elettromagnetiche del campo in questione si ha in questo modo anche il vantaggio di poter pervenire alla determinazione del campo elettromagnetico generato dalla carica quando essa si muove parallelamente ad un piano conduttore indefinito; ciò che mi riservo di esporre in una prossima Nota. In vista di ciò, ho qui riportate alcune formule che esprimono, sotto diverse forme, proprietà analitiche delle funzioni definienti il campo. Di queste formule non avrei però avuto bisogno per trattare col metodo indicato il problema più semplice della carica ruotante senza schermo conduttore.

Scelto per piano xy quello in cui avviene la ruotazione della carica, siano $Oxyz$ una terna di assi fissi, essendo O la posizione iniziale della carica, la ruotazione avendo luogo nel senso \widehat{xy} con la velocità angolare ω . Le coordinate φ, ψ del punto Ω dove si trova la carica sono, essendo R il raggio della circonferenza da essa descritta,

$$\varphi = R(1 - \cos \omega t) \quad , \quad \psi = -R \sin \omega t.$$

Si possono assegnare senz'altro le espressioni del potenziale elettrostatico ritardato F e quelle delle componenti U, V, W , secondo gli assi xyz , del potenziale vettore ritardato, mediante le quali si hanno le componenti delle forze elettromagnetiche. Si indichi con r la distanza del punto (xyz) , che si considera, dal punto Ω' , che è la posizione occupata nell'istante $t - Ar$ dalla carica che occupa all'istante t la posizione Ω , e sia v la velocità della carica nella posizione Ω' . Essendo allora r definito in funzione di x, y, z, t dall'equazione

$$(1) \quad r^2 = [x - R + R \cos \omega(t - Ar)]^2 + [y + R \sin \omega(t - Ar)]^2 + z^2$$

ed essendo le componenti della velocità della carica in Ω' date da $\overline{\frac{d\varphi}{dt}}, \overline{\frac{d\psi}{dt}}$,

o (il tratto sovrapposto indicando il mutamento di t in $t - Ar$) le espressioni dei potenziali ritardati sono le seguenti ⁽¹⁾

$$F = \frac{m}{r[1 - Av \cos v r]},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = A \overline{\frac{d\varphi}{dt}} \cdot F, \\ V = A \overline{\frac{d\psi}{dt}} \cdot F, \\ W = 0, \end{array} \right.$$

(¹) Vedi Mem. cit., pag. 19.

nelle quali si suppone $Av < 1$, cioè che la velocità della carica resti sempre inferiore a quella della luce, ed inoltre per direzione positiva di r è presa quella da Ω' al punto $(x y z)$ che si considera. Essendo ora

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = R\omega \sin \omega(t - Ar) \quad , \quad \frac{d\overline{\psi}}{dt} = -R\omega \cos \omega(t - Ar)$$

posto $A\omega = a$, si ha

$$r[1 - Av \cos v r] = r + aR \{ y \cos \omega(t - Ar) - (x - R) \sin \omega(t - Ar) \},$$

quindi le espressioni dei potenziali ritardati divengono:

$$(2) \quad F = \frac{m}{r + aR \{ y \cos \omega(t - Ar) - (x - R) \sin \omega(t - Ar) \}}$$

$$(3) \quad \begin{cases} U = aR \sin \omega(t - Ar) \cdot F, \\ V = -aR \cos \omega(t - Ar) \cdot F, \\ W = 0. \end{cases}$$

Questi potenziali soddisfanno all'equazione

$$(4) \quad \square f = \Delta_2 f - A^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

e sono legati fra loro dalla relazione

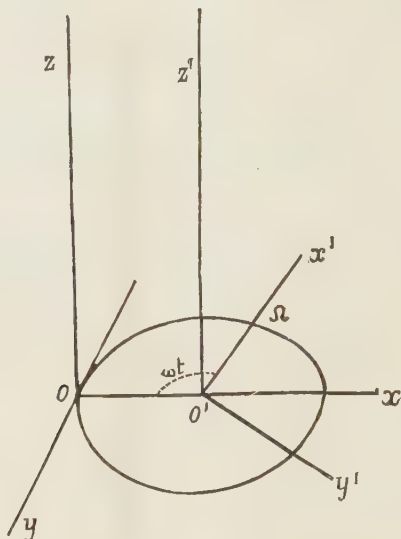
$$(5) \quad A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} = 0.$$

Le espressioni esplicite delle forze elettromagnetiche del campo che si considera, relative agli assi fissi xyz , e soddisfacenti al sistema di equazioni (I), ..., (IV), sono quindi le seguenti:

$$(6) \quad \begin{cases} X = -\frac{dF}{dx} - A \frac{dU}{dt}, \\ Y = -\frac{dF}{dy} - A \frac{dV}{dt}, \\ Z = -\frac{dF}{dz}; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} L = \frac{dV}{dz}, \\ M = -\frac{dU}{dz}, \\ N = \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}. \end{cases}$$

Scegliamo ora un sistema di assi mobili invariabilmente legati alla carica m , cioè il sistema $O' x' y' z'$ avente l'origine nel centro della circonferenza descritta dalla carica, per piano $z' = 0$ il piano $z = 0$, le coordinate di m essendo $R, 0, 0$. Riferendoci nel piano $z' = 0$ alle coordinate ϱ, θ



abbiamo fra le coordinate di uno stesso punto rispetto ai due sistemi di assi le relazioni:

$$(8) \quad \begin{cases} x = R - \varrho \cos(\theta + \omega t), \\ y = -\varrho \sin(\theta + \omega t), \\ z = z', \end{cases}$$

da cui si deducono le altre

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dx} &= -\cos(\theta + \omega t) \frac{d}{d\varrho} + \frac{\sin(\theta + \omega t)}{\varrho} \frac{d}{d\theta}, \\ \frac{d}{dy} &= -\sin(\theta + \omega t) \frac{d}{d\varrho} - \frac{\cos(\theta + \omega t)}{\varrho} \frac{d}{d\theta}, \\ \frac{d}{dz} &= \frac{d}{dz'}, \\ A \frac{d}{dt} &= A \frac{d}{dt} - a \frac{d}{d\theta}. \end{aligned} \right.$$

Indichiamo con H, K, Z' le componenti della forza elettrica secondo le linee $\theta = \text{cost}$, $\varrho = \text{cost}$ e l'asse z' e con E, G, N' quelle della forza magnetica; esse non dipenderanno esplicitamente dal tempo, il fenomeno

essendo stazionario rispetto agli assi mobili scelti. Avendosi ora

$$(10) \quad \begin{cases} X = -H \cos(\theta + \omega t) + K \sin(\theta + \omega t), \\ Y = -H \sin(\theta + \omega t) - K \cos(\theta + \omega t), \\ Z = Z'; \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} L = -E \cos(\theta + \omega t) + G \sin(\theta + \omega t), \\ M = -E \sin(\theta + \omega t) + G \cos(\theta + \omega t), \\ N = N', \end{cases}$$

il sistema (I), ..., (IV), trasformato nelle nuove variabili, diviene

$$(I) \quad \begin{cases} -a \frac{dH}{d\theta} = \frac{dG}{dz'} - \frac{1}{\varrho} \frac{dN'}{d\theta}, \\ -a \frac{dK}{d\theta} = \frac{dN'}{d\varrho} - \frac{dE}{dz'}, \\ -a \frac{dZ'}{d\theta} = -\frac{dG}{d\theta} + \frac{1}{\varrho} \frac{dE}{d\varrho} - \frac{G}{\varrho}; \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} -a \frac{dE}{d\theta} = \frac{1}{\varrho} \frac{dZ'}{d\theta} - \frac{dK}{dz'}, \\ -a \frac{dG}{d\theta} = \frac{dH}{dz'} - \frac{dZ'}{d\varrho}, \\ -a \frac{dN'}{d\theta} = \frac{dK}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{dH}{d\theta} + \frac{K}{\varrho}, \end{cases}$$

$$(III)' \quad \frac{1}{\varrho} \frac{dK}{d\theta} + \frac{dH}{d\varrho} + \frac{H}{\varrho} + \frac{dZ'}{dz'} = 0$$

$$(IV)' \quad \frac{1}{\varrho} \frac{dG}{d\theta} + \frac{dE}{d\varrho} + \frac{E}{\varrho} + \frac{dN'}{dz'} = 0.$$

Le espressioni delle forze elettromagnetiche in funzione delle nuove variabili si ottengono in forma semplice mediante il potenziale elettrostatico F e le componenti del potenziale vettore ritardato secondo le linee $\theta = \text{cost}$, $\varrho = \text{cost}$ che indicheremo con λ, μ . Si ha intanto dalla (1)

$$(12) \quad r^2 = \varrho^2 + R^2 + z'^2 - 2R\varrho \cos(\theta + ar),$$

e quindi si ha per F, λ, μ

$$(13) \quad F = \frac{m}{r - aR\varrho \sin(\theta + ar)},$$

$$(14) \quad \begin{cases} U = -\lambda \cos(\theta + \omega t) + \mu \sin(\theta + \omega t), \\ V = -\lambda \sin(\theta + \omega t) - \mu \cos(\theta + \omega t), \end{cases}$$

da cui

$$(15) \quad \begin{aligned} \lambda &= aRF \sin(\theta + ar), \\ \mu &= aRF \cos(\theta + ar). \end{aligned}$$

Questi potenziali debbono soddisfare a certe condizioni che si riducono in questo caso alle seguenti: la F deve soddisfare all'equazione

$$(16) \quad \square F = \mathcal{A}_2 F - a^2 \frac{d^2 F}{d\theta^2} = 0,$$

e le funzioni λ e μ alle altre.

$$(17) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_2 \lambda - a^2 \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} - \frac{\lambda}{\varrho^2} = \frac{2}{\varrho^2} \frac{d\mu}{d\theta}, \\ \mathcal{A}_2 \mu - a^2 \frac{d^2 \mu}{d\theta^2} - \frac{\mu}{\varrho^2} = -\frac{2}{\varrho^2} \frac{d\lambda}{d\theta}, \end{cases}$$

essendo inoltre legate fra loro dall'equazione:

$$(18) \quad -a \frac{dF}{d\theta} + \frac{d\lambda}{d\varrho} + \frac{\lambda}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu}{d\theta} = 0.$$

I valori di F, λ, μ sopra dati sodisfacendo a queste condizioni le espressioni esplicite delle forze elettromagnetiche, dedotte dalle (6), (7) sono

$$(19) \quad \begin{cases} H = -\frac{dF}{d\varrho} + a \frac{d\lambda}{d\theta}, \\ K = -\frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\theta} + a \frac{d\mu}{d\theta}, \\ Z' = -\frac{dF}{dz'}. \end{cases}$$

$$(20) \quad \begin{cases} L = \frac{d\mu}{dz'}, \\ M = -\frac{d\lambda}{dz'}, \\ N' = \frac{1}{\varrho} \frac{d\lambda}{d\theta} - \frac{d\mu}{d\varrho} - \frac{\mu}{\varrho}. \end{cases}$$

Essendo $a = A\omega$ generalmente un numero piccolissimo del quale si possono trascurare le potenze superiori alla prima, è facile dedurre quali sono allora le espressioni delle forze elettromagnetiche. Infatti si ha allora dalla (12)

$$r^2 = \varrho^2 + z'^2 + R^2 - 2 R \varrho \cos \theta + 2 a R \varrho r \sin \theta$$

quindi anche

$$r - a R \varrho \sin \theta = \sqrt{\varrho^2 + z'^2 + R^2 - 2 R \varrho \cos \theta},$$

e per i potenziali

$$\begin{aligned} F &= \frac{m}{\sqrt{\varrho^2 + z'^2 + R^2 - 2 R \varrho \cos \theta}}, \\ \lambda &= a R F \sin \theta, \\ \mu &= a R F \cos \theta. \end{aligned}$$

Dalle (19) e (20) si ha per le forze elettromagnetiche

$$(19)' \quad \left\{ \begin{array}{l} H = -\frac{dF}{d\rho}, \\ K = -\frac{1}{\rho} \frac{dF}{d\theta}, \\ Z' = -\frac{dF}{dz'}; \end{array} \right.$$

$$(20)' \quad \left\{ \begin{array}{l} E = aR \cos \theta \cdot \frac{dF}{dz'} = -aR \cos \theta \cdot Z', \\ G = -aR \sin \theta \cdot \frac{dF}{dz'} = aR \sin \theta \cdot Z', \\ N' = -\frac{maR(R - \rho \cos \theta)}{(1/\rho^2 + z'^2 + R^2 - 2R\rho \cos \theta)^3} = aR(H \cos \theta - K \sin \theta). \end{array} \right.$$

Essendo $\sqrt{1/\rho^2 + z'^2 + R^2 - 2R\rho \cos \theta}$ la distanza del punto che si considera dalla carica, si riconosce subito che la forza elettrica prodotta dalla carica in moto con velocità assai piccola è sensibilmente la stessa come se la carica non si muovesse ⁽¹⁾. Se si considerano infatti le componenti delle forze elettromagnetiche rispetto agli assi $O' x' y' z'$, si ottiene

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} X' = H \cos \theta - K \sin \theta = -\frac{dF}{dx'}, \\ Y' = H \sin \theta + K \cos \theta = -\frac{dF}{dy'}, \\ Z' = -\frac{dF}{dz'}; \end{array} \right.$$

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} L' = E \cos \theta - G \sin \theta = -aRZ', \\ M' = E \sin \theta + G \cos \theta = 0, \\ N' = aR(H \cos \theta - K \sin \theta) = aRX'. \end{array} \right.$$

Si riconosce così che la forza magnetica è parallela al piano $x' z'$ in cui si trova la carica, è proporzionale alla proiezione della forza elettrica per questo piano, ed è diretta normalmente ad essa, essendo poi, rispetto alla traiettoria descritta dalla carica mobile, diretta secondo la regola di Ampère.

(1) Questo vale in generale per il campo generato da una carica elettrica in moto vario qualunque ma con velocità assai piccola; ciò che si deduce facilmente dalla Memoria citata del Levi-Civita, e fu già anche osservato dal prof. Righi: *Sui campi elettromagnetici* ecc. V. N. Cimento, serie V, tomo II, agosto 1901.

Matematica. — *Di un gruppo continuo di trasformazioni.*
Nota del prof. G. FRATTINI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Composizione ottica dei movimenti vibratorii di tre o più suoni.* Nota del dott. GIULIO ZAMBIASI, presentata dal Socio BLASERNA.

In una mia Memoria che si sta pubblicando nella « Rivista Musicale Italiana » di Torino, col titolo: *Le figure di Lissajous nell'estetica dei suoni*; oltre i risultati di varie esperienze intorno alle figure di Lissajous di due suoni, si contiene quello della prima prova da me fatta per produrre figure analoghe di tre suoni.

L'esito felice di questo tentativo, apre la via a nuove ricerche in un campo inesplorato. Perciò credo opportuno esporre il metodo seguito, e le applicazioni che ho intenzione di fare.

Modo di sperimentare. — In sostanza ho seguito il metodo di Terquem, che consiste nel progettare le figure di Lissajous ottenute con due coristi, dei quali uno porta alla sua estremità una lamina d'alluminio con piccolissimo forellino, l'altro un obiettivo da microscopio. I coristi sono collocati in modo che l'obiettivo proietta sopra uno schermo l'immagine del forellino fortemente illuminato con un fascio di luce solare, e le loro vibrazioni hanno direzioni rispettivamente perpendicolari.

L'intenzione mia era di sostituire alle vibrazioni del diapason, quelle di qualunque suono propagantesi nell'aria; quindi ho adattato, in luogo del corista portante il forellino, il Fonautografo di Scott, convenientemente modificato e semplificato.

È noto che alla membrana del Fonautografo si suole applicare, o uno stile (setola), nel metodo grafico, o uno specchietto, nel metodo ottico, per ottenere le sinusoidi delle voci o dei suoni d'istrumenti. Tanto lo stile quanto lo specchietto sono obbligati ad un asse di rotazione, e per mezzo d'una leva il cui braccio appoggia sul centro della membrana, ricevono gli impulsi della membrana stessa vibrante. È chiaro che così si ottiene la componente perpendicolare all'asse di rotazione, ossia al diametro della membrana parallelo a quell'asse.

Considerando che, per la omogeneità della membrana, per la sua forma circolare, e per la tensione uniforme, è indifferente disporre l'asse di rota-

zione secondo qualunque diametro; ho pensato di sopprimerlo addirittura, e in luogo di servirmi d'una componente qualunque delle vibrazioni, usare, qual'è, il moto del centro.

A questo scopo ho fissato, avvitandola strettamente, un'asticella d'alluminio al centro della membrana, perpendicolare ad essa. L'asticella termina in una laminetta d'alluminio con un forellino. Il forellino ben illuminato si può guardare direttamente con un canocchiale, ovvero se ne può proiettare l'immagine, sia per osservare le sue vibrazioni, sia per comporle, come nel metodo di Terquem, colle vibrazioni d'un corista o comparatore ottico.

Il vantaggio di questo metodo sta in ciò, che non solo si può con esso avere l'immagine ottica della vibrazione d'un suono qualunque propagantesi nell'aria, e paragonarla, come insegnò Lissajous, con quella d'un comparatore; ma si può avere la risultante d'un numero indefinito di suoni propagantisi, e comporla con quella d'un diapason che serve e di analisi e di sintesi delle combinazioni sonore, prodotte non nella forma prefissa usata nel gabinetto del fisico, ma in quella propria dell'arte; come ognuno potrà giudicare dalle applicazioni seguenti.

Composizione parallela dei movimenti vibratorii di più suoni. — Innanzi tutto importava constatare la forma del movimento del forellino; perchè da essa dipende la bontà del metodo. Suonando innanzi al Fonautografo una, o due o più canne d'organo, potei ottenere *una immagine rettilinea, sia di una, sia della risultante di più vibrazioni.*

Precisamente il forellino oscilla sulla retta che passa pel centro della membrana perpendicolarmente ad essa, alle seguenti condizioni: *a)* che la posizione iniziale del forellino sia sull'asse della membrana; *b)* che la tensione della membrana sia uniforme in tutti i suoi punti; *c)* che l'asticella, e la laminetta non abbiano oscillazione propria od altro movimento irregolare. A ciò si provvede procurando che l'asta sia rigida, leggiera e rigidamente legata alla membrana per poter rispondere a tutti i movimenti.

Siccome poi la membrana ha un suono proprio per ogni grado di tensione; così è chiaro che si ottiene un massimo di ampiezza di vibrazione d'un suono, quando la membrana è intonata coll'istrumento.

Nel caso di due suoni si può tuttavia ottenere eguale ampiezza di vibrazione per ognuno di essi, dando alla membrana una tensione o tono medio, e disponendo le canne a diversa distanza secondo il grado d'intensità degli stessi suoni.

Per verificare e constatare sperimentalmente la forma rettilinea del movimento centrale della membrana, ho fatto uso del microscopio solare, come apparecchio di proiezione, collocando il Fonautografo in modo che il forellino vibrasse nel campo fortemente illuminato, ove si pongono gli oggetti microscopici da proiettare. In luogo dello schermo posi un telajo, lungo il quale faceva scorrere una lastra sensibile in direzione perpendicolare alla vibra-

zione del forellino. Il raggio luminoso passando per un finestrino praticato nella parete del telaio descrive sulla lastra fotografica la traccia de' suoi movimenti.

Componendo diverse canne due a due, ottenni le tracce caratteristiche degli intervalli come si ottengono col metodo grafico di Lissajous et Desains.

L'importanza incontestabile di questa esperienza sta in ciò che si possono ottenere con eguale facilità le tracce della composizione parallela delle possibili combinazioni di suoni due a due, tre a tre, quattro a quattro, ecc. e quindi degli accordi musicali. Eccone un saggio nella fig. 1:

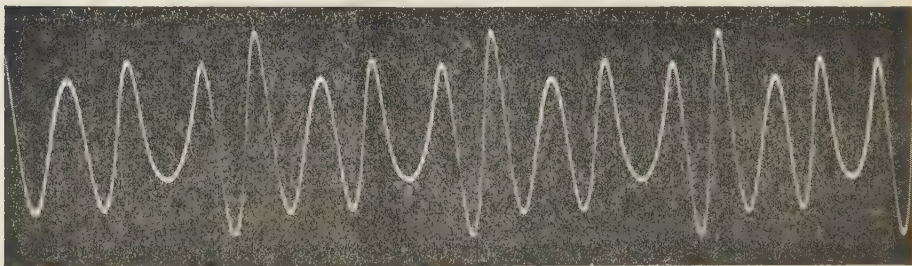


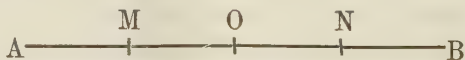
FIG. 1.

Composizione parallela delle vibrazioni di tre suoni prodotti contro tre canne d'organo:
 $Do_2 : Mi_2 : Sol_2$.

Come caso particolare sarà utile fare la sintesi de' suoni della serie armonica, e formare varî tipi di sinusoidi utili per lo studio dei timbri.

Anche la prova che ho fatto per ottenere una sinusoida d'una sola canna d'organo, per sottoporla all'analisi della macchina integratrice; diede un risultato insperato, tanto per la nitidezza e finezza della immagine, quanto per l'ampiezza della vibrazione.

Intonazione di due canne d'organo col metodo ottico di precisione.
— Dimostrato che la membrana del Fonautografo animata da più suoni, fornisce la risultante della composizione parallela delle loro vibrazioni; ne viene che si può intonare due strumenti direttamente, senza comparatore ottico; allo stesso modo come due diapason che vibrano parallelamente. La immagine rettilinea della vibrazione composta AB,



non è omogenea in tutto il tratto; ma presenta un certo numero di punti più luminosi (punti d'arresto di vibrazioni) in vario numero secondo il grado di semplicità del rapporto dei due suoni. Se il rapporto è semplice e preciso, i due punti M ed N sono fissi; se l'intervallo si altera, oscillano,

ciascuno nel suo campo OA od OB; e più veloci quanto più si altera il rapporto. Ogni oscillazione intera segna un battimento e quindi una vibrazione in più o in meno, così come una rotazione della figura di Lissajous.

Composizione perpendicolare delle vibrazioni d'un diapason, colla risultante della composizione parallela di due o più suoni. — All'obiettivo immobile del microscopio solare da proiezione, ho sostituito l'obiettivo, pure da microscopio, fissato all'estremità del corista del comparatore ottico di Lissajous, disponendo il corista in modo che vibrasse perpendicolarmente e alla vibrazione del forellino e al raggio luminoso. Combinando i suoni come nella prima esperienza ed eccitando contemporaneamente il corista, ottenni non solo le figure di due suoni, come Lissajous; ma di tre, quattro,... e le rispettive tracce.

Soltanto, per coglierle fotograficamente, ho cambiato disposizione all'apparecchio. Presi la fotografia della traccia, collocando il telaio in modo che la direzione del movimento della lastra sensibile, fosse parallela alla bisettrice dell'angolo retto delle due vibrazioni. Fotografai le figure fisse collocando la camera fotografica senza obiettivo, così che servisse da obiettivo quello del diapason comparatore; e operando incirca come nelle istantanee, ma regolando, secondo le circostanze, la posa con un opportuno otturatore. Anche di questa composizione offro un esempio nella fig. 2.

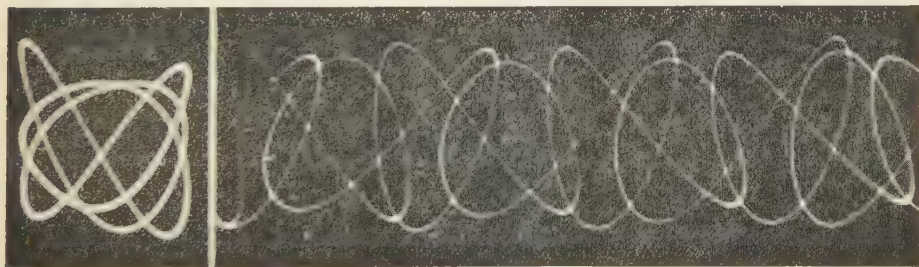


FIG. 2.

Figura e traccia di quattro suoni.

Composizione perpendicolare delle vibrazioni d'un corista Sol₁ colla risultante parallela dei tre suoni: Do₂:Mi₂:Sol₂.

Siccome confrontando uno ad uno i suoni con quello del corista comparatore si ottengono le figure di Lissajous dei rispettivi intervalli; così le figure risultanti dal confronto di più suoni simultanei con quello del corista, si possono considerare come figure composte di tante figure di Lissajous quanti sono i suoni componenti formanti intervallo con esso.

Le figure, quindi, composte di tre o quattro ... suoni hanno, rispetto

all'accordo musicale da essi formato, la stessa relazione che le figure di Lissajous hanno cogli intervalli di due suoni. I risultati ottenuti bastano a dimostrare che come le figure di Lissajous servono all'analisi e sintesi e classificazione degli intervalli musicali, alla teoria della semplicità dei rapporti, e delle approssimazioni nell'apprezzamento degli intervalli [come ho tentato di dimostrare nel lavoro sopra citato]; così le figure delle combinazioni di più suoni servono ad uno studio parallelo e comparativo tra i fenomeni ottici e le sensazioni o fenomeni musicali, che produce una combinazione di tre o più suoni. Tutto ciò fa sperare al fisico di poter investigare cogli apparecchi della scienza sperimentale, tutto il campo dell'*armonia musicale*, e separare ciò che vi è di oggettivo da ciò che è soggettivo in questo ramo della musica; cioè vedere che cosa si debba attribuire alla natura, e che cosa all'arte.

Finalmente accenno ad un caso di combinazione di suoni, la cui figura ha il carattere di *figura di transizione*. Il caso avviene quando le vibrazioni dei suoni componenti hanno ampiezza notevolmente diversa: per esempio componendo i due suoni: $Do_2 : Sol_1$ col comparatore Do_1 , se le vibrazioni hanno ampiezze uguali o poco diverse si ottiene una figura composta dell'accordo $Do_2 : Sol_1 : Do_1$; ma se il Do_2 s'affievolisce, man mano che la vibrazione impiccolisce, si vede apparire la figura della quinta: $Sol_1 : Do_1$; e lungo la traccia della stessa appare la piccola figura dell'ottava $Do_1 : Do_2$ che la percorre più o meno lentamente nel caso che l'intonazione non sia precisa. La seguente fig. 3 ha la fisionomia della figura della quinta $Do_2 : Fa_1$; ma la sua traccia è intessuta di due altre figure proprie dei rapporti: $Mi_3 : Fa_1$ e $Sol_3 : Fa_1$.

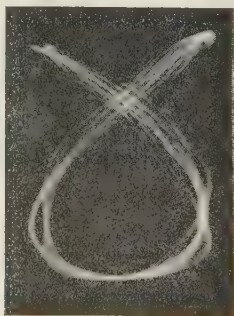


FIG. 3.

Figura di transizione di quattro suoni:

1°. Corista Fa_1 . 2°. Canna d'organo Do_2 con grande vibrazione. 3° e 4° Due Canne: $Mi_3 : Sol_3$ con piccole vibrazioni.

All'occhio quindi sembra che un suono che ha vibrazione relativamente piccola, assuma una importanza secondaria o decorativa rispetto agli altri.

Questo fenomeno segna il passaggio dagli accordi, ai timbri musicali: infatti gli armonici naturali degli istrumenti e gli artificiali negli organi a ripieno, intanto costituiscono il timbro o colore dei suoni principali in quanto la loro intensità relativa è piccola assai; infatti avviene in certi istrumenti, come le canne d'organo, che quando l'intensità del primo armonico eguaglia quella del fondamentale, lo si percepisce come suono distinto formante accordo musicale. Questa esperienza può servire di criterio nella misura della *intensità relativa* de' suoni musicali, importante nell'arte come mezzo d'espressione e colorito.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite a Corleto nell'estate del 1898.* Nota di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio BLASERNA.

Nell'estate del 1898, trovandomi in campagna a Corleto⁽¹⁾ ho fatto coll'attinometro Violle alcune determinazioni pireliometriche, che credo utile pubblicare perchè se non altro, danno l'idea della quantità di calore che in belle giornate viene irradiato dal sole sulla fertile campagna modenese.

L'attinometro Violle del quale mi servii è di proprietà della R. Stazione Agraria di Modena, e porta la marca *E. Ducretet à Paris*. Il diametro della sfera esterna è di centimetri 27,8 e quello della sfera interna è di centim. 19,3.

Lo schermaglio del tubo di entrata dei raggi solari, porta cinque fori che hanno rispettivamente i seguenti diametri in centimetri.

1,599	1,372	1,122	0,816	0,426
-------	-------	-------	-------	-------

Per assicurarmi dell'orientazione del tubo di entrata dei raggi solari, ho fatto prolungare il tubo dell'apparecchio di altri quattordici centimetri, e tanto alla bocca che alla fine di questo prolungamento sta saldato perpendicolarmente al tubo e coassiale con questo, un disco, con foro di diametro uguale al diametro esterno del tubo e col diametro maggiore di 65 millimetri. Nel disco verso la bocca stanno praticati tre forellini alla distanza di 90° l'uno dall'altro e corrispondentemente sul secondo disco si trovano tre punti di riferimento, per modo che quando le tre immagini del sole prodotte attraverso ai tre forellini vengono a battere sui tre punti segnati, l'apparecchio è disposto così che i raggi solari percorrono il tubo parallelamente al suo asse, e battono direttamente sul serbatoio del termometro quando dalla bocca del

(1) Villa distante circa sette chilometri dal centro della città di Modena; posta verso sud-ovest della città stessa. È alla latitudine 44° 36' ed è ad est del meridiano di Greenwich di 10° 51'. Il luogo delle osservazioni era a 58 metri sul livello del mare.

tubo si toglie un apposito schermaglio formato da due lamine parallele di alluminio distanti fra di loro otto millimetri.

Basta fare un po' di pratica per riuscire a tenere a lungo orientato l'apparecchio, senza cambiare (come hanno fatto altri) il sistema di supporto adottato primitivamente dal Violle.

Allo strumento stanno uniti due termometri attinometri, della forma consigliata dal Violle, e su tutti e due sta segnato il n. 289. È possibile però distinguere un termometro dall'altro, poichè uno ha il serbatoio sferico con diametro di cent. 1,521 e l'altro con diametro di cent. 1,416. Inoltre il primo ha la graduazione da -20° a $+70^{\circ}$ ed il secondo da -20° a $+72^{\circ}$.

Il serbatoio del primo termometro venne coperto prima da un leggerissimo strato d'argento, sul quale si fece depositare elettroliticamente un altro leggerissimo strato di rame; e su questo si fece deporre (pure elettroliticamente) un terzo strato di nero di platino. Su questo strato di nero di platino si è poi fatto deporre uno strato di nero fumo, affumicando il serbatoio del termometro con adatta fiamma.

Si è studiata accuratamente la graduazione dei due termometri fra 0° e 45° , confrontandoli con un termometro campione (1). La graduazione tracciata dal Ducretet sui due termometri non offre irregolarità tali da doverne tenere calcolo nelle osservazioni che si fanno coll'attinometro Violle.

L'equivalente in acqua del serbatoio dei due termometri l'ho dedotto sperimentalmente, valendomi di un piccolo calorimetro di platino e servendomi di mercurio come liquido calorimetrico.

Per il primo termometro il valore trovato espresso in piccole calorie è $c = 0,8901$ (media di nove misure).

Per il serbatoio del secondo termometro ottenni in media $c = 0,7231$.

Per questo secondo termometro, il compianto prof. A. Bartoli aveva trovato $c = 0,712$, e quindi ho ritenuto conveniente adottare per c il valore medio 0,718.

Il metodo di osservazione seguito è stato quello suggerito dal Chwolson, del quale ho detto in altro mio lavoro (2). L'intercapedine dell'involucro sferico venne mantenuta piena d'acqua a temperatura costante, durante i dieci minuti circa che esige una osservazione completa. Per la collocazione opportuna del serbatoio del termometro, ho munito lo strumento di una guida uguale a quella accennata nel lavoro suindicato.

(1) È un termometro Baudin, di vetro duro, diviso in decimi di grado e va da $-2^{\circ},5$ a $+53^{\circ},0$ e da $97^{\circ},5$ a $102^{\circ},5$. Porta il n. 14684, ed è stato esaminato all'Ufficio internazionale dei pesi e misure di Parigi.

(2) *Misure pireliometriche fatte sul Monte Cimone nell'estate del 1901.* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XI, serie 5^a, pagg. 479-486 e 539-541).

In quest'ultima formola θ_1 è l'innalzamento di temperatura che segna il termometro dopo un minuto di soleggiamento, e θ_3 l'innalzamento corrispettivo dopo tre minuti di soleggiamento.

I risultati delle misure erano già stati calcolati da tempo, ma non mi decideva a pubblicarli, dubitando sempre che i risultati che si deducono dalle osservazioni che si fanno coll'attinometro Violle siano inferiori al vero, per le ragioni che esposi nel suesposto lavoro.

Appena potei ricevere il pireliometro assoluto dell'Ångström, mi affrettai a confrontare con questo l'attinometro di Violle, e dedussi i coefficienti di riduzione dei risultati, che si ottennero coll'attinometro Violle, ai valori assoluti.

Indicando con Q i risultati ottenuti col pireliometro di Ångström e con q quelli ottenuti coll'attinometro di Violle, ottenni i seguenti coefficienti di riduzione $\frac{Q}{q}$:

Col termometro a serbatoio più grosso e coll'apertura con diametro

$$\frac{Q}{q} = \begin{array}{ccc} 1,599 & 1,372 & 1,122 \\ 1,111 & 1,086 & 1,061 \end{array}$$

Col termometro a serbatoio più piccolo e coll'apertura con diametro

$$\frac{Q}{q} = \begin{array}{cc} 1,372 & 1,122 \\ 1,108 & 1,074 \end{array}$$

Per dare un'idea del processo che ho tenuto per dedurre questi coefficienti, riporto nella seguente tabella le misure fatte all'osservatorio Geofisico di Modena nei mesi di novembre e dicembre 1901 e di gennaio e marzo 1902, per ottenere il coefficiente corrispondente all'apertura con diametro 1,122 facendo uso del termometro a serbatoio più grosso.

Ricorderò le relazioni che servono per calcolare la quantità q di calore che si dovrebbe ritenere inviata in un minuto dal sole sul serbatoio termometrico, qualora l'attinometro di Violle fosse un istrumento perfetto ⁽²⁾.

Chiamando c l'equivalente in acqua del serbatoio termometrico ed s la superficie del foro dello schermaglio, oppure la quarta parte della superficie sferica del serbatoio, quando il foro sia così largo che una semisfera del serbatoio sia completamente soleggiata, si ha

$$q = \frac{c}{s} m \theta$$

nella quale

$$\theta = \theta_1 + \frac{\theta_3 - \theta_1}{1 - e^{-2m}}$$

⁽¹⁾ Misure pireliometriche fatte sul monte Cimone nell'estate del 1901, ecc.

Il valore di m si deduce dalla nota relazione

$$\theta_1 = \theta_3 e^{-m\tau}$$

quando si conosca il tempo τ in minuti che impiega il termometro (dopo rimesso lo schermaglio sulla bocca dell'attinometro) per passare, in seguito a raffreddamento, da θ_3 a θ_1 .

Per la stima del tempo mi servì il cronometro Crisp n. 2919.

La tabella seguente, nella quale Q dinota i risultati ottenuti col pireliometro Ångström, contiene i dati di osservazione dell'attinometro Violle ed i rispettivi valori del coefficiente $\frac{Q}{q}$.

TABELLA A.

Giorno	Ora	t	t_1	t_3	θ_1	θ_3	τ	$\log q$	$\log Q$	$\frac{Q}{q}$
2 novembre	12, 0	8,75	9,80	11,58	1,05	2,83	7,5	0,0155	0,0367	1,050
3 "	12, 0	8,60	9,75	11,50	1,15	2,90	7,2	0,0110	0,0412	1,072
4 "	12, 0	7,90	9,00	10,80	1,10	2,90	7,9	0,0154	0,0525	1,089
5 "	12, 0	8,40	9,42	11,15	1,02	2,75	8,5	9,9912	0,0245	1,080
6 "	12, 0	8,60	9,45	11,15	0,85	2,55	8,9	9,9812	0,0114	1,072
1 dicembre	12, 5	10,40	11,35	13,25	0,95	2,85	8,1	0,0384	0,0575	1,045
2 "	12, 6	10,80	11,60	13,05	0,80	2,25	6,8	9,9377	9,9624	1,059
3 "	12, 6	11,05	11,90	13,40	0,85	2,35	7,2	9,9463	9,9695	1,054
7 "	12, 8	10,50	11,45	13,20	0,95	2,70	7,1	0,0052	0,0403	1,084
1 gennaio	12,20	9,35	10,30	12,00	0,95	2,65	7,0	0,0034	0,0177	1,034
4 "	12,21	9,60	10,30	11,55	0,70	1,95	6,9	9,8711	9,9006	1,070
7 "	12,23	10,45	11,60	13,55	1,15	3,10	7,0	0,0627	0,0767	1,033
9 "	12,24	10,35	11,30	13,15	0,95	2,80	9,6	0,0114	0,0268	1,036
11 "	12,24	10,75	11,55	13,00	0,80	2,25	7,2	9,9317	9,9604	1,069
2 marzo	12,29	13,18	14,30	16,20	1,12	3,02	7,6	0,0427	0,0733	1,073

In media quindi $\frac{Q}{q} = 1,061$.

Nella seguente tavola stanno riuniti i risultati delle misure pireliometriche fatte a Corleto nei mesi di agosto e settembre del 1898. L'ora è espressa in tempo medio dell'Europa centrale; $h\gamma$ indica l'altezza del sole al momento dell'osservazione; B esprime la pressione atmosferica (diminuita di 700 millimetri); t la temperatura dell'aria; f la forza elastica del vapore acqueo ed u l'umidità relativa dell'atmosfera.

Per indicare il foro di diametro maggiore dello schermaglio si è usato l'indice I, per il successivo II e per il terzo III.

La colonna intestata q contiene i risultati ottenuti direttamente coll'attinometro Violle, e quella intestata Q i risultati ridotti al pireliometro di Ångström.

Lo stato del cielo in prossimità del disco solare si osservò mediante adatti vetri colorati.

TABELLA B.

Giorno	Ora	<i>h</i>	Termo- metro	Foto	<i>q</i>	<i>Q</i>	<i>B</i>	<i>t</i>	<i>f</i>	<i>u</i>	Note
3 agosto	^{h m o} 11, 2	58,2	289 pic.	II	1,069	1,185	58,9	26,0	12,0	41	Veli intorno al ☉
"	11,59	62,5	"	III	1,094	1,175	58,7	26,2	11,8	39	Id.
6 "	11, 6	58,2	289 gr.	I	1,228	1,364	58,0	28,1	9,8	33	Sereno; ☉ netto
"	13,52	55,7	"	I	1,258	1,397	58,6	28,6	10,1	34	Id.
7 "	10,27	54,0	"	II	1,017	1,105	58,0	28,0	11,2	42	Veli intorno al ☉
"	11,12	58,5	"	II	1,219	1,323	57,8	28,4	10,7	38	☉ chiaro
13 "	13,53	55,7	"	I	1,040	1,155	59,0	29,2	8,2	35	Cielo bianchiccio
"	14,37	53,2	"	I	1,025	1,139	58,2	29,3	8,5	33	Id.
14 "	14, 1	52,7	"	I	1,070	1,190	57,0	30,1	9,2	37	Id.
"	14,38	47,3	"	II	0,943	1,024	57,0	30,2	9,0	38	Id.
"	15,15	41,0	"	I	0,758	0,842	56,9	30,2	9,0	38	Cielo nebbioso
15 "	14,56	44,0	"	II	1,030	1,119	57,2	29,2	12,4	42	Cu sparsi; ☉ con aureola biancastra
17 "	15,48	36,0	"	I	1,035	1,150	57,8	28,6	12,1	38	Cielo nebbioso
"	16,45	27,5	"	I	0,941	1,045	57,5	26,8	13,2	43	Id.
18 "	8,47	30,0	"	II	1,024	1,113	58,9	24,5	14,5	57	Cielo biancastro
"	9,58	45,0	"	III	1,172	1,244	58,5	25,6	14,2	57	☉ bello
"	10,24	48,5	"	II	1,064	1,156	58,5	25,7	13,4	55	Veli intorno al ☉
"	11, 9	55,0	"	III	1,199	1,273	58,3	28,0	13,7	49	Aureola bianca intorno al ☉
"	12,16	58,6	"	III	1,224	1,298	58,0	29,2	13,2	45	Sereno
19 "	10, 9	46,5	"	I	1,134	1,260	59,8	26,0	13,1	56	Id.
"	10,35	51,8	"	II	1,133	1,231	59,8	26,9	13,0	49	Id.
"	11, 2	54,0	"	III	1,143	1,213	59,6	28,0	12,2	41	Id.
"	11,56	57,8	"	III	1,184	1,256	59,5	29,9	11,7	37	Id.
"	12,44	58,0	"	I	1,178	1,308	59,4	30,2	11,1	35	Id.
20 "	10,28	48,0	289 pic.	II	1,076	1,193	60,0	27,5	13,4	51	Veli in giro
"	11,22	55,5	"	III	0,966	1,038	60,0	29,2	12,1	43	☉ fra veli con aureola biancastra
"	12,14	57,9	"	III	1,155	1,242	59,8	30,1	11,2	36	☉ libero; cielo bianchiccio
21 "	10,42	51,0	"	III	1,105	1,187	59,8	29,0	14,8	50	Sereno
"	11,54	56,8	"	II	1,133	1,256	59,3	29,7	14,1	45	Id.
"	12,20	57,6	"	III	1,202	1,292	59,1	30,1	13,4	43	Id.
23 "	11,11	54,3	"	III	1,007	1,081	60,8	28,0	15,6	56	Cielo nebbioso
"	11,42	55,0	"	II	0,819	0,908	60,4	28,7	14,0	51	☉ fra veli
"	12,59	56,3	"	III	1,002	1,076	60,2	29,1	12,8	40	Cielo nebbioso
30 "	12,31	54,2	"	II	1,150	1,275	59,1	22,4	9,4	47	Aureola intorno al ☉
31 "	11, 1	53,8	"	II	1,161	1,285	59,3	23,2	11,1	53	Sereno
"	12,21	54,1	"	II	1,224	1,356	58,8	24,2	11,3	50	Id.
"	14, 5	50,8	"	II	1,180	1,307	58,0	24,4	9,2	38	Id.
4 settembre	11,41	52,0	"	II	1,129	1,250	63,0	22,8	10,0	48	Cielo sereno; nebbia all'orizzonte
6 "	10,39	50,0	"	II	1,113	1,232	61,0	23,6	14,2	66	Cielo nebbioso
"	11,45	51,5	"	II	1,096	1,213	60,8	25,8	14,2	58	Id.
7 "	11, 0	50,5	"	III	1,126	1,209	60,6	24,0	14,6	66	Sereno
"	14,14	49,8	"	III	1,127	1,211	60,3	28,1	14,1	51	Id.

Chimica. — *L'impiego di alcune anidridi e cloroanidridi in alcalimetria* ⁽¹⁾. Nota di BERNARDO ODDO, presentata dal Socio PATERNÒ.

Durante il corso di esercizî di analisi volumetrica, che ho eseguito, ho notato che per la fissazione del titolo dei liquidi, alcalini o acidi, si va incontro ad una perdita di tempo non trascurabile, principalmente a causa della difficoltà di purificazione delle sostanze a tal uopo usate.

Fra esse le più comunemente consigliate finora sono il carbonato sodico e l'acido ossalico.

Il carbonato sodico che proviene dalle fabbriche richiede non solo parecchie cristallizzazioni, ma un essiccamento prima all'aria e poi in una stufa a 150°, fino a costanza di peso. Nella titolazione poi lo sviluppo di anidride carbonica ora è tumultuoso, ora lento; e per la sensibilità dell'acido carbonico cogl' indicatori più comuni, se non si usano le cure consigliate, può capitare facilmente di cadere in errore.

L'acido ossalico, che non presenta quest'ultimi inconvenienti, si suole preferire al carbonato alcalino; anch'esso però richiede diverse cristallizzazioni, e forse in numero maggiore, e non sempre si riesce ad ottenerlo esente del tutto di ossalato acido di potassio; senza dire che per averlo totalmente privo di acqua occorre un prolungato essiccamento all'aria.

Più a lungo durano i preparativi nelle determinazioni di controllo delle soluzioni titolate per mezzo delle altre sostanze che vengono indicate, quali il carbonato di calcio, l'ossido di calcio, il borace, l'ossalato di sodio, il quadriossalato di potassio, il bitartrato di potassio, il biiodato di potassio, il solfato di ammonio, il cloruro di ammonio. Così, per citarne qualcuno, il borace è necessario cristallizzarlo parecchie volte per ottenerlo puro, si richiede inoltre un essiccamento all'aria, rimuovendolo sempre fino a peso costante, per il che occorrono dei giorni ⁽²⁾.

Mi è sembrato pertanto che si rendesse quasi necessaria la ricerca di qualche sostanza, fra le tante inorganiche ed organiche, che, non lasciando nulla a desiderare sui risultati, si potesse ottenere pura in brevissimo periodo di tempo e non presentasse alcun inconveniente nella titolazione.

Io credo di avere soddisfatto a questo bisogno impiegando alcune anidridi e cloroanidridi inorganiche ed organiche. Il mio obbiettivo mi fece subito escludere da questo studio le anidridi inorganiche per la difficoltà sia

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale dell'Università di Cagliari.

⁽²⁾ V. Suppl. Ann. all'Enciclopedia Chim. ital., pag. 111 (1902).

di averle allo stato puro, sia di maneggiarle, quantunque alcune di esse, come l'anidride iodica, la disolforica e la fosforica, presentassero il vantaggio di un elevato peso molecolare, per cui si può ottenere una pesata relativamente esatta, anche con una bilancia non molto sensibile.

Fra le organiche preferii l'anidride acetica, perchè va in commercio a prezzo mite, si conserva bene senza difficoltà, ed al bisogno basta distillarla una o due volte per ottenerla del tutto pura, a punto di ebollizione costante.

Per le medesime ragioni studiai un maggior numero di cloroanidridi inorganiche ed organiche, cioè il cloruro di solforile, l'ossicloruro di fosforo ed il cloruro di acetile. Inoltre per le proprietà molto simili a quelle delle cloroanidridi volli sperimentare anche il tricloruro di fosforo. Sono tutti corpi che reagiscono con l'acqua e con gli alcali facilmente a temperatura ordinaria, e danno delle reazioni di una grande nettezza.

Per tutti e cinque le mie previsioni vennero confermate dall'esperienza, avendo ottenuto dei risultati esatti ed in brevissimo tempo.

Parte sperimentale.

Anzitutto mi sono preparato una soluzione esattamente decinormale, per quanto mi sia stato possibile, di acido ossalico; indi una soluzione empirica d'idrato sodico all'alcool, e subito dopo, adottando il metodo che verrò a descrivere, incominciai le esperienze.

METODO GENERALE. — In un matraccino da cinquanta cc. a tappo smerigliato, mettevo venticinque cc. di una soluzione empirica qualunque di idrato alcalino che voleva titolare e ne stabilivo la tara; poscia mediante una pipetta comune, ben asciutta, facevo cadere su di essa un piccolo eccesso di anidride o cloroanidride, che sia, in modo tale che la soluzione diventasse leggermente acida. A ciò si riesce facilmente, facendo prima un saggio e tenendo conto del numero delle gocce che occorrono.

Aggiunta così la sostanza, dopo di avere agitato ben bene per un po' di tempo, ritornavo a pesare, e così venivo a sapere per differenza la quantità di prodotto impiegato.

Ho preferito questo metodo all'altro, che pure usai, della pesata diretta dell'anidride o cloroanidride in una pipetta Beckmann, per la ragione che queste sostanze, avide di acqua, restano così libere per minor tempo, si evita ogni rischio di fare intaccare la bilancia e non si spreca prodotto inutilmente.

Stabilito il peso della sostanza impiegata, aggiungevo mediante una buretta graduata, a gocce a gocce, altra quantità di soluzione alcalina, fino ad ottenere il noto cambiamento di colore, con cui venivo a sapere il numero complessivo dei cc. necessari a neutralizzare la quantità pesata dell'anidride o cloroanidride; ed in ultimo, con delle semplici proporzioni risalivo alla

quantità in peso di alcali ed ai cc. di acqua da aggiungere alla soluzione empirica per portarla al titolo desiderato.

Per tutti i casi, ed in breve tempo, sono riuscito a prepararmi una soluzione, decinormale nel mio caso, la quale, messa a confronto con quella decinormale di acido ossalico, mi dava risultati concordanti.

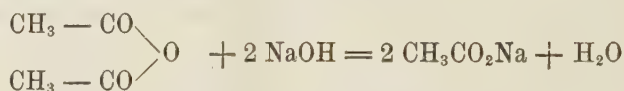
Come indicatore, in tutte l'esperienze, ho usato la fenoltaleina, che si comporta bene; a differenza della laccamuffa, la quale con l'acido acetico, fosforico, come in generale con tutti gli acidi deboli, dà un cambiamento di colore non molto pronto, nè molto facile a stabilire.

A complemento di quanto ho già esposto, riporto alcuni dei risultati ottenuti nelle esperienze, esponendo almeno per una delle sostanze anche il processo aritmetico di cui mi sono servito.

1°. — Anidride acetica.

Usai il prodotto fornitomi dalla fabbrica Kahlbaum, che distillai due volte, raccogliendo, alla pressione ordinaria, la frazione che passò tra 137-138°.

La reazione dell'anidride acetica con l'acqua non si compie immediatamente, ma occorre, spesse volte, un lieve riscaldamento; con gli alcali invece avviene subito secondo la nota equazione:



Essendo 102,06 il peso molecolare e fornendo con l'acqua due atomicità acide, l'equivalente è: 51,03.

Esperienza 1ª. — Per neutralizzare gr. 0,2973 di anidride acetica, pesata nelle condizioni sudette, occorsero cc. 35,90 della soluzione empirica di soda, perciò:

$$\begin{array}{ccccccc} 51,03 & : & 40 & = & 0,2973 & : & x \\ \text{equiv. dell'anidride} & & \text{NaOH} & & \text{anidride acetica} & & \\ \text{acetica} & & & & \text{impiegata} & & \end{array}$$

$x = \text{gr. } 0,2330$ d'idrato sodico contenuto in cc. 35,90 di soluzione empirica consumata, e riportando a 1000:

$$\begin{array}{l} 35,90 : 0,2330 = 1000 : y \\ y = \text{gr. } 6,4902. \end{array}$$

$$\text{NaOH } \text{‰} \text{ della soluzione empirica} = \text{gr. } 6,4902$$

$$\text{ " " necessaria per la soluzione } \frac{n}{10} = \text{ " } 4,0000$$

$$\text{ " " in eccesso} = \text{ " } 2,4902$$

$$4,00 : 1000 = 2,4902 : z$$

$z =$ cc. 622,55 di acqua da aggiungere ad un litro della soluzione empirica d'idrato sodico, per portarla al titolo di decinormale.

Eseguita a questo modo la correzione, confrontai la soluzione con la decinormale dell'acido ossalico ed ottenni che:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero

99,98 cc. " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

Esperienza 2^a. — Impiegai per gr. 0,2640 di anidride acetica cc. 31,88 di soluzione empirica d'idrato sodico, per ottenere la neutralizzazione, ed eseguita la correzione nel modo sudetto:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero

99,96 cc. " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

2°. — Cloruro di acetile.

Lo preparai facendo agire il tricloruro di fosforo (parti sei) sull'acido acetico glaciale (parti nove), distillando il prodotto una prima volta su acetato sodico fuso, ed una seconda volta da solo e raccogliendo la frazione che bolliva tra 54°-55° (1).

Con gli alcali, al pari dell'anidride omonima, reagisce istantaneamente:



Il suo peso molecolare essendo 78,48, e fornendo anch'esso due acidità, il suo equivalente è 39,24.

Nelle esperienze mi sono servito della soluzione empirica usata per l'anidride acetica; il calcolo sia per il cloruro di acetile che per le altre sostanze è lo stesso del caso precedente, basta sostituire al posto dell'equivalente dell'anidride, quello del prodotto che si adopera.

Esperienza 1^a. — Impiegai per gr. 0,2941 di cloruro di acetile cc. 46,17 di soluzione empirica d'idrato sodico, per ottenere la neutralizzazione, ed eseguita la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero

99,98 cc. " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

Esperienza 2^a. — Impiegai per gr. 0,2422 di cloruro di acetile cc. 38,04 di soluzione empirica d'idrato sodico ed eseguita la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero

99,94 cc. " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

(1) Beilstein, Organische Chemie, I, III Auflage, 459.

3°. — Ossicloruro di fosforo.

Lo preparai col metodo Derwin ⁽¹⁾ ossidando cioè il tricloruro di fosforo con clorato potassico, e per ottenerlo puro feci agire un piccolo eccesso di questo sale sulla quantità calcolata; a questo modo non resta alcuna traccia di tricloruro e, compiuta la reazione, incomincia a svolgersi del cloro, il quale indica la fine di questa prima fase di ossidazione:



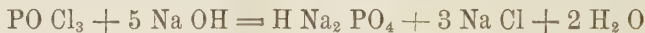
ed il principio dell'altra successiva:



Feci gorgogliare una corrente di aria secca nel liquido sino a decolorazione completa e poscia lo distillai due volte: passa così quasi completamente a 107°-108° a pressione ordinaria.

Per quanto sia stato osservato ⁽²⁾ che l'ossicloruro di fosforo mantiene sempre tracce di prodotti d'idratazione, siccome esse sono in quantità trascurabile, non arrecano in questo caso una sensibile causa di errore.

Trattato con gli alcali, sino a neutralizzazione, reagisce secondo la equazione:



Perchè si completi la reazione bastano appena cinque minuti, anzi siccome non si sviluppa una sensibile quantità di calore, si può far subito la pesata, sicuri di aver raggiunto la fine di essa in quel giro di tempo.

I risultati non lasciano a desiderare, sebbene la sua molecola, relativamente piccola, ci dia cinque atomicità acide ed il suo equivalente sia perciò 30,67.

Per questa cloroanidride e per le seguenti, compreso il tricloruro di fosforo, mi sono servito nelle esperienze, di un'altra soluzione empirica di idrato sodico.

Esperienza 1.^a — Impiegai per ottenere la neutralizzazione di gr. 0,2366 di ossicloruro di fosforo, cc. 31,30 di soluzione empirica d'idrato sodico e fatta la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero

99,70 " " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

(¹) Compt. Rend. 97, 575.

(²) Gazz. Chim. it. XXXI (1901), II, 138, 139, 140.

Esperienza 2^a. — Impiegai per gr. 0,3000 di ossicloruro di fosforo cc. 39,70 di soluzione empirica d'idrato sodico ed eseguita la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero
99,64 " " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

4°. — Cloruro di solforile.

Usai sia il prodotto proveniente dalla fabbrica Kahlbaum, sia quello che preparai facendo passare simultaneamente cloro ed anidride solforosa in un tubo contenente dei pezzettini di canfora, raccogliendo alla distillazione il prodotto che bolliva fra 70°-71°.

Versato nella soluzione alcalina, precipita dapprima in gocce oleose sul fondo del recipiente, che spariscono agitando appena per cinque minuti, dando luogo alla nota reazione:



La sua molecola ci fornisce quindi quattro atomicità acide, ed il suo equivalente è 33,74.

Esperienza 1^a. — Impiegai per gr. 0,2605 di cloruro di solforile cc. 31,88 di soluzione empirica d'idrato sodico per ottenere la neutralizzazione, e fatta la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero
99,60 " " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

Esperienza 2^a. — Impiegai per gr. 0,2111 di cloruro di solforile cc. 25,38 di soluzione empirica d'idrato sodico e fatta la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero
99,91 " " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

5°. — Tricloruro di fosforo.

Impiegai il prodotto che fornisce la fabbrica Kahlbaum, dopo averlo distillato due volte, e raccogliendo la frazione che bolliva fra 74°-75.

Trattata con gli alcali sino a neutralizzazione reagisce secondo la equazione:



La sua molecola fornisce quindi cinque atomicità acide ed il suo equivalente è 27,47, cioè il più piccolo di quello di tutte le sostanze che ho impiegato. Tuttavia i risultati sono ugualmente esatti.

Esperienza 1^a. — Impiegai per gr. 0,2533 di triclورو di fosforo cc. 37,40 di soluzione empirica d'idrato sodico per ottenere la neutralizzazione, ed eseguita la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido assalico richiesero

99,99 " " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

Esperienza 2^a. — Impiegai per gr. 0,2466 di triclورو cc. 36,40 di soluzione empirica d'idrato sodico e fatta la correzione:

100 cc. di soluzione $\frac{n}{10}$ di acido ossalico richiesero

100,04 " " " d'idrato sodico preparata col mio metodo.

Concludendo, le sostanze da me adoperate, come risulta dalle esperienze che ho riportato, si prestano tutte bene per una rapida ed esatta preparazione o per un rapido controllo delle soluzioni titolate, nè saprei a quale delle cinque dare la preferenza, se non riuscisse più facile e meno costosa la preparazione del triclورو di fosforo. Col metodo che ho esposto si può preparare qualunque volume di soluzione alcalina, esattamente titolata in meno di due ore.

Parassitologia. — *Studio sui Cytoryctes vaccinae* (¹) Nota I preliminare della dr. ANNA FOÀ, presentata dal Socio GRASSI.

PARTE I. — Uno degli argomenti che in questi ultimi tempi hanno maggiormente richiamato l'attenzione, è lo studio dei parassiti del vaccino e del vaiuolo.

I primi tentativi di riconoscere nella linfa vaccinica gli agenti attivi si può dire datino dal principio del secolo passato, perchè già nel 1809 Sacco segnalò nella linfa vaccinica la presenza di granuli riuniti in ammassi e dotati di movimenti autonomi (²). Dopo gli studi di Chaveau pubblicati nel 1868, studi che dimostrarono come gli agenti attivi debbano ricercarsi non nella parte liquida, ma nella parte solida della linfa vaccinica, furono compiute moltissime ricerche da varî autori, ma per trovare risultati veramente importanti, bisogna giungere fino al 1892, in cui furono pubblicate le fondamentali ed esatte osservazioni di Guarnieri.

Com'è noto, Guarnieri, studiando le alterazioni vaiolose della cute dell'uomo, osservò che nelle regioni alterate, le cellule del corpo mucoso di

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(²) Delobel e Cozette, *Vaccine et vaccination*, Paris.

Malpighi presentano accanto ai nuclei, corpicciuoli che si colorano intensamente, e li suppose parassiti. Già L. Pfeiffer nel 1887 studiando le pustole cutanee di diversi mammiferi e quelle vaiolose e vacciniche dell'uomo, aveva creduto di riconoscervi un parassita che denominò *Monocystis epithelialis*, ma la descrizione imperfetta e le figure assai poco dimostrative fecero prestar poca fede alle sue asserzioni. Del resto il merito grandissimo di Guarnieri non consiste nell'osservazione dei corpuscoli, nella quale egli stesso dichiara di esser stato preceduto, ma nell'aver pensato di riprodurli su superficie epiteliali viventi, e nell'aver scelto a questo scopo la cornea del coniglio. Inoculando nella cornea di coniglio la linfa vaccinica poté ottenere nelle cellule epiteliali, abundantissimi corpuscoli simili a quelli osservati nelle pustole cutanee, col vantaggio di aver un materiale di studio molto favorevole perchè relativamente più semplice.

Il Guarnieri studiò le proprietà dei corpuscoli ottenuti coll'innesto della linfa vaccinica, e credette di poterli considerare come esseri viventi a cui diede il nome di *Cytoryctes vaccinae*. Ne ottenne di simili coll'innesto di linfa raccolta da vescicole vaiolose, e li denominò *Cytoryctes variolae*.

La importante scoperta di Guarnieri ebbe il merito di concentrare l'attenzione degli studiosi che si occuparono dell'argomento, su quei dati corpicciuoli, tuttavia i risultati furono diversi da quanto si sarebbe sperato, perchè mentre era logico supporre che la questione fosse rapidamente avviata ad una soluzione, oggi ancora, dopo dieci anni, non solo gli autori non sono d'accordo nel riconoscere le proprietà dei *Cytoryctes*, ma chiunque ne intraprenda lo studio è ancora costretto a rivolgersi la domanda: i *Cytoryctes* sono o no esseri viventi?

Sarebbe fuor di luogo in una Nota preliminare riferire estesamente le discussioni fatte in proposito; accenneremo solo alle principali ragioni che i molti osservatori, compreso il Guarnieri che seguì ad occuparsi dell'argomento, portarono pro e contro l'ipotesi parassitaria.

I motivi per cui i *Cytoryctes* vengono ritenuti i parassiti del vaiuolo e del vaccino sono soprattutto i seguenti:

« L'essere i *Cytoryctes* le sole forme caratteristiche trovate nella pelle e nelle mucose dei malati di vaiolo e di vaccino, e mancanti nei sani o negli affetti da altre malattie.

« La presenza costante dei *Cytoryctes* nell'epitelio corneale di coniglio innestato con linfa vaccinica attiva e la loro mancanza nelle cornee innestate con linfa non attiva o con altre sostanze.

« La possibilità di trasmettere l'infezione vaccinica da coniglio a coniglio con successivi innesti di epitelio corneale, per un numero indefinito di generazioni.

« La forma e la struttura dei corpuscoli vaccinici, per cui alcuni autori hanno creduto di poter distinguere in essi un nucleo ed un protoplasma, e

di poter interpretare alcune figure come stadi di moltiplicazione per divisione ed anche per sporulazione.

« I loro movimenti ameboidi, però contestati anche da osservatori favorevoli all'ipotesi di Guarnieri.

« L'essere la linfa filtrata costantemente inattiva, il che induce generalmente a dedurre che gli esseri parassitari causa del vaccino non possano essere tanto piccoli da sfuggire all'indagine microscopica ».

Negli ultimi mesi sono comparsi altri due lavori pure favorevoli all'ipotesi di Guarnieri, ma per ragioni diverse da quelle generalmente ammesse. Uno è di uno scienziato giapponese, l'Ishigami, il quale ritiene di aver coltivato il parassita del vaccino e lo descrive come uno sporozoo con un complicato ciclo di sviluppo e capace d'incistarsi nella pelle delle vitelle ecc. L'altro è di Sanfelice e Malato, e viene alla conclusione che i *Cytoryctes* non sono altro che stafilococchi.

Contro l'ipotesi della natura parassitaria dei *Cytoryctes* furono mosse parecchie obiezioni, di cui le principali sono le seguenti:

« I *Cytoryctes* non si otterrebbero solo coll'innesto di linfa vaccinica attiva, ma anche con irritazioni ed infiammazioni della cornea di coniglio prodotte con agenti meccanici o chimici, quali l'olio di croton, l'inchiostro di China, l'acido osmico ecc. (Ferroni e Massari).

« I *Cytoryctes* potrebbero essere i nucleoli delle cellule epiteliali (Babes).

« I *Cytoryctes* sarebbero leucociti trasformati (Salmon, London).

« I *Cytoryctes* sarebbero alterazioni protoplasmatiche caratteristiche per il vaccino (Hüekel) ».

Altri autori (Gorini, Ferroni e Massari) accennano ad una possibile derivazione dai nuclei, ma senza insistervi.

Il concetto di Ferroni e Massari, che i *Cytoryctes* non siano alterazioni specifiche del vaccino, è stato dapprima contrastato da molti osservatori; più tardi però Hüekel ha dimostrato che coi mezzi usati da Ferroni e Massari si ottengono veramente corpuscoli che sono eguali ad alcuni corpuscoli vaccinici, ma che per il modo di comportarsi colle materie coloranti differiscono della grande maggioranza dei *Cytoryctes*, i quali perciò possono ritenersi specifici pel vaccino.

La derivazione dai leucociti, per le osservazioni di vari autori e per esperimenti di Hüekel, è stata dimostrata infondata.

Le altre ipotesi non possono dirsi nè sufficientemente dimostrate, nè da escludersi.

Passo ora ad esporre i risultati delle ricerche da me eseguite nel laboratorio di Anatomia comparata, sotto la direzione del prof. Grassi. Le esperienze furono proposte dal prof. Grassi, ed i risultati furono da lui controllati. Lo studio durò ben due anni, e fu iniziato e continuato colla speranza di

trovare la dimostrazione della natura parassitaria dei *Cytoryctes*; disgraziatamente non siamo riusciti nel nostro intento.

Le nostre ricerche possono dividersi in tre parti. Nella prima sono comprese le osservazioni dirette a riconoscere la natura dei *Cytoryctes* collo studio della loro struttura e delle loro proprietà (movimenti ameboidi, riproduzione). Nella seconda è compreso lo studio del modo di comportarsi dei *Cytoryctes* in vari ambienti, ed i rapporti tra le alterazioni subite dai *Cytoryctes* e l'attività del mezzo in cui erano contenuti. Nella terza è compreso lo studio delle forme che si riscontrano nel vaiuolo delle pecore (*clavelée*).

PARTE I. Premesse. — Dopo le moltissime ricerche degli autori precedenti, ben poco si può aggiungere di nuovo alla conoscenza della struttura dei *Cytoryctes*. Le nostre ricerche furono eseguite per la massima parte sull'epitelio corneale di coniglio, ma prima abbiamo voluto stabilire se nell'epitelio corneale di coniglio il parassita compisse tutto il suo ciclo di sviluppo o solo una parte. Le esperienze di Wasielewski, dimostranti che per 46 generazioni si può trasmettere l'infezione da coniglio a coniglio con innesto di epitelio corneale infetto, non bastano a risolvere tale questione, come pure non sono sufficienti le esperienze di Guarnieri, dello stesso Wasielewski e di altri ⁽¹⁾, dimostranti che coll'innesto di epitelio corneale di coniglio infetto, si possono riprodurre nei vitelli e nei bambini le pustole caratteristiche. Potrebbe darsi infatti che avvenisse per il vaccino qualche cosa di simile a quel che avviene per la malaria. È noto che iniettando in individui sani il sangue di individui malarici, si produce nei sani la malaria, per quanto il sangue malarico contenga i parassiti malarici solo in un periodo della loro vita.

Per stabilire dunque se nell'epitelio corneale di coniglio si trovino o no tutti gli stadi del parassita, abbiamo ricercato se l'epitelio corneale innestato col vaccino, che per brevità chiameremo *virus corneale*, come fu proposto da Gorini, godesse di tutte le proprietà del vaccino tratto dalle pustole di vitella.

Le proprietà notissime del vaccino sono quelle di conservarsi in glicerina, di resistere al disseccamento ed all'acqua distillata. Abbiamo sottoposto a questi trattamenti il *virus corneale*, ed abbiamo potuto stabilire che anche esso conserva la propria attività. Ne abbiamo dedotto che il virus corneale deve contenere tutte le forme esistenti nelle pustole cutanee, e può quindi venire adoperato per uno studio completo del parassita.

Struttura dei *Cytoryctes*. — Le nostre ricerche furono eseguite in parte a fresco, in parte colle sezioni. Per le ricerche a fresco abbiamo osservato la raschiatura dell'epitelio corneale nelle lacrime di coniglio, nella soluzione

(1) Nel lavoro in esteso sarà riferito esattamente quanto è già stato fatto da ciascun autore. In questa Nota, per evitare complicazioni, sono state omesse molte citazioni.

fisiologica di cloruro di sodio, nella miscela di acqua e glicerina in parti eguali. Quest'ultimo mezzo è quello più favorevole all'osservazione. Nei brandelli di epitelio raschiati nel luogo d'infezione, due o tre giorni dopo l'inoculazione, in ogni cellula accanto al nucleo, si distinguono i *Cytoryctes* che possono venir divisi in due gruppi. Il primo comprende le forme più piccole, tondeggianti, omogenee, assai splendenti; il secondo comprende forme più grandi, che appaiono costituite di tanti piccoli granuli splendenti, situati sopra una massa poco splendente, di forma variabile. L'insieme dei granuli e della massa sottostante apparisce meno brillante delle forme più piccole tondeggianti. Manca l'alone chiaro, tanto nelle prime che nelle seconde forme.

Col mezzo delle sezioni, abbiamo intrapreso anzitutto ricerche di controllo per studiare le alterazioni protoplasmatiche che, come altri autori hanno dimostrato, si possono produrre nell'epitelio corneale con semplici lesioni della cornea, senza introduzione di sostanze estranee. Per questo, una volta abbiamo praticato delle incisioni nella cornea di coniglio col metodo usato per le iniezioni vacciniche, abbiamo poi esaminato la cornea dopo 3 giorni. Un'altra volta abbiamo praticato un taglio circolare nella cornea in modo da lasciarla attaccata al bulbo oculare solo per alcuni piccoli tratti. Anche questa volta la cornea fu esaminata dopo 3 giorni. In tutti e due i casi abbiamo usata la fissazione colla soluzione satura di sublimato con 0,50 % di cloruro di sodio, e le colorazioni coll'emallume o colla miscela di Biondi.

Colle semplici incisioni si sono prodotte nelle cellule epiteliali figure che sembrano leggeri ispessimenti di protoplasma, colorabili in rosso colla miscela di Biondi; abbiamo osservato anche parecchie figure di carioplasmolisi.

Nei preparati ottenuti colla cornea in cui fu praticato il taglio circolare, a volte si notavano ancora figure che apparivano come ispessimenti protoplasmatici, in alcune sezioni per lunghi tratti dell'epitelio, nel protoplasma delle cellule si osservavano moltissimi granuli sferici, di dimensioni variabilissime, che, colla miscela di Biondi, si colorivano in rosso cupo. In alcuni preparati coloriti coll'emallume si trovavano molti nuclei assai alterati, invece della forma solita presentavano sporgenze di forme svariatissime, con tendenza evidente a separarsi via. Alcune di queste sporgenze, osservate a differente livello, apparivano ora riunite, ora staccate dal nucleo, altre erano nettamente separate. Queste forme devono esser state quelle che suggerirono ad alcuni autori l'ipotesi della derivazione dei *Cytoryctes* dai nuclei. Nei preparati coloriti colla miscela di Biondi, non abbiamo mai trovato fuori dei nuclei alcuna figura col colore azzurro proprio dei corpuscoli vaccinici.

Per l'esame dei veri *Cytoryctes* furono usati parecchi metodi di colorazione. In questa Nota ricorderemo solo quelli che ci diedero risultati più importanti.

Nei preparati di cornea fissata con sublimato e cloruro di sodio, coloriti colla miscela di Biondi, si osservano una quantità di figure diverse, le

quali furono minutamente e con grandissima precisione descritte dall'Hüchel nel suo lavoro pubblicato nel 1898; una ripetizione sarebbe qui fuor di luogo, basta ricordare che i più piccoli corpuscoli vaccinici, di forma più o meno tondeggiante appaiono coloriti in azzurro molto intenso, le forme più grandi appaiono costituite da una parte irregolare colorita in azzurro poco intenso, e da una parte rossa costituita per lo più di granuli disposti in differentissime maniere. Tenendo presente che i granuli rossi e, in generale, tutte le formazioni eritrofile sono state ottenute indipendentemente dalle iniezioni di vaccino, resta assai difficile la limitazione di quanto può ritenersi come parassita, perchè da alcune forme in cui i granuli rossi e le masse azzurre sono intimamente connesse, si passa per gradi insensibili a figure in cui si trovano granuli e frammenti variamente coloriti, sparsi per il protoplasma.

Colla colorazione per mezzo dell'ematossilina ferrica di Heidenhain, le forme più piccole appaiono intensamente ed uniformemente colorite in nero, da queste si passa gradatamente a forme che mostrano un orlo periferico più intensamente colorito, poi ad altre che hanno i contorni come smerlati, fortemente coloriti e la parte centrale chiara ed infine alle forme più grandi in cui si vede una massa irregolare chiara sulla cui superficie sono disposti granuli che si colorano in nero intenso. In alcuni casi i granuli appaiono evidentemente congiunti da filamenti sottilissimi. Per mezzo della doppia colorazione coll'ematossilina ferrica ed eosina, a volte, ma assai raramente, si nota attorno al corpuscolo colorito in nero un orlo roseo sottilissimo, ma il limite verso il corpuscolo nero non è esattamente definibile. Nei preparati fissati col liquido di Flemming o coll'acido acetico, coloriti collo stesso mezzo, si osserva nei corpuscoli più grandi una struttura alveolare.

Esaminando a fortissimo ingrandimento le sezioni sottilissime di epitelio corneale di coniglio fissato con sublimato e cloruro di sodio, colorite con ematossilina Delafield ed acido acetico, oppure con emallume ed acido acetico, i corpuscoli si vedono congiunti quasi sempre al protoplasma cellulare per mezzo di filamenti sottilissimi. Le forme medie e quelle più grandi mostrano una struttura alveolare con presenza di granuli; qualche volta si colora come una massa diversa per forma e posizione nei diversi corpuscoli.

Maggiori particolari saranno descritti nel lavoro in esteso, per ora osserviamo solo che non è dimostrata la presenza di un protoplasma e di un nucleo propriamente detto. La presenza di granuli e di masse più intensamente colorite, potrebbe far pensare alla presenza di una rete cromidiale o di cromidi, come furono dimostrati nei batteri ed in alcuni protozoi; ma a questa interpretazione si oppone il fatto che tanto i granuli, i quali si riscontrano quasi sempre, quanto le masse più colorite, che si vedono solo eccezionalmente, osservate con attenzione si rivelano situate non dentro, ma alla superficie, ossia sopra al corpuscolo. Ciò concorda con quanto fu osservato da Hüchel.

Movimenti ameboidi. — Molte ricerche furono da noi fatte colla speranza di decidere la questione relativa all'esistenza dei movimenti ameboidi. Le prime nostre osservazioni furono intraprese sull'epitelio corneale di coniglio innestato con vaccino, osservato secondo le indicazioni di Guarnieri nella soluzione fisiologica di cloruro di sodio o nelle lacrime di coniglio, col tavolino riscaldante alla temperatura di 35°-40° centigr. Per quanto abbiamo ripetute le osservazioni, non abbiamo mai potuto riscontrare nessun movimento dei *Cytoryctes*, mentre abbiamo potuto seguire i movimenti ameboidi dei leucociti sparsi per il preparato.

Rileggendo attentamente le parole di Guarnieri, abbiamo notato come nelle pubblicazioni successive a quella del 1892 in cui dice che i corpuscoli vaccinici sono « *capaci di cambiar forma* », non afferma più esplicitamente di avere osservato nell'epitelio corneale del coniglio i movimenti dei *Cytoryctes*, ma solo di aver osservato i *Cytoryctes* « *nelle più svariate movenze ameboidi* ». Il Guarnieri parla poi di « *corpicciuoli che presentavano movimenti per i quali la configurazione della loro massa subiva continue trasformazioni* » osservate nel detritus di pustole vacciniche, raccolto dalle pustole con tubetti capillari.

Per la cortesia del prof. Leoni, molto benemerito direttore dell'Istituto vaccinogeno di Roma, il quale gentilmente ci ha fornito quasi tutto il vaccino da noi usato nelle nostre ricerche, ed a cui esprimiamo la nostra viva gratitudine, abbiamo potuto avere anche il materiale necessario per ripetere queste osservazioni di Guarnieri. Anche noi nei detriti di pustole vacciniche, abbiamo riscontrato parecchi corpuscoli i quali realmente cambiavano di forma, ma ci mancava qualunque criterio per ascrivere questi corpuscoli ai *Cytoryctes*. Essi si trovavano liberi nella linfa raccolta con tubetti capillari ed abbastanza numerosi, mentre è noto che questa linfa costituisce un vaccino poco attivo. Facendo colla linfa preparati per strisciamento, fissati (metodo di Schaudinn) con un miscuglio di sublimato acquoso concentrato (100 parti), alcool assoluto (50 parti) ed acido acetico (5 gocce), coloriti con emallume o con ematossilina ferrica, non vi si riscontrano liberi corpi riconoscibili per *Cytoryctes*.

Crediamo poter ritenere che i corpuscoli con movimenti ameboidi osservati nella linfa, non siano che linfociti molto piccoli, o frammenti di leucociti.

Riproduzione. — Uno degli argomenti di maggior valore portati a sostegno dell'ipotesi parassitaria, consiste nell'osservazione di forme che possono interpretarsi come forme di riproduzione per divisione od anche per sporulazione. Dall'esame dei nostri preparati risulta che veramente si trovano moltissime figure di *Cytoryctes* allungati, con uno strozzamento (talvolta anche con due o tre), figure che possono essere interpretate come stadî di divisione; anzi queste forme non sono poco numerose, ma nelle cornee di coniglio ucciso

due o tre giorni dopo l'innesto, sono abbastanza frequenti. Colpisce però il vedere come tali figure non presentino nessuna costanza di forma nè di dimensione, e si riscontrano tanto in corpicciuoli piccolissimi quanto in alcuni di quelli più grandi forniti di granuli.

Quanto alla riproduzione per spore, certamente le forme descritte dai varî autori sono quelle costituite da una massa ricoperta più o meno di granuli svariati, ma anche qui non si ha nessun dato certo per poter accertare che si tratti di una sporulazione. Si può invece opporre che questi granuli si vedono sempre alla superficie, mai nell'interno dei corpuscoli, che appariscono congiunti tra di loro per mezzo di filamenti e che infine colla colorazione di Biondi, non si ha un limite tra le supposte spore e tutte le formazioni eritrofile che si ottengono senza l'innesto del vaccino. La distinzione proposta da Wasielewski, di due sorta di corpuscoli: gli uni con pochi granuli disposti uniformemente che costituirebbero i parassiti, gli altri con molti granuli disposti senza regola, che sarebbero forme di degenerazione, appare a noi, come ad altri autori, del tutto artificiosa.

A completare le nostre ricerche sulla riproduzione dei *Cytoryctes*, abbiamo voluto ripetere anche le osservazioni fatte dall'Ishigami sulle pustole vacciniche delle vitelle, osservazioni che lo condussero a descrivere una fase d'incistamento del parassita, preludente alla formazione di numerosi sporozoiti.

Il prof. Leoni, già ricordato, ha avuto la gentilezza di innestare per noi una vitella, e di tagliarne via le pustole ad ogni nostra richiesta. Così abbiamo potuto osservare le pustole cutanee dopo 3, 5 e 7 giorni.

Nel luogo dell'infezione abbiamo trovato corpuscoli simili a quelli osservati nell'epitelio corneale del coniglio, ma niente che alludesse alla formazione di cisti. È difficile immaginare che le cisti possano essere sfuggite alla nostra attenzione, tanto più che, secondo l'Ishigami, non si tratterebbe di piccoli corpicciuoli, ma di forme di cui quelle di media grandezza avrebbero la larghezza di 10-12 μ e la lunghezza di 15-25 μ .

Disgraziatamente nella pubblicazione di Ishigami mancano figure che chiariscano il testo.

Riassumendo: i risultati di questa prima serie di ricerche, pur provando la specificità dei corpuscoli vaccinici, ci hanno condotto ad escludere in essi la presenza di un protoplasma e di un nucleo, o di cromidi, o di una rete cromidiale, ci hanno fatto escludere i movimenti ameboidi, ci hanno dimostrato che le forme supposte di moltiplicazione non possono dirsi veramente tali, e che non è possibile stabilire un limite tra quel che può suporsi parassita e quel che certamente non lo è.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
*Seduta del 1° febbraio 1903.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

—————  
MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.* Nota del Corrispondente G. MORERA.

Chimica. — *Intorno all'olivile e la sua composizione e costituzione.* Nota del Socio G. KÖRNER e del dott. L. VANZETTI.

Biologia vegetale. — *Biologia dei semi di alcune specie d'Inga.* Nota del Corrispondente A. BORZÌ.

Chimica fisiologica. — *Identità della colesterina del latte con quella della bile.* Nota del Corrispondente A. MENOZZI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Di un gruppo continuo di trasformazioni decomponibili finitamente.* Nota di G. FRATTINI, presentata dal Socio VOLTERRA.

Con la presente Nota si vuol mostrare l'esistenza di un gruppo continuo  $\Gamma$  di trasformazioni, dotato della seguente proprietà: *comunque una trasformazione del gruppo si decomponga in fattori (trasformazioni del gruppo stesso), il numero dei fattori è sempre finito.* Il caso del gruppo  $\Gamma$ , che è inoltre proiettivo e a un sol parametro, è da riguardarsi come singolarissimo nella teorica dei gruppi continui, e ciò per le seguenti considerazioni generali. Dato un gruppo di trasformazioni ad  $n$  parametri  $a, b, c \dots$ , variabili senza limitazione alcuna (gruppo di *Lie* propriamente detto) <sup>(1)</sup>, ogni trasformazione del gruppo si potrà decomporre nel prodotto di due fattori, il primo dei quali, corrispondente ai valori  $a_1, b_1, c_1 \dots$  dei parametri, si potrà assegnare arbitrariamente. Risolvendo infatti un sistema di  $n$  equazioni con  $n$  incognite, si potranno determinare i valori parametrali  $a_2, b_2, c_2, \dots$  relativi al secondo fattore. Ciò mostra che la decomposizione delle trasformazioni di un gruppo di *Lie* propriamente detto in fattori può essere prolungata all'infinito. Il campo di variabilità dei parametri si supponga invece limitato. In questo caso, dovendo le incognite  $a_2, b_2, c_2, \dots$  (funzioni di  $a_1, b_1, c_1 \dots$  e dei parametri della trasformazione) essere contenute entro i limiti definiti dalla natura del gruppo, le quantità  $a_1, b_1, c_1 \dots$  e i detti parametri dovranno soggiacere, oltre che alle limitazioni loro proprie, anche ad un sistema di sotto-condizioni, esprimenti le limitazioni di  $a_2, b_2, c_2 \dots$ . E qui due casi potranno verificarsi: O alle dette condizioni e sotto-condizioni si potrà soddisfare disponendo opportunamente delle sole  $a_1, b_1, c_1 \dots$ ; e anche in questo caso il primo fattore si potrà determinare in infiniti modi (sebbene non del tutto arbitrariamente), nè vi sarà limite assegnabile pel numero dei fattori <sup>(2)</sup>. O si verificherà, come pel gruppo  $\Gamma$ , il fatto singolarissimo che dal sistema totale delle condizioni per  $a_1, b_1, c_1 \dots$  e i parametri della trasformazione da decomporre si possano eliminare  $a_1, b_1, c_1 \dots$ , talchè resti un sistema di condizioni pei soli parametri anzidetti; e in tal caso tutte le trasformazioni i cui parametri non soddisfano quest' ultime condizioni saranno

<sup>(1)</sup> V. Pascal, *I gruppi continui di trasformazioni*, Hoepli 1903, pag. 18.

<sup>(2)</sup> La mancanza delle trasformazioni inverse è dunque, per la decomponibilità finita, condizione necessaria, ma non sufficiente. Le trasformazioni del gruppo  $z' = \varepsilon z$ , qualora  $\varepsilon$  sia compresa fra 0 e 1, sono per esempio decomponibili all'infinito, malgrado il gruppo sia privo delle inverse.

*indecomponibili*. In quanto alle altre, potrà darsi che ciascuna ammetta un limite massimo pel numero de' suoi fattori, come le trasformazioni del gruppo  $\Gamma$  ne danno l'esempio.

Proprietà notevole del gruppo  $\Gamma$  e dei congeneri è quella di ammettere un unico sistema di trasformazioni generatrici. Tale sistema si compone delle sole trasformazioni indecomponibili, necessarie tutte per la generazione del gruppo. Le altre, cioè le trasformazioni decomponibili, formano un sottogruppo, che potrebbe dirsi il *sottogruppo contingente*, in quanto le sue trasformazioni sono inutili per la generazione del gruppo totale <sup>(1)</sup>.

Decomponendo le trasformazioni del sottogruppo contingente in fattori appartenenti al sottogruppo medesimo, la decomposizione avrà pure un termine. Si giungerà così ai *fattori primi*, che peraltro saranno tali nel campo del sottogruppo contingente, e saranno invece *composti*, riferiti a più vasto campo, qual è quello del gruppo principale  $\Gamma$  <sup>(2)</sup>.

Il gruppo parametrico di  $\Gamma$ , e a questo isomorfo, è un gruppo continuo di numeri la decomposizione dei quali ha sempre un limite, malgrado la condizione di continuità. Generalmente ciò non accade, anche limitando il campo di variabilità del sistema continuo (serva d'esempio il gruppo dei numeri compresi fra 0 e 1).

1. Sia  $D$  un numero intero e positivo; sia  $\omega$  la sua radice quadrata a meno di un'unità ed  $r$  il resto dell'estrazione di detta radice. La trasformazione

$$(1) \quad \frac{\mu z + D}{z + \mu}$$

operante sulla variabile  $z$  è una trasformazione proiettiva a un sol parametro  $\mu$ . Le trasformazioni della detta forma sono permutabili tra loro e formano un gruppo, come si vede dal prodotto operativo

$$\left( \frac{\mu_1 z + D}{z + \mu_1} \right) \left( \frac{\mu_2 z + D}{z + \mu_2} \right) = \frac{z \frac{\mu_1 \mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} + D}{z + \frac{\mu_1 \mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2}},$$

che non muta per lo scambio degl'indici 1 e 2, e conserva inoltre la forma de' suoi fattori.

<sup>(1)</sup> Del sottogruppo delle operazioni che non possono utilmente concorrere alla generazione di un gruppo dato ebbi già ad occuparmi in una breve Nota dal titolo: *Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni*, inserita in questi Rendiconti (aprile 1885).

<sup>(2)</sup> Il gruppo delle cause che presiedono ai fenomeni naturali non somiglierebbe al nostro sottogruppo contingente? Se il paragone cade a proposito, analizzando i fenomeni naturali, si potrebbe bensì giungere alla conoscenza dei loro fattori elementari o primi nella cerchia del sensibile. Ma nessuno di tali fattori sarebbe primo per rispetto al gruppo universale delle cause, gli elementi del quale si asconderebbero nella sfera *ove non cerchia uman compasso*.

Il gruppo parametrico relativo al gruppo delle (1) è quello dei binomi irrazionali

$$p + q \sqrt{D},$$

qualora a ciascuna trasformazione si facciano corrispondere tutti que' binomi che hanno il rapporto caratteristico  $\frac{p}{q}$  eguale al parametro della trasformazione medesima (1).

Affinchè due prodotti di trasformazioni (1) siano eguali, è necessario e sufficiente che siano eguali i rapporti caratteristici dei relativi binomi irrazionali.

2. Ai valori del parametro  $\mu$  s'imponga ora la condizione di essere non minori di  $\omega$  nè maggiori di  $\omega + 1$ . Le (1) in tal modo condizionate seguitaranno a formare un gruppo. Si esaminino infatti il quoziente

$$\frac{\mu_1 \mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2},$$

parametro del prodotto di due trasformazioni sopra eseguito. Si vedrà che anch'esso è compreso fra  $\omega$  e  $\omega + 1$ . Infatti, essendo  $\mu_1$  e  $\mu_2$  compresi fra questi limiti, si potrà porre:  $\mu_1 = \omega + \lambda_1$ ;  $\mu_2 = \omega + \lambda_2$ , intendendo per  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  due numeri compresi fra 0 e 1. Si avrà pertanto:

$$\frac{\mu_1 \mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} = \omega + \frac{r + \lambda_1 \lambda_2}{2\omega + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

E poichè

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \geq 2$$

o anche

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\lambda_1 \lambda_2,$$

e d'altra parte

$$2\omega \geq r,$$

sommando verrà:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\omega \geq r + 2\lambda_1 \lambda_2 \geq r + \lambda_1 \lambda_2;$$

e ciò dimostra l'asserto. Il gruppo composto delle sole (1) nelle quali il parametro non è minore di  $\omega$  nè maggiore di  $\omega + 1$  è quello che si vuol qui considerare e che fu sopra indicato con la lettera  $\Gamma$  (2).

(1) Essendosi pertanto asserito che i binomi del gruppo parametrico di  $\Gamma$  sono anch'essi decomponibili finitamente, fu sottintesa la convenzione di stimare eguali fra loro tutti i binomi che hanno il medesimo rapporto caratteristico.

(2) Si può domandare se il parametro, variabile fra limiti, non possa, mediante una sostituzione di variabile, essere surrogato da un altro, libero da limiti. Ma che ciò si possa non è provato; come dice il chiaro prof. Pascal nel già citato suo libro (pag. 17,

3. Passiamo ora a ricercare se la trasformazione  $(\mu)$ , e con questo segno indicherò una trasformazione di parametro  $\mu$  e appartenente al gruppo  $\Gamma$ , si può sempre decomporre in due fattori, trasformazioni del gruppo stesso, o se per ciò bisognano delle condizioni, e quali. Siano  $\mu_1$  e  $\mu_2$  i parametri dei fattori, e si ponga

$$\mu = \omega + \lambda, \quad \mu_1 = \omega + \lambda_1, \quad \mu_2 = \omega + \lambda_2,$$

( $\lambda$  compresa fra 0 e 1). Esprimendo la condizione affinchè la trasformazione  $(\mu)$  e il prodotto  $(\mu_1) \cdot (\mu_2)$  abbiano eguali i rapporti caratteristici, si avrà facilmente l'equazione

$$(2) \quad \lambda_1 = \frac{2\omega\lambda + \lambda\lambda_2 - r}{\lambda_2 - \lambda},$$

cui si dovrà soddisfare con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  entrambe comprese fra 0 e 1. Fatte le due ipotesi

$$\lambda_2 \geq \lambda,$$

dovrà rispondentemente aversi:

$$\lambda_2 \geq \frac{r - 2\omega\lambda}{\lambda},$$

affinchè  $\lambda_1$  sia positiva. E affinchè essa sia minore dell'unità:

$$\lambda_2 \geq \frac{(2\omega + 1)\lambda - r}{1 - \lambda}.$$

Due casi saranno dunque possibili: che cioè  $\lambda_2$  sia o maggiore o minore di tutti e tre i numeri:

$$(3) \quad \lambda, \quad \frac{r - 2\omega\lambda}{\lambda}, \quad \frac{(2\omega + 1)\lambda - r}{1 - \lambda}.$$

Ma, dovendo  $\lambda_2$  esser compresa al tempo stesso fra 0 e 1, non potrà verificarsi il primo caso se non quando i suddetti numeri saranno tutti minori dell'unità; nè potrà verificarsi il secondo, se non quando essi saranno tutti positivi. Ne derivano per  $\lambda$  le seguenti limitazioni:

$$\lambda > \frac{r}{2\omega + 1} \quad \text{e contemporaneamente} \quad \lambda < \frac{r + 1}{2\omega + 2}$$

oppure

$$\lambda > \frac{r}{2\omega + 1} \quad , \quad \lambda < \frac{r}{2\omega}.$$

---

linee 28, 29 e 30). E quand'anche si potesse, non per ciò verrebbe meno la distinzione tra gruppi continui di trasformazioni decomponibili all'infinito, oppure finitamente: distinzione che, avendo fondamento nel fatto, non può ridursi a una semplice questione di forma.

Conseguentemente:

$$\mu > \omega + \frac{r}{2\omega + 1} \text{ e contemporaneamente } \mu < \omega + \frac{r+1}{2\omega + 2}$$

oppure

$$\mu > \omega + \frac{r}{2\omega + 1} \quad , \quad \mu < \omega + \frac{r}{2\omega} .$$

Si osservi che queste due coppie hanno comune la limitazione inferiore; epperò ad esse si potrà sostituire un'unica coppia; quella le cui limitazioni sono più distanti fra loro. Tale coppia è la prima, se  $r < \omega$ ; la seconda se  $r > \omega$ ; l'una o l'altra delle due, se  $r = \omega$ .

Affinchè una trasformazione del gruppo  $\Gamma$  sia decomponibile in due fattori, è dunque necessario e sufficiente che il suo parametro sia compreso fra le due limitazioni dianzi stabilite <sup>(1)</sup>. Ciò verificandosi, si potrà infatti fissare  $\lambda_2$ , senz'altra condizione fuorchè quella di essere positiva e, o maggiore o minore dei limiti (3) precedentemente trovati; e poi, mediante la (2), determinare  $\lambda_1$ .

Per generalizzare il risultato precedente, giova dare alla sua espressione una forma alquanto diversa, ed è la seguente: Affinchè una trasformazione del gruppo  $\Gamma$  sia decomponibile in due fattori, è necessario e sufficiente che il parametro della trasformazione sia compreso fra l'una e l'altra delle coppie di valori che per  $z = \omega$  e  $z = \omega + 1$  assume ciascuno dei due quozienti

$$(4) \quad \frac{z + \omega}{z + \omega} \quad \frac{(\omega + 1)z + D}{z + (\omega + 1)} .$$

4. Ciò premesso, passiamo alla ricerca della condizione affinchè una trasformazione  $(\mu)$  sia decomponibile in più di due fattori, per esempio in 3:  $(\mu_1)$ ,  $(\mu_2)$ ,  $(\mu_3)$ . Bisognerà per ciò che il prodotto di  $(\mu)$  per l'inversa di  $(\mu_3)$  sia eguale al prodotto di due trasformazioni del gruppo  $\Gamma$ : chè cioè il rapporto caratteristico del prodotto

$$(\omega + \lambda + \sqrt{D}) (\omega + \lambda_3 - \sqrt{D}) ,$$

diminuito di  $\omega$ , sia compreso fra i limiti  $l$  ed  $l'$ , già trovati per la  $\lambda$  delle trasformazioni decomponibili in 2 fattori. Ragionando come al n. 3, si conclude che la nuova  $\lambda$  dev'essere compresa fra

$$\frac{r}{(\omega + l) + \omega} \quad \text{ed} \quad \frac{r}{(\omega + l') + \omega}$$

oppure fra

$$\frac{r + l}{(\omega + l) + (\omega + 1)} \quad \text{ed} \quad \frac{r + l'}{(\omega + l') + (\omega + 1)} ;$$

<sup>(1)</sup> Potrebbe anche essere eguale all'una o all'altra limitazione, come è facile vedere.

epperò  $\mu$  (che è uguale ad  $\omega + \lambda$ ) dovrà essere compresa tra

$$\frac{\omega L + D}{L + \omega} \quad \text{ed} \quad \frac{\omega L' + D}{L' + \omega}$$

oppure tra

$$\frac{(\omega + 1)L + D}{L + (\omega + 1)} \quad \text{ed} \quad \frac{(\omega + 1)L' + D}{L' + (\omega + 1)},$$

dove  $L$  ed  $L'$  sono i limiti già trovati per la  $\mu$  delle trasformazioni decomponibili in 2 fattori. Ciò equivale a dire che  $\mu$  dev'essere compresa fra l'una o l'altra delle coppie di valori che per  $z = L$  e  $z = L'$  assume ciascuno dei quozienti (4). Combinando questo risultato con quello già ottenuto in proposito di  $L$  e di  $L'$  alla fine del numero precedente, si conclude che  $\mu$  dev'essere compresa fra i valori che per  $z = \omega$  e  $z = \omega + 1$  prende uno qualsiasi dei tre prodotti operativi contenuti nella formola

$$\left( \frac{\omega z + D}{z + \omega} \right)^\alpha \left[ \frac{(\omega + 1)z + D}{z + (\omega + 1)} \right]^\beta,$$

estesa alle partizioni del 2 in due numeri interi  $\alpha$  e  $\beta$ , positivi o nulli.

Ma questo risultato si semplifica, potendosi verificare che il minimo dei limiti inferiori, come anche il massimo dei limiti superiori di  $\mu$  che in tal modo si ottengono, corrispondono al caso dei fattori eguali fra loro; e di più eguali ad

$$\frac{(\omega + 1)z + D}{z + (\omega + 1)},$$

se  $r < \omega$ ; ad

$$\frac{\omega z + D}{z + \omega},$$

se  $r > \omega$ ; all'una o all'altra delle due espressioni, se  $r = \omega$ . Di qui il teorema che è scopo principale del presente scritto, e che, generalizzato ed esteso al caso di  $n$  fattori, si enuncia così: *Affinchè una trasformazione del gruppo  $\Gamma$  sia decomponibile in  $n$  fattori, è necessario e sufficiente che il suo parametro sia compreso tra i valori che per  $z = \omega$  e  $z = \omega + 1$  assume una delle due potenze operative*

$$\left( \frac{\omega z + D}{z + \omega} \right)^{n-1} \quad ; \quad \left[ \frac{(\omega + 1)z + D}{z + (\omega + 1)} \right]^{n-1};$$

e precisamente, la prima, se  $r > \omega$ ; la seconda, se  $r < \omega$ ; l'una o l'altra, se  $r = \omega$ .

5. L'enunciazione del teorema testè dimostrato può essere modificata e resa più perspicua come segue: Se  $r \geq \omega$  (e similmente è a dirsi se  $r \leq \omega$ ), si ponga

$$(\omega + \sqrt{D})^{n-1} = P_{n-1} + Q_{n-1} \sqrt{D}.$$

Sarà altresì

$$\left( \frac{\omega z + D}{z + \omega} \right)^{n-1} = \frac{P_{n-1} z + D Q_{n-1}}{Q_{n-1} z + P_{n-1}}.$$

Se una trasformazione è decomponibile in  $n$  fattori, il suo parametro  $\mu$  dovrà, come già fu detto, essere compreso tra

$$\frac{\omega P_{n-1} + D Q_{n-1}}{\omega Q_{n-1} + P_{n-1}} \quad \text{e} \quad \frac{(\omega + 1) P_{n-1} + D Q_{n-1}}{(\omega + 1) Q_{n-1} + P_{n-1}}.$$

Ne segue che il rapporto

$$\frac{\mu P_{n-1} - D Q_{n-1}}{P_{n-1} - \mu Q_{n-1}}$$

dovrà essere compreso fra  $\omega$  e  $\omega + 1$ . Ma esso è il rapporto caratteristico relativo al prodotto

$$(\mu + \sqrt{D})(P_{n-1} - Q_{n-1} \sqrt{D}) = (\mu + \sqrt{D})(\omega - \sqrt{D})^{n-1},$$

o all'altro

$$(\mu + \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{n-1};$$

quest'ultimo prodotto, ridotto a forma di binomio irrazionale, apparterrà dunque al gruppo parametrico di  $\Gamma$ . Di qui il teorema: *Affinchè una trasformazione di parametro  $\mu$  sia decomponibile in  $n$  fattori, è necessario e sufficiente che il prodotto*

$$(\mu + \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^{n-1},$$

*se  $r \geq \omega$ , oppure il prodotto*

$$(\mu + \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^{n-1},$$

*se  $r \leq \omega$ , ridotti a forma di binomio irrazionale, appartengano al gruppo parametrico di  $\Gamma$ .*

Corollario. — *Il massimo numero di fattori in cui è decomponibile una trasformazione di parametro  $\mu$  eguaglia il minimo valore che bisogna dare all'esponente  $k$  affinchè il prodotto*

$$(\mu + \sqrt{D})(\sqrt{D} - \omega)^k,$$

*se  $r \geq \omega$ , oppure l'altro*

$$(\mu + \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^k,$$

*se  $r \leq \omega$ , che per  $k = 0$  appartengono al gruppo parametrico, cessino di appartenervi.*

Esempio. — Sia  $D = 11$ ,  $\omega = 3$ ,  $r = 2$ . La trasformazione

$$\frac{1257z + 4169}{379z + 1257},$$

il cui parametro è  $\frac{1257}{379}$ , sarà decomponibile in 6 fattori e non più di 6. Infatti

$$\begin{aligned}(1257 + 379 \sqrt{11}) (4 - \sqrt{11}) &= 859 + 259 \sqrt{11} \\(859 + 259 \sqrt{11}) (4 - \sqrt{11}) &= 587 + 177 \sqrt{11} \\(587 + 177 \sqrt{11}) (4 - \sqrt{11}) &= 401 + 121 \sqrt{11} \\(401 + 121 \sqrt{11}) (4 - \sqrt{11}) &= 273 + 83 \sqrt{11} \\(273 + 83 \sqrt{11}) (4 - \sqrt{11}) &= 179 + 59 \sqrt{11} \\(179 + 59 \sqrt{11}) (4 - \sqrt{11}) &= 67 + 57 \sqrt{11}.\end{aligned}$$

Ora quest'ultimo prodotto è il primo che cessa di appartenere al gruppo parametrico, perchè il suo rapporto caratteristico non è compreso fra 3 e 4. In quanto alle decomposizioni effettive di detta trasformazione in 6 fattori, una ne otterremo decomponendo prima il binomio  $1257 + 376 \sqrt{11}$  nel prodotto di 6 binomi del gruppo parametrico. A ciò serviranno le prime 5 delle precedenti eguaglianze, le quali danno

$$1257 + 379 \sqrt{11} = \left( \frac{4 + \sqrt{11}}{5} \right)^5 (179 + 59 \sqrt{11}).$$

Per isomorfismo si avrà poi:

$$\left( \frac{1257z + 4169}{379z + 1257} \right) = \left( \frac{4z + 11}{z + 4} \right)^5 \left( \frac{179z + 649}{59z + 179} \right).$$

6. *Sottogruppo  $\Gamma'$ .* È facile verificare che quelle trasformazioni del gruppo  $\Gamma$  nelle quali il valore del parametro non supera  $\frac{D}{\omega}$  formano un sottogruppo  $\Gamma'$ . Tale sottogruppo coincide col gruppo totale, quando  $r \geq \omega$ . Il seguente teorema ribadisce la decomponibilità finita, già dimostrata per le trasformazioni del gruppo  $\Gamma$ . *Affinchè una trasformazione del sottogruppo  $\Gamma'$  sia decomponibile in  $n$  fattori, è necessario che il suo parametro sia compreso fra la ridotta  $n^{ma}$  e la ridotta  $(n-1)^{ma}$  di  $\sqrt{D}$ .* Lo spazio concessomi non mi permette di esporre la dimostrazione di questo teorema: dirò solo che la ottenni generalizzando il metodo, che, per lo sviluppo delle potenze della sostituzione  $\frac{\omega z + D}{z + \omega}$  in frazione continua, esposi già nel Periodico di matematica per l'insegnamento secondario<sup>(1)</sup>; e dimostrando che, se  $H_n$  è il prodotto di  $n$  trasformazioni del gruppo  $\Gamma'$ , e se  $a_1, a_2, a_3, \dots$

(<sup>1</sup>) Vol. XVIII, luglio-agosto 1902.

indicano i quozienti incompleti consecutivi di  $\sqrt[n]{D}$ , si ha

$$\Pi_n = \left( a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right),$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  positivi e  $\alpha > \gamma$ . Ponendo in questa eguaglianza  $z = \infty$ , si ottiene facilmente il teorema sopra enunciato.

*Corollario.* — Se i numeri  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  sono non minori di  $\omega$  nè maggiori di  $\frac{D}{\omega}$ , e se si pone

$$(\mu_1 + \sqrt[n]{D})(\mu_2 + \sqrt[n]{D}) \dots (\mu_n + \sqrt[n]{D}) = A_n + B_n \sqrt[n]{D},$$

il rapporto  $\frac{A_n}{B_n}$  è compreso fra le ridotte  $n^{ma}$  ed  $(n-1)^{ma}$  di  $\sqrt[n]{D}$  (1).

Ponendo  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \omega$ , si ottiene come caso particolare il teorema che fu argomento di una mia Nota inserita nel Periodico di matematica sopra citato (2).

**Zoologia** — *Sull'adattamento degli Infusorî marini alla vita nell'acqua dolce* (3). Nota di PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio EMERY.

Ebbi recentemente ad occuparmi delle reazioni osmotiche che gli Infusorî presentano, per le variazioni del loro ambiente (4); studiai specialmente Infusorî di acqua dolce, o che vivono in ambienti poco salati. L'importanza di tali questioni per ciò che riguarda la biologia dei Protozoi, mi destò il desiderio di proseguire le ricerche, servendomi di Infusorî marini, e con

(1) Poichè i numeri non minori di  $\omega$  nè maggiori di  $\frac{D}{\omega}$  sono quelli contenuti nella formola

$$\frac{\omega \theta^2 + D}{\theta^2 + \omega},$$

dove  $\theta$  varia da  $-\infty$  a  $+\infty$ , questo teorema rende possibile la formazione di una funzione di  $n$  variabili  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , compresa fra le ridotte  $n^{ma}$  ed  $(n-1)^{ma}$  di  $\sqrt[n]{D}$ , per tutti i valori reali delle variabili. Con facile calcolo si trova che tale funzione è

$$\sqrt[n]{D} \frac{1 + \left( \frac{\omega - \sqrt[n]{D}}{\omega + \sqrt[n]{D}} \right)^n \prod_{x=1}^{x=n} \frac{\theta_{x^2} - \sqrt[n]{D}}{\theta_{x^2} + \sqrt[n]{D}}}{1 - \left( \frac{\omega - \sqrt[n]{D}}{\omega + \sqrt[n]{D}} \right)^n \prod_{x=1}^{x=n} \frac{\theta_{x^2} - \sqrt[n]{D}}{\theta_{x^2} + \sqrt[n]{D}}}.$$

(2) Vol. XVII, settembre-ott., 1901.

(3) Queste ricerche sono state eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli.

(4) Enriques P., *Ricerche osmotiche sugli Infusorî; Ricerche osmotiche sui Protozoi delle infusioni; Ricerche osmotiche sulla Limnaea stagnalis; Osmosi ed assorbimento nelle reazioni a soluzioni anisotoniche*. Rendiconti Accademia Lincei Vol. XI (5), pag. 340-347, 392-397, 440-448, 495-499.

vari intenti; ma specialmente quello di comparare la reazione che gli Infusorî presentano per un repentino cambiamento di ambiente, con quella che presentino per un cambiamento graduale e lento. D'altra parte, una curiosa questione è collegata con tali problemi osmotici. Tra i Protisti, a differenza di quello che avviene tra tutti gli altri gruppi di esseri viventi, sono moltissime le specie che vivono, a detta degli autori, tanto nell'acqua dolce che nell'acqua di mare; e, ciò è ancor più curioso, in uno stesso genere, spesso sono comprese specie unicamente marine, specie unicamente d'acqua dolce, e specie che vivono nei due ambienti. È vero che i generi li facciamo noi, riunendo insieme quelle forme che ci sembrano più affini, e che invece potrebbero non esserlo; ma chi ha un poco di pratica coi Protozoi, sa che spesso sono tanto simili le specie riunite in un genere, che è molto difficile di riconoscerle e classificarle. Mi son proposto di verificare sperimentalmente, per alcune specie, se in realtà la specie di acqua dolce e di acqua di mare sono *la stessa*, e se quelle che sono descritte come soltanto marine, proprio non possano esser trasportate nell'acqua dolce. Solo colla verifica sperimentale di questo fatto si può concludere che una differenza reale esiste tra i due gruppi di specie prese in considerazione; giacchè il leggere nei trattati che una specie non vive nell'acqua dolce, non toglie il dubbio che un osservatore più fortunato non possa un bel giorno scoprirla in questo ambiente. Se la distinzione nei caratteri biologici dei due gruppi di specie realmente esiste, verrà in discussione in che cosa essa consista, cioè quale proprietà anatomica, chimica, o d'altra natura produca, negli animali considerati, il comportamento diverso.

E trattiamo prima delle reazioni osmotiche. La questione è posta ben nettamente: è noto che un Infusorio, trasportato repentinamente in un ambiente ipotonico o ipertonico a quello in cui vive, si rigonfia, o, rispettivamente, si contrae. Nelle mie Note sopracitate, io ho mostrato quali sono le varie fasi di questa reazione, fino al suo scomparire; e come vari argomenti tendono a dimostrare che la reazione osmotica sia compensata da una reazione di indole assai diversa, legata alle funzioni cellulari (assorbimento o escrezione). Si tratta di vedere se, nella variazione lenta di ambiente, la reazione osmotica sia visibile o no.

Cominciai col verificare che anche negli Infusorî marini esiste, ed intensa, la reazione osmotica ai variamanti rapidi. Non mi fermerei molto su tale questione; essa dovrebbe essere un fatto ormai acquisito alla scienza; ma in un recente lavoro, molto lungo, del sig. Goldberger (<sup>1</sup>) si considerano gli Infusorî come non affatto sensibili alle condizioni osmotiche! L'A. non conosce le mie Note, nelle quali è messa in luce l'estrema sensibilità degli

(<sup>1</sup>) Goldberger H., *Die Wirkung von anorganischen Substanzen auf Protisten. Ein Beitrag zur Biochemie des Protoplasmas*. Zeitschr. f. Biol. 43 B. pag. 503-581, 15 figg.

Infusorî d'acqua dolce alla concentrazione dell'ambiente; adesso riferirò qualche dato relativo agli Infusorî marini.

Per dimostrare coi numeri il comportamento osmotico degli Infusorî, ho preso in esame lo *Zoothamnium alternans*, in cui si possono assai facilmente misurare gli individui della colonia, mentre non sarebbe facile di fare un buon numero di misure esatte sopra agli Infusorî liberi, i quali fuggono via continuamente dal campo del microscopio. Nè è possibile di fermarli con qualche artificio, p. e. con quello di lasciarli quasi completamente a secco tra i due vetrini, perchè in tal caso la loro forma si modifica considerevolmente.

Da un infuso di Idroidi, pescati nel porto di Napoli e vicino alla località che è chiamata Mergellina, si prendono varie porzioni di Idroidi e si distribuiscono in 4 vaschette contenenti rispettivamente (10 agosto 1902):

1) ClNa 3 ‰, 25 cm.c.

2) " 3,5 " " "

3) " 4 " " "

4) Acqua di mare 25 cm.c. a cui si aggiungono 2 cm.c. di acqua distillata.

Prima di trasportare gli Idroidi nelle vaschette, si lavano abbondantemente collo stesso liquido in cui devono venire immersi.

11 Agosto. Presa una parte degli Idroidi dalla vaschetta n. 1 e trasportata in un'altra vaschetta (n. 6), con ClNa 2,5 ‰. Id. dalla vaschetta n. 3 e trasportata in ClNa 4,5 ‰ (n. 7).

12 Agosto. *Zoothamnium* in parte conservati, in tutte le vaschette. Diametri di alcuni individui, in  $\mu$  (il primo numero indica il diametro longitudinale, dall'attacco del filamento all'apice dell'individuo; il secondo il diametro trasversale massimo):

6)  $48 \times 35,2$ ;  $51,2 \times 32$ ;  $57,6 \times 38,4$ ;  $48 \times 32$ ;  $51,2 \times 32$ ;  $64 \times 35,2$ ;  $44,8 \times 28,8$ .

7)  $38,4 \times 28,3$ ;  $35,2 \times 25,6$ ;  $32 \times 22,4$ ;  $44,8 \times 32$ .

Le differenze tra le dimensioni degli individui viventi nella soluzione concentrata (7) e diluita (6), sono molto evidenti, specialmente se si tiene conto delle dimensioni dei più grandi individui; esse sono dimensioni dovute a condizioni dell'ambiente pernicioso per questi organismi, giacchè il 13 agosto nella vaschetta 7 ed il 16 nella vaschetta 6, gli *Zoothamnium* sono completamente distrutti. Del resto il loro aspetto, anche indipendentemente dalle misure è molto chiaro, quanto al rigonfiamento negli uni, contrazione negli altri, in relazione col trasporto negli ambienti rispettivamente diluito e concentrato.

Anche negli *Zoothamnium* delle vaschette 1 e 3 la differenza di aspetto è notevole, nello stesso senso di sopra; io però non riporto i numeri delle misure che ho fatto, perchè la differenza non apparisce da essi molto chiara; ciò dipende dal fatto che le differenze tra i varî individui viventi in uno stesso ambiente sono già così forti, che pochi numeri non possono mostrare

la differenza tra gli individui viventi in due ambienti diversi, tranne il caso in cui essa sia fortissima. Anche nelle vaschette 1 e 3 gli *Zoothamnium* finiscono col morire completamente, dopo pochi giorni.

Nella vaschetta n. 4, in cui vengono aggiunti varî cm. c. di acqua distillata, a 2 o 3 per giorno, gli *Zoothamnium* hanno ugualmente l'aspetto rigonfiato, e muoiono dopo pochi giorni, verso la concentrazione di 2,5 ‰ (questo numero esprime la concentrazione di una soluzione di ClNa molecolarmente equivalente all'acqua di mare diluita in cui muoiono gli *Zoothamnium*).

Resulta dunque da questa esperienza, che gli *Zoothamnium* presentano i fenomeni di contrazione e dilatazione osmotica, come gli Infusori d'acqua dolce. Con altre osservazioni, non tanto particolareggiate, ma ugualmente significative, la stessa cosa si osserva in altri Infusori marini, come gli *Euplotes charon* ed *harpa* ed altri.

Passiamo adesso ad un'altra serie di esperienze, tendenti a produrre un adattamento graduale degli Infusori marini all'acqua dolce. Riferisco estesamente l'esperienza più completa. E prima alcune illustrazioni tecniche.

I soliti Idroidi, i cui infusi sono spesso ricchi di Infusori, sono posti in un grande bicchiere, la cui capacità è circa di 6 litri. Il bicchiere era stato prima graduato di mezzo litro in mezzo litro, per quanto è possibile esattamente. Dato il suo diametro assai considerevole, ebbi l'avvertenza di fare le letture tenendo il vaso sempre nello stesso posto del banco su cui era disposta l'esperienza, per evitare maggiormente le cause d'errore. Un altro grande bicchiere situato più in alto, era connesso con questo per mezzo di un sifone, in modo che dal recipiente superiore, pieno di acqua potabile, all'inferiore, contenente l'infuso, cadeva continuamente acqua, a gocce; avevo infatti procurato che il sifone versasse molto lentamente, tirandone in punta l'estremità, che era di vetro, e diminuendo ancora la corrente d'acqua per mezzo di un batufolo di cotone idrofilo, introdotto in un punto del tubo. La velocità del deflusso non si è mantenuta costante durante tutta la durata dell'esperienza, ma sempre tale da non portare più di un litro in 24 h. dal recipiente superiore all'inferiore. Nel vaso inferiore, ho messo dapprima un litro d'acqua di mare, a cui ho aggiunto qualche idroide; quando per l'aggiunta graduale dell'acqua potabile la quantità di liquido in esso era notevolmente cresciuta, ne tolsi una gran parte, fino a lasciarvi di nuovo solo un litro di liquido; il riempimento seguitava, e, giunto nuovamente ad esser considerevole, nuovamente tolsi liquido, e così via. Valendomi della graduazione del vaso, era facile calcolare ogni volta a qual punto di diluizione arrivava il liquido, con notevole approssimazione. Passo alla descrizione particolare dell'esperienza.

3 Settembre. 1.000 cmc. di acqua di mare nel vaso (la concentrazione molecolare è approssimativamente uguale a quella di una soluzione di ClNa 3,5 ‰). Si aggiungono

alcuni Idroidi da un infuso contenente molti Infusorî, tra i quali: *Euplotes charon*, *Euplotes harpa*, *Chilodon cucullus*, *Uronema marinum*, ecc.

4. Settembre. Il liquido è arrivato a 1.750 cmc. (concentrazione  $1.000 : 1.750 = 0,55$  rispetto all'acqua di mare presa come unità). Si trovano parecchi cadaveri di Infusorî alla superficie del liquido. Però delle specie sunnominate vivono ancora moltissimi individui i quali non sono rigonfiati.

5 Settembre. 2.300 cmc.; dunque la concentrazione è  $1.000 : 2.300 = 0,4337$  rispetto all'acqua di mare; pari cioè a quella di una soluzione di ClNa 1,52 %. Tolto liquido fino a cmc. 1.250.

6 Settembre. 1.700 cmc.

7 Settembre. Poco aumentato il liquido, a causa di un guasto nell'apparecchio.

8 Settembre. 2.300 cmc. Concentrazione:  $1.250 : 2.300 \times 0,4347 = 0,2362$  rispetto all'acqua di mare; pari cioè a ClNa 0,826 %. Tolta parte del liquido fino a 1.000 cmc.

11 Settembre. 3.000 cmc. Concentrazione:  $1.000 : 3.000 \times 0,2362 = 0,0787$ ; pari così a ClNa 0,275 %. Non c'è più traccia nè di *Euplotes harpa*, nè di *Uronema marinum*; *Euplotes charon*, *Chilodon cucullus* ancora abbondanti e non rigonfiati, al solito. Tolta parte del liquido, fino a 1.000 cmc.

13 Settembre. 2.200 cmc.

16 Settembre. 3.300 cmc. Concentrazione:  $1.000 : 3.300 \times 0,0787 = 0,0238$ ; pari cioè a ClNa 0,083 %. Tolta parte del liquido fino a 500 cmc.

21 Settembre. 3.500 cmc. Concentrazione:  $500 : 3.500 \times 0,0238 = 0,0034$ ; pari cioè a ClNa 0,0119 %, cioè circa 1 per 10.000.

A questo punto si cessa l'esperienza.

Nel considerare i risultati di questa esperienza, dobbiamo tener conto di varî fatti. In primo luogo ci colpisce la differenza con cui gli Infusorî reagiscono ai cambiamenti di concentrazione dell'ambiente, secondochè essi sono gradualî oppure saltuarî. In quest'ultimo caso, si hanno dapprima i fenomeni di rigonfiamento o restringimento, poi le altre fasi della reazione, di cui trattai nelle mie Note sopra citate. Se invece, come nella presente esperienza, la trasformazione dell'ambiente è graduale, la reazione osmotica non esiste più. La diluizione non produce rigonfiamento. Nè alcuna contraddizione vi è tra questo risultato e quelli precedenti; giacchè, se è vero che nel cambiamento repentino si ha una reazione che è soltanto temporanea, perchè dei meccanismi di compensazione insorgono, e ne distruggono l'effetto, è evidente che l'effetto osmotico non si vedrà più, quando la modificazione dell'ambiente sia tanto lenta da permettere che i meccanismi di compensazione abbiano effetto, prima che l'azione della differenza di concentrazione sia osmoticamente sensibile per la cellula. Nell'esperienza fatta si era raggiunta una tale lentezza.

Ma, a parte queste considerazioni, il confronto tra le specie sopravvissute e quelle scomparse, è interessante dal punto di vista osmotico, appunto per la perfetta somiglianza del loro comportamento, dinanzi all'azione delle soluzioni diluite. Sopra è stato detto che un repentino cambiamento di ambiente produce un rigonfiamento negli Infusorî marini, quando si tratta di trasporto in soluzioni diluite; e tra le specie prese in considerazione, vi erano

appunto alcune di quelle che nell'esperienza di adattamento si sono conservate, ed alcune di quelle che non si sono conservate. Ora vediamo che la mancanza di rigonfiamento, per la graduale diluizione dell'ambiente, si verifica in ambedue le categorie di Infusorî. Ciò significa che la sopravvivenza di qualche Infusorio, e la morte di qualche altro, non sono causate da speciali differenze nelle proprietà di permeabilità delle rispettive pareti esterne. Se un Infusorio si lasciasse più facilmente di un altro traversare dal sale, ciò potrebbe costituire una differenza capace di far sopravvivere uno dei due e l'altro no. Quello più permeabile, e quindi meno soggetto a rigonfiarsi, sarebbe probabilmente il più salvo; si osserva sempre, infatti, che gli Infusorî rigonfiati offrono una quantità di sintomi di alterazioni gravi, fino alla distruzione completa della loro struttura cellulare. Ma tali possibilità, tali interpretazioni devono essere affatto escluse; i varî Protozoi studiati non hanno mostrato nessuna differenza nel loro comportamento osmotico. Si potrebbe ancora supporre, che qualche alterazione, dovuta a causa osmotica, piccola e perciò tale da sfuggire all'osservazione, potesse essere la causa della morte degli *Euplotes harpa* ecc.; alterazioni che non si dovrebbero verificare invece nelle altre specie. Ma anche l'*Euplotes harpa* può essere condotto in un ambiente più diluito dell'acqua di mare, e sopravvivere, purchè non sia troppo diluito; e se è condotto in un ambiente poco differente dall'acqua di mare per concentrazione, ma vi è condotto ad un tratto, si rigonfia, e non muore; e può dopo qualche tempo riacquistare i caratteri normali; vale a dire si può produrre in esso un'alterazione per causa osmotica, ben visibile, e quindi certamente molto più forte di quella che abbiamo immaginato potesse avvenire nell'esperienza di adattamento, — di quella che abbiamo immaginato, ma senza vederla —, si può produrre una vera alterazione per causa osmotica, senza cagionare la morte. Resulta evidente da tutte queste considerazioni, che la causa della morte di alcune specie e della sopravvivenza di altre, non è da ricercarsi in proprietà di permeabilità delle membrane esterne, che non si può cioè dare una spiegazione osmotica del fenomeno.

Non sembri inutile tale discussione; in questi tempi, in cui si cercano le differenze chimiche che esistono tra specie molto affini, per mezzo delle proprietà dei sieri (precipitine ecc.), e si tende ad acquistare il concetto che il metabolismo di due specie affini sia altrettanto diverso quanto lo è la loro forma, mi pare abbia interesse, ogni volta che tra due specie si osservi una diversità di comportamento, il ricercare a quali proprietà fisiche o chimiche della loro sostanza vivente si debbano attribuire. Colle presenti esperienze, non si dà una risposta positiva alla questione, per quel che riguarda l'adattabilità degli Infusorî considerati; ma si esclude intanto quella spiegazione che poteva sembrare più spontanea; ed il problema si riporta appunto alle proprietà chimiche delle cellule, di cui alcune possono seguitare a svolgere i loro processi vitali in un ambiente meno ricco di sali del loro abi-

tuale, altre no. Se sia realmente così, e, nel caso affermativo, di quali processi chimici si tratti, tale importante questione, forse molto difficile a risolversi, è per ora completamente aperta.

Venendo ad esaminare quali siano le specie che si sono conservate, e quali no, troviamo, tra le prime, l'*Euplotes charon* e il *Chilodon cucullulus*, specie descritte dagli autori come viventi tanto nel mare che nell'acqua dolce; tra le seconde, l'*Euplotes harpa*, che gli autori descrivono come solo marina, e molte altre specie, delle quali non ho parlato in modo speciale, ma che appartengono unicamente alla fauna marina. Di più, non ha sopravvissuto l'*Uronema marinum*, specie di cui si dice che viva anche nell'acqua dolce. Ma quanto a questa specie, vi è discussione, e sembra, per quello che ne dice il Blochmann (<sup>1</sup>), che non sempre si tratti della medesima specie, tutte le volte che si parla di *Uronema marinum*; nè io potrei assicurare di quale *Uronema marinum* si trattasse nelle mie esperienze.

Il caso più caratteristico ci è dunque offerto dai due *Euplotes*, di cui uno si può adattare alla vita d'acqua dolce, l'altro no. Le mie esperienze hanno perciò confermato sperimentalmente che l'*Euplotes charon* ed il *Chilodon cucullulus* marini e di acqua dolce sono realmente la stessa specie, ed hanno dimostrato che l'*Euplotes harpa* non si trova nell'acqua dolce perchè non vi si può trovare.

Nelle specie studiate, quelle adattabili alla vita nell'acqua dolce non differiscono dunque da quelle non adattabili per proprietà osmotiche o di permeabilità; la ragione della differenza deve risiedere nelle diverse particolarità dei processi chimici che si svolgono nei vari organismi.

**Parassitologia.** — *Studio sui Cytoryctes vaccinae* (<sup>2</sup>). Nota II preliminare della dr. ANNA FOÀ, presentata dal Socio GRASSI.

**PARTE II.** — Mentre sottoponevamo la cornea a diversi trattamenti per confrontare le sue proprietà con quelle del vaccino, abbiamo seguito il modo di comportarsi dei *Cytoryctes* in questi vari ambienti.

Le esperienze venivano generalmente condotte in questo modo: si innestava un coniglio in tutti e due gli occhi procurando per quanto era possibile di avere nelle due cornee un'infezione della stessa intensità. Il coniglio veniva ucciso dopo due giorni e mezzo o tre, cioè quando erano già comparse tutte le forme dei supposti parassiti e non erano ancora caduti estesi tratti di epitelio. Le due cornee venivano trattate contemporaneamente nello stesso

(<sup>1</sup>) Blochmann Fr., *Die Mikroskopische Thierwelt des Süßwassers. Abth. I Protozoa.* Hamburg, 1895 (pag. 99).

(<sup>2</sup>) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Anatomia comparata della R. Università di Roma

modo, poi l'una veniva adoperata per innestare un altro coniglio, l'altra serviva per l'osservazione dei *Cytoryctes*.

Tutti gli esperimenti furono ripetuti parecchie volte; ne riassumo i risultati.

*Azione della glicerina.* — Le cornee di coniglio innestate con vaccino furono messe in glicerina concentrata. Ne furono staccati frammenti di epitelio una volta dopo tre ore, un'altra volta dopo 24 ore, con questi frammenti furono innestati altri conigli; si ebbe in tutte e due i casi un'infezione notevolissima. Non abbiamo insistito ulteriormente perchè altri (Gorini) aveva già dimostrato che il virus corneale si conserva in glicerina per un tempo assai lungo. Più importante era l'osservare il comportarsi dei *Cytoryctes*, e per questo, raschiati dei frammenti di epitelio, ne furono fatti dei preparati chiudendoli nella glicerina stessa. Questi preparati esaminati parecchi mesi dopo, presentavano ancora i *Cytoryctes* coi loro granuli perfettamente conservati, eguali a quelli osservati nei preparati a fresco.

Questo aveva fatto nascere la speranza di riconoscere nei *Cytoryctes* i veri parassiti.

*Disseccamento.* — Anche il virus corneale disseccato, come le pustole cutanee di vitella, si è dimostrato attivo. Le cornee disseccate, adoperate per lo studio dei *Cytoryctes* furono fissate con sublimato, colorite coll'emalume o coll'ematossilina ferrica.

Maggiori particolari saranno pubblicati nel lavoro in esteso, qui accenniamo ai risultati.

Nelle cellule epiteliali si vedevano i nuclei assai raggrinzati, e a volte accanto ad essi si notavano con gran difficoltà dei corpicciuoli intensamente coloriti che per la loro posizione nella cellula potevano ritenersi *Cytoryctes* enormemente rimpiccioliti. Non era escluso tuttavia che i *Cytoryctes* anche così ridotti potessero essere attivi, ma in tal caso era logico supporre che, rimessi in un mezzo adatto, potessero riprendere i caratteri primitivi. Per accertarcene abbiamo ripetuto gli esperimenti rimettendo le cornee disseccate nell'acqua distillata e lasciandovele uno o due giorni. Esse si dimostrarono ancora attive, ma conservate coi soliti mezzi, sezionate ed esaminate con gran cura solo con grandissima difficoltà lasciavano scorgere qualche traccia dei corpuscoli vaccinici. Nelle vicinanze del luogo d'innesto le cellule epiteliali presentavano i nuclei alterati ed alcune mostravano nel protoplasma piccoli corpicciuoli intensamente coloriti, circondati da un alone chiaro. Se questi corpicciuoli erano i *Cytoryctes* certamente non avevano ripreso l'aspetto primitivo, ma erano ancora assai raggrinziti.

*Azione dell'acqua distillata.* — Abbiamo dimostrato sperimentalmente che anche il virus corneale si mantiene attivo per lungo tempo nell'acqua distillata. Le prime esperienze furono da noi fatte innestando l'epitelio corneale rimasto nell'acqua per tre giorni. Più tardi, avendo tentato esperimenti di

filtrazione col virus corneale, abbiamo ripetuto le esperienze inoculando l'acqua torbida in cui erano state immerse le cornee infette per sette ed anche nove giorni. In tutti i casi si è ottenuta l'infezione in altri conigli.

Per studiare il modo di comportarsi dei *Cytoryctes* abbiamo esaminato le cornee lasciate in acqua un'ora, un'ora e  $\frac{1}{2}$ , 6 ore, 24 ore.

Dopo un'ora i *Cytoryctes* erano poco alterati, dopo un'ora e  $\frac{1}{2}$  il loro numero era già minore perchè parecchie cellule nel luogo dell'infezione non li presentavano più, quelli rimasti presentavano un'alterazione che si manifestava nel diverso modo di comportarsi colle sostanze coloranti; infatti nei preparati fissati coi soliti mezzi, coloriti con emallume ed eosina, invece del solito colore violaceo tendevano ad acquistare una tinta rosea.

Dopo sei ore il loro numero era ancora diminuito. Esaminando con grandissima attenzione a forte ingrandimento i preparati coloriti coll'ematosilina ferrica, in alcune cellule epiteliali nel luogo corrispondente al taglio fatto per l'innesto, si vedevano con gran difficoltà attorno ai nuclei estese macchie di aspetto reticolare, sparse di granuli. Siccome queste macchie non si vedevano che nel luogo dell'infezione, bisogna concludere ch'esse rappresentavano, a così dire, un'ombra dei *Cytoryctes* enormemente rigonfiati. È assai importante notare che spesso non era possibile determinare il limite tra queste ombre ed il protoplasma cellulare.

Dopo 24 ore, neanche nel punto in cui fu praticata l'iniezione, non si è più potuto riscontrare nulla che potesse rappresentare i *Cytoryctes*, comunque modificati.

Non abbiamo potuto proseguire le ricerche microscopiche dopo una più lunga permanenza nell'acqua, perchè i lembi infetti di epitelio si distaccano via e le cellule si separano con estrema facilità sì che non è più possibile conservarlo; ma i risultati ottenuti bastano per concludere che mentre l'attività del vaccino non si distrugge nell'acqua distillata, i *Cytoryctes* si alterano enormemente e finiscono per scomparire.

*Azione delle soluzioni di cloruro di sodio.* — L'idea di trattare l'epitelio corneale di coniglio con soluzioni acquose di cloruro di sodio fu suggerita dal dubbio che a costituire i *Cytoryctes* potesse contribuire l'eleidina. Il Ranvier dimostrò che facendo agire sull'epidermide dei mammiferi una soluzione di cloruro di sodio al 10 %, l'eleidina granulosa che si trova nello *strato granuloso*, si trasforma nell'eleidina diffusa, che si trova nello *strato intermedio* compreso tra lo *strato granuloso* e lo *strato lucido*. Con questo stesso reattivo abbiamo trattata la cornea di coniglio innestata con vaccino.

È facile dimostrare che l'eleidina non ha niente a che fare coi *Cytoryctes* osservando le sezioni di pustole vacciniche cutanee di coniglio. Noi abbiamo ottenuto queste pustole innestando il vaccino sulle labbra e sul dorso del coniglio. Nelle sezioni della pelle del labbro, fissata con sublimato e colorita coll'emallume si vedono i *Cytoryctes* analoghi a quelli che si trovano nella

cornea, coloriti meno intensamente dei nuclei delle cellule epidermiche, mentre si distinguono benissimo i granuli di eleidina coloriti fortemente in violetto, tanto intensamente quanto la cromatina dei nuclei cellulari. Collo stesso pezzo abbiamo fatto sezioni colorite col metodo di Biondi; in queste mentre i *Cytoryctes* si vedono benissimo, l'eleidina non si distingue più nettamente.

Esaminando l'epitelio corneale di coniglio innestato con vaccino, tenuto per 24 ore in soluzione di cloruro di sodio al 10 %, si direbbe a tutta prima che i supposti parassiti fossero scomparsi. Nei preparati a fresco in acqua e glicerina, mezzo in cui i *Cytoryctes* normali si osservano facilmente, non siamo più riusciti a scoprirne le tracce. Nelle sezioni ottenute fissando l'epitelio in sublimato, colorendolo coll'emallume, non si rinvenne a tutta prima nessun corpuscolo vaccinico. Però con ricerche accuratissime in sezioni molto sottili, si trovarono alcuni pochi corpicciuoli che si riconobbero quali resti di *Cytoryctes*, perchè si rinvennero solo accanto ai nuclei di alcune cellule in vicinanza del punto in cui fu praticato il taglio, ma che di *Cytoryctes* non conservavano neanche la più lontana apparenza. Si presentavano infatti come corpuscoli minutissimi irregolari, congiunti quasi sempre con filamenti sottilissimi al protoplasma cellulare.

Prolungando l'azione della soluzione di cloruro di sodio al 10 % per 37 ore, 48 ore, e anche per quattro giorni, i preparati dell'epitelio si presentarono presso a poco nello stesso modo. Non ostante questa profonda alterazione dei *Cytoryctes* l'epitelio innestato in altri conigli, in tutti i casi ha prodotto ancora la formazione di *Cytoryctes* normali in quantità certamente non minore di quella ottenuta coll'innesto del vaccino non alterato.

Perfino dopo aver tenuto la cornea in cloruro di sodio per quattro giorni, non era distrutta l'attività del vaccino.

Questi risultati importantissimi ci hanno indotto a continuare le esperienze variando l'intensità della soluzione. Abbiamo perciò trattato il virus corneale con soluzione satura di cloruro di sodio, tenendovelo per 24 ore. In questo caso, forse per l'azione più energica e rapida del reattivo, i *Cytoryctes* sono rimasti impiccoliti, ma meno alterati che nella soluzione precedente: sembra abbiano subito una sorta di fissazione. L'epitelio si è dimostrato ancora attivo.

Abbiamo cercato se fosse stato possibile seguire meglio le alterazioni dei *Cytoryctes* trattandoli con soluzioni deboli, e per questo abbiamo usata la soluzione di cloruro di sodio al 2 %. Le cornee infette furono fissate coi soliti mezzi dopo averle lasciate nel reattivo per sei ore. I *Cytoryctes* apparivano più piccoli, meno numerosi e si comportavano diversamente colle sostanze coloranti. Nei preparati coloriti con ematossilina ferrica ed eosina, le forme più piccole tondeggianti, invece del solito colore nero intenso prendevano una tinta rossastra, nelle cellule epiteliali più vicine al taglio, dove si trovano sempre le forme più grandi, spesso si vedevano solo tanti granuli

sparsi per il protoplasma e non si riconosceva sotto ai granuli la massa chiara, a volte s'intravedeva ma assai poco colorita.

Riassumendo: questa seconda serie di ricerche ha dimostrato che i *Cytoryctes* possono alterarsi in svariati modi fino a scomparire, senza che il vaccino perda la propria attività.

PARTE TERZA. *Studi sulla clavelée*. — Queste ricerche furono intraprese in seguito alle pubblicazioni del Bosc, il quale studiando il vaiolo delle pecore (*clavelée*) descrisse forme analoghe a quelle che si riscontrano nel vaccino, ma a quanto appariva dalle figure del Bosc, secondo ogni probabilità, più facili ad essere interpretate. Noi ne intraprendemmo lo studio colla speranza che ne venisse qualche luce sulla natura dei corpuscoli vaccinici.

Innestammo la *clavelée* (gentilmente inviataci dallo stesso prof. Bosc e poi dal prof. Nocard) in parecchie pecore, e studiammo le pustole cutanee sviluppatesi su di esse, servendoci degli stessi mezzi di fissazione e colorazione usati per lo studio dei *Cytoryctes vaccinae*.

Senza entrare per ora in una descrizione particolareggiata, possiamo dire in generale che i corpuscoli della *clavelée* presentano somiglianza coi corpuscoli vaccinici. Nei preparati ottenuti da pezzi fissati in soluzione satura di sublimato con 0,50 % di cloruro di sodio, coloriti colla miscela di Biondi, i corpuscoli della *clavelée* apparivano costituiti da una massa azzurra di dimensioni svariate, e da una quantità di granuli rossi. A differenza di quanto si osservava nei corpuscoli vaccinici, si notava spesso un granulo centrale assai più grande di tutti gli altri, e tale da apparir quasi come un nucleo, ma questo grosso granulo a volte mancava, spesso era rotondo, talvolta ovale a cifra otto, o doppio. Gli altri granuli erano disposti in maniere variabilissime, per lo più se ne trovavano parecchi alquanto allontanati dalla massa azzurra e congiunti ad essa per mezzo di fili sottilissimi disposti a raggiera, altri erano separati affatto ed isolati nel protoplasma cellulare. Questi corpuscoli si vedevano soprattutto abbondantissimi nelle ghiandole sebacee dov'erano situati accanto ai nuclei, uno per cellula, come i *Cytoryctes*.

Certamente queste forme di struttura così complicata, a tutta prima per il loro aspetto fanno pensare ad esseri viventi, ed anzi a protozoi, ma anche qui studiando con attenzione, non si riesce a stabilire i confini del supposto parassita, perchè in alcune forme i granuli si spargono in tutte le direzioni e vengono a trovarsi in grandissima parte del protoplasma cellulare. Non si segue un ciclo di sviluppo, che in forme così grandi dovrebbe riscontrarsi facilmente. Inoltre, a contrastare la loro natura parassitaria si aggiunge il fatto che il virus della *clavelée* può passare attraverso la candela F, di Chamberland. Le esperienze a questo proposito furono fatte da Borrel, il quale ha ottenuto un filtrato attivo col contenuto di una pustola

diluito in 100 cm<sup>3</sup> d'acqua. Il liquido filtrato era ancora attivo, diluito 100 volte ed in alcuni casi anche 500.

Questi risultati sono di grandissimo valore anche perchè, dimostrando l'attività delle soluzioni diluitissime, danno un fondato motivo per dubitare che le supposte culture di vaccino, ottenute dall'Ishigami solo per poche generazioni, non sieno altro che diluizioni del primo virus inoculato.

CONCLUSIONI. — Da quanto abbiamo esposto ci sembra si possano ricavare le conclusioni seguenti:

I. La struttura dei *Cytoryctes* non rivela in essi nessun carattere che possa farli riconoscere per esseri vivi. I movimenti ameboidi non furono riscontrati non solo da noi, ma neanche dall'Hüchel, le cui osservazioni, per comune consenso, sono ritenute esatissime; non si distingue un protoplasma ed un nucleo, e neanche la presenza di cromidi o di rete cromidiale, manca un ciclo di sviluppo. Tutti questi caratteri escludono che si tratti di protozoi.

Alcune forme potrebbero far pensare a batteri, ma la struttura di batterio non si può dimostrare (infatti mancano i cromidi, manca la cosiddetta membrana, non vi sono cilia, non si ottennero mai fenomeni di plasmolisi. Non si colorano come i batteri).

La supposizione che i granuli fossero essi stessi i batteri o forme durature, da noi presa in considerazione, si è dovuta escludere perchè i granuli stanno sempre alla superficie e mai nell'interno del supposto parassita, per la loro somma irregolarità, per il loro modo di comportarsi colle sostanze coloranti ecc.

Infine non si può stabilire un limite tra il supposto parassita e le forme che sono sicure alterazioni del protoplasma cellulare.

II. Mentre il virus corneale sottoposto all'azione del disseccamento, dell'acqua distillata, delle soluzioni di cloruro di sodio, conserva la propria attività, i *Cytoryctes* si alterano enormemente o scompaiono affatto.

In nessun caso, in nessuno stadio si osserva la formazione di cisti protettive, fatto che si verifica in tutti i protozoi capaci di resistere a mutamenti d'ambienti e sopravvivere ad una permanenza in ambienti sfavorevoli. Non si riscontrano forme paragonabili alle spore durature dei batteri.

III. Il fatto che il virus della *clavelée* passa attraverso la candela F di Chamberland, pur essendo i corpuscoli della *clavelée* certamente non più piccoli dei corpuscoli vaccinici, dimostra che i risultati negativi costantemente ottenuti nei tentativi di filtrazione del vaccino, non bastano a provare che i parassiti del vaccino debbano avere dimensioni considerevoli e quindi essere identificati coi *Cytoryctes*.

Per tutti questi motivi noi riteniamo che i *Cytoryctes* non sono esseri viventi parassiti del vaccino, senza però escludere che essi possano contenere i veri parassiti, non visibili coi nostri mezzi attuali d'indagine.

**Fisiologia.** — *Di una modificazione macroscopica del sangue che precede la coagulazione.* Nota del dott. V. DUCCESCHI, presentata dal Socio LUCIANI.

Stimo non privo di interesse il richiamare l'attenzione sopra i particolari di un fenomeno che in determinate condizioni può osservarsi assai facilmente a ad occhio nudo nel sangue estratto dai vasi.

Dal polpastrello del dito di un individuo normale si facciano uscire a mezzo della puntura con un ago o con un sottile bisturi 3 o 4 gocce di sangue e si raccolgano in un vetro di orologio. Se ora si distende un poco il sangue, s'inclina leggermente e più volte a distanza di pochi secondi il vetro e se ne osserva il fondo rivolto verso una sorgente luminosa (la finestra od una lampada) si noterà che nello spazio di 40"-50" ad 1'-2', raramente più tardi, appariscono sul fondo del vetro d'orologio nel posto occupato dal sangue tanti punti o granuli minutissimi, biancastri, che spiccano abbastanza bene sul colorito rosso del sangue ancora aderente al vetro. Agitando leggermente il sangue coll'inclinare il vetrino e tornando a ripetere l'osservazione, si noterà che tali granulazioni vanno successivamente crescendo di volume e si fanno sempre più evidenti, restando biancastre, ialine e facendosi marcatamente rilevate sul piano del vetro. Questi granuli raggiungono per lo più il diametro di  $\frac{1}{4}$  a  $\frac{1}{2}$  mm. all'incirca; essi sono generalmente assai numerosi ed assai ben visibili ad occhio nudo. Aumentando di volume essi possono riunirsi o perdere l'aspetto rotondeggiante più o meno regolare che è loro proprio, formandosi infine dei fiocchetti di volume variabile. Col coagulare della piccola raccolta di sangue, tali produzioni non sono quasi più visibili; se si vuole conservarle in uno degli stadi primitivi, si deve far scorrer via dal vetrino, ponendolo verticale, il sangue sovrastante ad esse; le granulazioni caratteristiche restano per la maggior parte aderenti al fondo del vetro di orologio, sul quale fanno spiccatamente rilievo.

Un tal fenomeno si riscontra non solo nel sangue umano di soggetti normali, ma anche nel sangue di cane, di coniglio, di cavia, di pollo, di tartaruga e di rana, quando si usi il procedimento ora indicato; sono sempre gli stessi granuli jalini, biancastri, rotondeggianti, più o meno aderenti al fondo del vetrino, che compaiono, prima che avvenga la coagulazione, presso a poco nello stesso spazio di tempo, cioè da qualche diecina di 1" ad 1'-3' dopo che il sangue fu estratto dai vasi. Non tralascerò di notare che nelle numerosissime osservazioni che ho compiute nell'uomo e nei vertebrati ora citati, nemmeno una volta mi avvenne di veder fallire la prova. La forma-

zione dei granuli manca del tutto se si fa cadere il sangue in una quantità presso a poco uguale di ossalato ammonico all' 1 %.

Se dopo aver raccolto il sangue su di un vetrino portaoggetti ampio a sufficienza si esaminano quei corpicciuoli a debole ingrandimento, essi appaiono come accumuli irregolari, biancastri, di granulazioni non sempre ben distinte; fissando il preparato, che si è lasciato seccare all'aria, con una miscela di alcool-etere e colorando con una soluzione all' 1% di bleu di metilene, le granulazioni assumono un colorito bleu diffuso nel quale spiccano dei piccoli punti di un color bleu più vivo; i globuli rossi circostanti hanno un colorito verdastro. Con un ingrandimento maggiore si può riconoscere che gli accumuli bleu son formati da una quantità grandissima di piastrine più o meno alterate e da un numero assai minore di leucociti i cui nuclei si colorano assai più intensamente delle piastrine. Insieme agli accumuli visibili anche macroscopicamente, se ne trovano molti altri microscopici che sono costituiti da un numero assai minore di piastrine e nei quali i leucociti possono anche mancare del tutto.

Se si fa l'esame in un primo stadio della formazione dei granuli, quando essi sono piuttosto piccoli, allora si nota al microscopio, con le comuni reazioni coloranti, che la formazione della fibrina è assai scarsa o nulla; si tratta quindi di un fatto che precede la coagulazione od almeno la precorre.

Gli stessi aspetti microscopici si hanno per il sangue di pollo, di tartaruga e di rana; anche qui sono in prevalenza e talvolta da sole le piastrine nucleate che formano tali accumuli; i leucociti vi partecipano in misura variabile a seconda degli individui e delle specie animali.

È alle piastrine che si deve attribuire dunque con tutta verosimiglianza la parte principale nella produzione di questi granuli macroscopici che compaiono in un primo tempo dopo la raccolta del sangue. Se invece di poche gocce si riceve una notevole quantità di sangue (di coniglio) in un bicchiere, si noterà, inclinando lentamente il recipiente e ripetendo più volte l'osservazione a piccoli intervalli di tempo, che le granulazioni caratteristiche si sono formate tanto in corrispondenza delle pareti del vaso quanto sul fondo di esso. Il fenomeno non deve quindi intendersi come circoscritto al procedimento che io ho descritto in precedenza e che risponde semplicemente allo scopo di renderlo più evidente e più agevole ad osservarsi; tanto nell'un caso come nell'altro però il movimento del sangue nel vetrino o nel bicchiere facilita assai ed in gran parte promuove la produzione del fenomeno; i granuli sono infatti scarsissimi quando il sangue si tenga perfettamente in riposo.

Del resto è un fatto conosciutissimo che le piastrine abbiano la tendenza ad aderire alle superfici che non siano quelle normali dei vasi sanguigni ad a raccogliersi in accumuli; questo fatto fu notato anche da coloro

[Schultze <sup>(1)</sup>, Riess <sup>(2)</sup>], che precedettero il Bizzozero <sup>(3)</sup> e l'Hayem <sup>(4)</sup> in uno studio più minuto delle piastrine, del modo di formarsi e delle modificazioni successive di quegli accumuli e dei rapporti di essi con la trombosi e la coagulazione.

Ma tutti questi Osservatori si curarono solo degli aspetti microscopici del fenomeno; probabilmente tanto essi quanto i più recenti studiosi del sangue ed anche più specialmente delle piastrine, non ebbero forse nemmeno campo di osservarlo nei suoi aspetti caratteristici macroscopici. Infatti la maggior parte delle ricerche sul sangue usa compiersi o raccogliendolo in strati piuttosto notevoli (come per ottenere il siero) che nascondono facilmente la formazione delle granulazioni caratteristiche, o distendendolo in strati sottilissimi sotto il vetrino coprioggetti, ponendosi cioè in condizioni siffatte da rendere impossibile la produzione di accumuli di elementi bianchi, tali da esser visibili ad occhio nudo; in altri casi è l'aggiunta al sangue di speciali reagenti adatti a conservare questo o quell'elemento morfologico che impedisce la comparsa dei grossi accumuli.

Sia l'una o l'altra di queste ragioni io non ho potuto trovare nei trattati generali di fisiologia, nei trattati speciali sul sangue, e nelle memorie più importanti sugli elementi morfologici del sangue stesso, nessuna menzione di questa modificazione macroscopica, quale io l'ho descritta, di questo fenomeno così caratteristico che precede, nelle condizioni di esame da me accennate, la coagulazione nei suoi aspetti visibili ad occhio nudo e che comparisce costantemente in tutte le forme di vertebrati sulle quali ho potuto sperimentare. L'unica allusione al fatto che gli accumuli di piastrine possono divenir visibili ad occhio nudo nel sangue fuoriuscito dai vasi, appartiene al Bizzozero, che ne accenna fugacemente a proposito del sangue di rana; ma sembra che egli abbia osservato quel fatto come un fenomeno isolato e non nella forma caratteristica e costante nella quale io l'ho descritto, perchè nè nelle altre pubblicazioni sue nè in quelle dei suoi allievi se ne trova qualche cenno.

L'Hayem, che tanto si è occupato delle modificazioni dei suoi ematoblasti a contatto con le pareti alterate dei vasi o con corpi estranei, sembra aver rivolta la sua attenzione solo agli aspetti microscopici delle sue *concretions hématoblastiques*. In un punto solo della sua opera (l. c. pag. 378), egli dice che se si fa cadere il sangue di individui che si trovino in determinate condizioni patologiche (p. es. polmonite) in una quantità da 250 a 500 volte maggiore del suo liquido A e si agiti il miscuglio, si formano

(1) Schultze, Arch. f. mikr. Anat. vol. I, s. 1-42, 1865.

(2) Riess, Arch. f. Anat. u. Physiol. 1872, s. 237.

(3) Bizzozero, *Di un nuovo elemento morfologico del sangue e della sua importanza nella trombosi e nella coagulazione*. Milano, Vallardi, 1883.

(4) Hayem, *Du sang et de ses altérations anatomiques*. Paris, Masson, 1889.

« de petites concrétions rougeâtres qui troublent le liquide. Les plus volumineuses se distinguent facilement à l'œil nu. » Queste concrezioni o « plaques » sarebbero formate « par une matière finement granuleuse, parfois en partie fibrillaire, très visqueuse, dans laquelle sont englués de nombreux hémoblastes plus ou moins rétractés. A cette matière visqueuse est venu s'attacher par le fait du battage un nombre variable de globules blancs et d'hématies ». Queste *plaques* che secondo l'Hayem costituirebbero « un carattere important du sang phlegmasique », mi sembra che rappresentino per il procedimento col quale si ottengono, per le condizioni patologiche nelle quali compariscono e per gli aspetti macroscopici e microscopici di esse (il colorito rossastro, la presenza di una sostanza granulosa e di una parte fibrillare e la partecipazione delle emazie) qualche cosa di ben diverso dalle granulazioni che io ho descritte.

Il fenomeno sul quale io ho creduto opportuno di richiamare l'attenzione può ritenersi come una manifestazione della proprietà che possiedono le piastrine di agglutinarsi fra loro, specialmente allorchè il sangue si trovi in contatto con superficie che non siano quelle dei vasi normali. Questa *agglutinazione* invocata così efficacemente da alcuni [Eberth e Schimmelbusch <sup>(1)</sup>, Lukjanow <sup>(2)</sup>], a proposito della prima fase della formazione del trombo bianco, costituisce un fatto ben distinto morfologicamente e fisiologicamente dalla coagulazione. Nel caso nostro, ossia nelle condizioni più semplici e più comuni nelle quali si esamini il sangue, senza che intervenga l'azione di alcun reattivo, la detta agglutinazione rappresenta in ordine al tempo la prima modificazione macroscopica del sangue fuoriuscito dai vasi, quando sia raccolto ed osservato nelle condizioni che ho descritte. Ciò che mi ha indotto ad occuparmi di questo fenomeno non è solo il difetto assoluto di menzione di esso nei trattati e nelle memorie speciali sul sangue, ma anche due altre ragioni alle quali accennerò ora in breve.

Quando nella maggior parte degli invertebrati si estraiga dai vasi o dalle cavità del corpo una certa quantità di sangue, il fenomeno più comune e costante che si osserva, è il riunirsi di una gran parte degli elementi morfologici, generalmente incolori, in aggruppamenti più o meno abbondanti, spesso visibili ad occhio nudo sotto la forma di granulazioni di volume variabile, di fiocchetti o di piccoli grumi (sincizî o plasmodi). Questo fenomeno, già studiato da diversi osservatori [Geddes <sup>(3)</sup>, Cattaneo <sup>(4)</sup>, Bot-

(1) Eberth. w. Schimmelbusch, Virchow's Archiv. f. pathol. Anat. Bd. 108, 1887, s. 357-381.

(2) Lukjanow, *Grundzüge einer allgemeinen Pathologie d. Gefäßsystems*, Leipzig, Veit e C<sup>o</sup>, 1894, s. 127 e seg.

(3) Geddes, *Proceed. of the Roy. Soc.*, vol. XXX, 1879-80.

(4) Cattaneo, *Atti Soc. Ital. sc. nat.*, XXXI, 1888, pag. 231; *Archives ital. de Biol.* t. XV, 1891, p. 409.

tazzi <sup>(1)</sup>], e che può considerarsi in un suo primo tempo come un vero e proprio fatto di agglutinazione, costituisce in alcuni ordini di invertebrati marini presso che l'unica modificazione che subisce il sangue sottratto ai rapporti normali dell'organismo. Di ciò ho avuto occasione di persuadermi recentemente nel corso di alcune ricerche sulla coagulazione del sangue negli invertebrati marini <sup>(2)</sup>. Questo fatto dell'agglutinazione riesce bene evidente perchè nella maggior parte di quegli esseri il sangue è costituito unicamente da elementi incolori, che partecipano in buon numero al fenomeno, il quale inoltre non è mascherato, come avviene nei vertebrati, dal predominio numerico di elementi colorati, i quali restino sospesi nel liquido durante il breve tempo che precede la coagulazione. La formazione di un vero e proprio reticolo fibrinoso si osserva solo in poche forme di animali inferiori.

Ora la formazione dei plasmodi e sincizi negli invertebrati ed il riunirsi delle piastrine in accumuli costituisce probabilmente un processo unico, rilevabile nei due sottoregni animali non solo nei suoi aspetti più minuti, microscopici, ma anche nelle sue forme grossolane, macroscopiche. E ciò si trova bene in accordo con l'opinione di chi (Dekhuyzen <sup>(3)</sup>) ha ammesso di recente che un'unica specie di elementi morfologici del sangue (trombociti), assai simili anche per la forma nelle diverse specie animali, promuova sia nei vertebrati che negli invertebrati la coagulazione del sangue. Si può pensare allora che lo stesso elemento promuova nella serie animale il fenomeno dell'agglutinazione, che costituisce come già ho detto, la prima modificazione morfologica del sangue estratto dai vasi o dalle lacune o cavità del corpo (in alcuni invertebrati), e che precede cronologicamente e geneticamente la produzione della fibrina, nei casi in cui questa si forma, poichè in molte specie di animali inferiori tutto sembra ridursi al primo stadio. Delle due modificazioni alle quali va incontro il sangue fuoriuscito dai vasi, cioè l'agglutinazione di speciali elementi morfologici e la formazione di fibrina, la prima apparisce perciò più diffusa e costante della seconda, se si considera che quest'ultima sembra difettare in non poche forme di invertebrati. Nei vertebrati però l'agglutinazione si riscontra in tutti i tipi che ho avuto l'opportunità di esaminare.

Un'altra ragione mi ha spinto ad occuparmi di quel fenomeno. Io l'ho veduto mancare del tutto, o comparire assai più tardi od in minori proporzioni, in alcune condizioni sperimentali dell'organismo, così nel cane dopo iniezioni in circolo di peptone che rendeva incoagulabile il sangue, e nel coniglio dopo l'iniezione di estratto di teste di sanguisughe. Sembra dunque che il fatto dell'agglutinazione delle piastrine sia capace di larghe oscilla-

(1) Bottazzi, Arch. ital. de Biol., t. XXXVII, 1902, pag. 49.

(2) Ducceschi, Beiträge z. chem. Physiol. u. Pathol., Bd. III, s. 378, 1902.

(3) Dekhuyzen, Anat. Anzeiger., XIX Bd. s. 529, 1901.

zioni nella sua intensità. Io non ho avuto l'occasione di ricercare (e non è mio compito il farlo) come si comporti quel fenomeno negli stati morbosi dell'organismo umano. Data però la rimarchevole costanza di esso nei soggetti normali e data la facilità e la semplicità di mezzi con i quali si può rilevarlo, vale forse la pena che sia studiato, dal lato della patologia e della diagnostica, il comportarsi di esso nelle varie condizioni morbose che interessano direttamente od indirettamente il sangue; tanto più che, stando ai risultati degli scarsi osservatori che si sono occupati delle modificazioni patologiche delle piastrine [Hayem <sup>(1)</sup>, Afanasiew <sup>(2)</sup>, Fusari <sup>(3)</sup>, Pizzini e Fornaca <sup>(4)</sup>], quegli elementi subirebbero in varie malattie delle notevolissime oscillazioni nel numero, fino alla scomparsa completa.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci PIROTTA, FISCHER, LOCKYER e WIESNER; fa inoltre particolare menzione del vol. III delle *Opere di Galileo Galilei*, edizione nazionale sotto gli auspici di S. M. il Re, e delle due pubblicazioni seguenti: *Il primo secolo dell'Ateneo di Brescia 1803-1902* e: *Joannis Bolyai in memoriam*, dono della Università di Kolosvar.

Il Vicepresidente BLASERNA presenta il 3° volume, inviato in dono da S. A. R. il Duca degli Abruzzi, della Relazione sul viaggio della « Stella Polare », contenente le *Osservazioni scientifiche*, eseguite durante il viaggio stesso; il senatore BLASERNA parla delle varie questioni che nel volume sono trattate, mettendone in rilievo la importanza. Su proposta del Socio TODARO la Classe approva unanime l'invio di speciali ringraziamenti al Duca degli Abruzzi pel suo dono prezioso.

### CONCORSI A PREMI

Il Segretario CERRUTI comunica che ai concorrenti ai premi Ministeriali del 1902, per le *Scienze fisiche e chimiche*, dei quali venne dato l'elenco nella seduta del 4 gennaio scorso, devono aggiungersi i seguenti, che inviarono al Ministero della Pubblica Istruzione in tempo utile i loro lavori:

1. GIBELLI GAETANO. — 1) *Natura delle cose* (ms.). — 2) *Telosenso* (st.).

(1) L. c.

(2) Afanasiew, Deutsch. Arch. f. klin. med., Bd. 35, s. 217.

(3) Fusari, Arch. p. le scienze med., vol. X, 1886, pag. 235.

(4) Pizzini e Fornaca, Riforma medica. 1894, vol. I, pag. 735; vol. II, pag. 375.

2. BOGGIO LERA ENRICO. — 1) *Una relazione fra il coefficiente di compressibilità cubica e il peso atomico* (st.). — 2) *Calcolo della forza elettrica nella scarica fra due sfere* (st.). — 3) *Sopra un'equazione analoga a quella dei gas e valevole per metalli* (st.). — 4) *Sul lavoro interno nella dilatazione dei solidi* (st.). — 5) *Sull'azione della corrente elettrica sopra i vini acetosi* (st.). — 6) *Nuovo metodo per la determinazione dell'alcool* (st.). — 7) *Significato della costante  $\frac{HV}{T}$  e risposte alle critiche fatte a questa nota* (st.). — 8) *Sulla temperatura di ebollizione dei composti chimici di serie omologhe* (st.). — 9) *Sopra un apparecchio registratore delle scariche elettriche dell'atmosfera* (st.). — 10) *Sui miei apparecchi segnalatori e registratori dei temporali* (st.). — 11) *Un'utile modificazione del coherer per gli apparecchi registratori dei temporali* (st.). — 12) *Sopra una nuova forma della funzione potenziale* (st.).

3. MONTI VIRGILIO. — 1) *Il nubifragio del 27 settembre 1900 a Savona* (st.). — 2) *Esiste una influenza delle detonazioni vulcaniche sulla grandine?* (st.). — 3) *Contributo allo studio dell'influenza delle montagne sulla caduta della grandine* (st.). — 4) *Nuove ricerche intorno all'influenza delle montagne sulla grandine* (st.). — 5) *Ancora dell'influenza delle montagne sulla grandine* (st.). — 6) *Sulla intensità e sulla frequenza del tuono durante la caduta della grandine grossa* (st.). — 7) *Sull'intensità dei fenomeni elettrici durante le grandinate gravi* (st.). — 8) *Sui temporali accompagnati da neve* (st.). — 9) *Meteorologia e climatologia della Grecia in Omero* (st.). — 10) *Sulla meteorologia nei poeti latini* (st.). — 11) *Sulla distribuzione della grandine in Italia a seconda delle stagioni* (st.). — 12) *Sulla distribuzione e grandiosità dei temporali in Italia* (st.). — 13) *Sulla distribuzione dei temporali e della grandine in Italia a seconda dei luoghi e delle stagioni* (st.).

La Classe decide che il tema pel concorso al premio *Carpi*, pel biennio 1903-1904, sia il seguente: *Contributo allo studio delle funzioni del fegato nella serie animale.*

## CORRISPONDENZA

Il Vicepresidente BLASERNA, in seguito a domanda della famiglia Bartoli, presenta ed apre un piego suggellato del defunto prof. ADOLFO BARTOLI; il piego contiene una Memoria intitolata: *Su la trasformazione in correnti elettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento.*

Questo lavoro sarà sottoposto all'esame di una Commissione.

Lo stesso Vicepresidente comunica il seguente telegramma che il signor G. MARCONI mandava in risposta a quello di felicitazione inviatogli dall'Accademia:

Glace Bay 5-1-1903

Senatore Blaserna, Accademia Lincei, Roma

Ringrazio per graditissimo telegramma. Spero poter preparare desiderata relazione.

MARCONI.

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La Società Reale delle scienze di Upsala; l'Accademia di scienze naturali di Filadelfia; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; l'Istituto geodetico di Potsdam; l'Osservatorio astronomico di Vienna; l'Università di Upsala; la Direzione della R. Scuola navale superiore di Genova.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società italiana delle scienze, detta dei XL, di Roma.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 1° febbraio 1903.*

Osservazioni scientifiche eseguite durante la spedizione polare di S. A. R. Luigi Amedeo di Savoia, duca degli Abruzzi, 1899-1900. Milano, Hoepli, 1903. 4°.

Il primo secolo dell'Ateneo di Brescia. 1802-1902. Brescia, 1902.

*Bail O.* — Versuche über die Verwesung pflanzlicher Stoffe. Jena, 1902. 8°.

*Barone G.* — La grande pluie météorique de novembre 1899. Bruxelles. s. a. 4°.

*Baldi M. C.* — Nuova edilizia romana. III. Roma, 1903. 8°.

*Colonna F.* — Il Museo civico di Napoli. Napoli, 1902. f.°

*Czapek F.* — Untersuchungen über die Stickstoffgewinnung und Eiweißbildung der Schimmelpilze. II. III. Braunschweig, 1902. 8°.

*Galilei Galileo.* — Le opere. — Edizione nazionale. Vol. XII. Firenze, 1902.

*Gallardo Angelo.* — La riqueza de la Flora argentina. Buenos Aires, 1902. 8°.

*Kraus R. und Kreisel B.* — Ueber den Nachweis von Schutzstoffen gegen Hundswut beim Menschen. Jena, 1902. 8°.

- Kraus R. und Maresch R.* — Ueber die Bildung von Immunsustanzen gegen das Lyssavirus bei natürlich empfänglichen und unempfindlichen Thieren. Leipzig, 1902. 8°.
- Koelliker A.* — Die Golgifeier in Pavia. Jena, 1902. 8°.
- Joannis Bolyai in memoriam.* Claudiopoli, 1902. 4°.
- Lockyer N. and Lockyer W. J. S.* — " On the Similitary of the Short-period Pressure Variation over Large Areas ". S. l. e a. 8°.
- Macchiati L.* — Sur la photosynthèse en dehors de l'organisme. Paris, 1902. 4°.
- Mogni A.* — Nuova teorica della legge d'oscillazione del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra. Jesi, 1903. 8°.
- Nery Vollu L.* — Théorie analytique des formes et des queues cométaires. S. l. e a. 8°.
- Pirotta R. e Chiovenda E.* — Illustrazione di alcuni Erbarii antichi Romani. Genova, 1902.
- Rovere D. (Della)* — Per la genesi del Lipoma, Milano, S. a. 8°.
- Id.* — L'infezione del bacillo itteroide negli animali poichilotermi. Bologna, 1902. 8°.
- Id.* — Due casi di Lipoma della pia meninge. Milano, 1901. 8°.
- Id.* — Alterazioni istopatologiche nella morte per freddo. Reggio-Emilia, 1900. 8°.
- Id.* — Nuovi mezzi di coltura ricavati dall' *Helix pomatia*. Milano, 1902. 8°.
- Id. e Vecchi B. (De).* — Anomalia del cervelletto. Firenze, 1902. 8°.
- Viola C.* — Beziehung zwischen Cohäsion, Capillarität und Wachstum der Krystalle. Leipzig, 1902. 8°.
- Id.* — La supposta vita dei cristalli. Roma, 1902. 8°.
- Id.* — Sulla legge fondamentale dei cristalli. Firenze, 1902. 4°.
- Virchow R.* — Dell'educazione medica. Discorso: Padova. 1879. 8°.
- Wiesner J.* — Die Rohstoffe des Pflanzenreiches. Versuch einer technischen Rohstofflehre des Pflanzenreiches etc. Vol. 2. Leipzig, 1900. 1903. 8°.

#### DISSERTAZIONI ACCADEMICHE

DELLE UNIVERSITÀ GERMANICHE " FRIEDRICH-WILHELM " DI BONN, DI GREIFSWALD E " FRIEDRICH " DI HALLE-WITTENBERG.

---

- Ackermann A.* — Ueber die Anatomie und Zwitterigkeit der *Cucumaria laevigata*. Leipzig, 1902. 8°.
- Adolph K.* — Ueber Hydrocele. Bonn, 1902. 8°.
- Amdohr P.* — Ueber zwei Fälle von Chorea chronica progressiva. Greifswald, 1901. 8°.

- Baedorf H.* — Ueber die Stauungspapille bei Gehirntumoren und über die Erfolge der medicinischen und chirurgischen Behandlung der Gehirntumoren. Bonn, 1902. 8°.
- Bahrens A.* — Die Hetolbehandlung der Lungenschwindsucht. Bonn, 1902. 8°.
- Balewhi M.* — Die hypnotische Wirkung des Metachlorals. Halle, 1902. 8°.
- Bartelt K.* — Ueber Merkaptole und Sulfone der Diketone. Greifswald, 1901. 8°.
- Barten E.* — Ein Beitrag zur Kenntnis der acuten Alcoholpsychosen. Greifswald, 1902. 8°.
- Baumgarth H.* — Cor biloculare mit Dexiokardie. Halle, 1902. 8°.
- Bebber R. van* — Ueber Totalresection langer Röhrenknochen bei acuter eitriger Osteomyelitis. Greifswald, 1902. 8°.
- Berger F.* — Ueber die Resultate der Gelenkresectionen bei Arthritis deformans. Köln, 1901. 8°.
- Blake J. E.* — Versuche über Vioform, mit besonderer Beziehung auf dessen möglichen Gebrauch als ein Ersatzmittel für Jodoform in der konservativen Behandlung tuberkulöser Gelenke. Bonn, 1902. 8°.
- Bloebaum C.* — Ueber Cranioclasie. Bonn, 1902. 8°.
- Bode H.* — Die Erhaltung der Bodenkraft im Pachtvertrage. Halle, 1902. 8°.
- Brehmer K.* — Ueber die operative Behandlung der Tumoren des Kleinhirns. Bonn, 1902. 8°.
- Brodnitz G.* — Vergleichende Studien über Betriebsstatistik und Betriebsformen der englischen Textilindustrie. Halle, 1902. 8°.
- Buchholz H.* — Untersuchung der Bewegung vom Typus  $2/3$  im Problem der drei Körper und der „Hilda-Lucke“ im System der kleinen Planeten, auf Grund der Gylden'schen Störungstheorie. Wien, 1902. 4°.
- Buhlert H.* — Untersuchungen über die Arteinheit der Knöllchenbakterien der Leguminosen und über die landwirtschaftliche Bedeutung dieser Frage. Halle, 1902. 8°.
- Buttermann A.* — Ueber den Einfluss von Nierenerkrankungen auf den Blutdruck. Greifswald, 1902. 8°.
- Darr A.* — Ueber zwei Fasciolidengattungen. Halle, 1902. 8°.
- Daske O.* — Ueber einen Fall von Appendicitis actinomycotica mit Ausgang in Pyaemie. Greifswald, 1902. 8°.
- Denke P.* — Sporenentwicklung bei Selaginella. Jena, 1902. 8°.
- Dhein J.* — Zur Beandlung der Clavicularfracturen: eine Modification des Sayre'schen Heftpflasterverbandes. Bonn, 1901. 8°.
- Doljich J.* — Ueber den Einfluss der Arbeitsleistung auf die Milchsekretion der Kühe. Halle, 1902. 4°.
- Drammer C.* — Ueber radikale und konservative Therapie bei Hodentuberkulose. Bonn, 1902. 8°.
- Drescher B.* — Acylderivate von Indoxylsäure, Indoxyl und Indigweiss. Halle, 1902. 8°.

- Driest R.* — Untersuchungen über den Salzsäuregehalt des Mageninhalts. Greifswald, 1902. 8°.
- Dronke J.* — Die Verpflanzung des Fiebertindenbaumes aus seiner sudamerikanischen Heimat nach Asien und anderen Ländern. Wien, 1902. 4°.
- Düsterhoff K.* — Ueber plötzlichen Tod an Herzschlag bedingt durch Kranzarterienerkrankung und Herzruptur. Greifswald, 1901. 8°.
- Edlich M.* — Ein Beitrag zur Kenntnis der Aphasie. Greifswald, 1902. 8°.
- Ehrenfreund F.* — Die vaginale Entfernung des Uterus-Adnexa. I. II. Halle, 1901. 8°.
- Eisenstädt J.* — Ueber Krebs der Thymus, ein Beitrag zur Kenntnis der Mediastinaltumoren. Greifswald, 1902. 8°.
- Erdmann E.* — Beitrag zur Kenntniss des Kaffeeöles und des darin enthaltenen Furfuralkohols. Halle, 1902. 8°.
- Ermann D.* — Ueber eine Methode zur Feststellung der in den menschlichen Faeces enthaltenen Gewichtsmengen von Bakterien. Bonn, 1902. 8°.
- Eversheim P.* — Bestimmung der Leitfähigkeit und Dielektricitätsconstanten von Lösungsmitteln und deren Lösungen in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur bis über den kritischen Punkt. Bonn, 1902. 8°.
- Ewald W.* — Ein Beitrag zur Lehre von der Erregungsleitung zwischen Vorhof und Ventrikel des Froschherzens. Halle, 1901. 8°.
- Fachelmann P.* — Beitrag zur Kenntnis der Diketone. Greifswald, 1901. 8°.
- Foerster P.* — Zwei Fälle von parenchymatöser Degeneration im Anschluss an Chloroformnarkose. Bonn, 1902. 8°.
- Frank M.* — Ueber Trachealstenosen und deren Behandlungsmethoden. Bonn, 1902. 8°.
- Franck W.* — Untersuchungen über pathogene Hefe. Greifswald, 1902. 8°.
- Fresenius R.* — Ueber Abkömmlinge der Acetylsalicylsäure. Wiesbaden, 1902. 8°.
- Gatersleben H.* — Zur Kasuistik des vaginalen Kaiserschnittes. Halle, 1902. 8°.
- Geller A.* — Ueber die Behandlung des chronischen Unterschenkelgeschwürs. Aachen, 1902. 8°.
- Gierig E.* — Kryoskopische Untersuchungen. Greifswald, 1901. 8°.
- Gössling M.* — Ueber Nasenrachenfibrome. Bonn, 1902. 8°.
- Gottschalk A.* — Sectio caesarea aus relativer Indikation. Greifswald, 1902. 8°.
- Grauer K.* — Die Preisbewegung von Chemikalien seit dem Jahre 1861. Halle, 1901. 8°.
- Greven P.* — Beiträge zur Casuistik der Aktinomykose. Bonn, 1902. 8°.
- Günther A.* — Ueber Atresia ani. Bonn, 1902. 8°.
- Guttwein V.* — Ueber die Symptomatologie der Retroflexio uteri. Greifswald, 1902. 8°.
- Haacke R.* — Ueber Geschwulstbildungen Endothelialen Ursprungs in einem Ovarialkystom. Halle, 1901. 8°.

- Haberkorn M.* — Untersuchungen des Lochialsekrets von Wöchnerinnen mit und ohne antiseptische Compressen. Halle, 1901. 8°.
- Hahn C.* — Ueber die Estersäuren und die Anilsäuren der Phenylbernsteinsäure. Bonn, 1902. 8°.
- Hamann H.* — Ueber subcutane Frakturen der Metacarpal- und Metatarsalknochen mit besonderer Berücksichtigung des sogenannten „militärischen Fässödems“. Greifswald, 1902. 8°.
- Haupt M.* — Ein Beitrag zur Frage nach dem Wesen der Neuroparalytischen Hornautentzündung. Witten, 1902. 8°.
- Haupt R.* — Drei Fälle von Echinococcusgeschwulst in weiblichen Becken. 1902. 8°.
- Hazard R.* — Ueber gemischte Disulfone. Greifswald, 1902. 8°.
- Hennicke H.* — Ueber einen Fall von Sarcoma uteri mit ausgedehnter sarcomatöser Thrombose der Venae uterinae und der Vena spermatica. Halle, 1902. 8°.
- Henning F.* — Ueber radioaktive Substanzen. Halle, 1901. 8°.
- Henning M.* — Ueber Gangrän beider Beine infolge von Embolie. Greifswald, 1902. 8°.
- Hildebrand P.* — Zur Klinik und pathologischen Histologie der Conjunktivaltransplantation. Greifswald, 1902. 8°.
- Hilgendorff G.* — Ueber schwefelhaltige Derivate ungesättigter Ketone. Parchim, 1901. 8°.
- Hirota K.* — Ueber die Mikroorganismen im Sekret der Conjunctivitis catarrhalis und im Bindehautsack des gesunden Auges. Halle, 1901. 8°.
- Hirsch G.* — Ueber den Shock. Halle, 1901. 8°.
- Hoddick H.* — Beitrag zur pathologischen Anatomie der Bleivergiftung des Meerschweinchens. Bonn, 1902. 8°.
- Hoffmann H.* — Zur Kenntnis des Pinens und der Pinonsäure. Greifswald, 1902. 8°.
- Holthausen P.* — Zur Lehre von der Combination organischer Erkrankungen des Centralnervensystems mit Hysterie. Bonn, 1902. 8°.
- Hopmann E.* — Beiträge zur Formalindesinfektion. Köln, 1902. 8°.
- Höyneck P.* — Ein Fall von ischämischer Lähmung nach Arterienverschluss mit anatomischen Untersuchungen der Nerven und Muskeln. Bonn, 1902. 8°.
- Huber L.* — Pseudophenole aus Salicylaldehyd und Salicylsäure. Greifswald, 1902. 8°.
- Husen H. van* — Beobachtungen über 200 Fälle von progressiven Paralyse bei Männern. Ehrenfeld, 1902. 8°.
- Huth J.* — Beitrag zur Kenntnis der Lehre vom Stoffwechsel der Wiederkäuer. Bonn, 1902. 8°.
- Ideler H.* — Die Pharmakodynamik van Swietens. Greifswald, 1902. 8°.

- Jungbluth G.* — Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss des Alkohols auf das putride Fieber. Bonn, 1902. 8°.
- Kattwinkel W.* — Klinische Erfahrungen mit Jequiritol und Jequiritolserum. Bonn, 1902. 8°.
- Kaupe W.* — Ist bei lebenbedrohender Magenblutung infolge von ulcus ventriculi ein operativer Eingriff indicirt und welcher? Leipzig, 1902. 8°.
- Kemp H.* — Ueber die Wirkungen des Amido-Orexins. Bonn, 1902. 8°.
- Kemp J.* — Beiträge zur Casuistik der diffusen symmetrischen Lipome des Halses. Bonn, 1902. 8°.
- Kielhorn O.* — Ueber die Prognose der Sehnennähte. Bonn, 1901. 8°.
- Kiessling K.* — Bestimmung von Brechungsexponenten durch Interferenz elektrischer Wellen an Drähten. Greifswald, 1902. 8°.
- Kirnberger C.* — Ueber die Anlagerung von Blausäure an  $\beta$ -Phenyliminacarbonsäureester. Bonn, 1902. 8°.
- Kirschbaum J.* — Ueber die Erfolge der chirurgischen Behandlung der Perityphlitis. Bonn, 1902. 8°.
- Kishi J.* — Ueber den peripheren Verlauf und die Endigung des Nervus cochleae. Bonn, 1901. 8°.
- Knecht E.* — Zur Operation des Prolapsus ani et recti. Greifswald, 1902. 8°.
- Kneisz W.* — Ueber Appendicitis. Halle, 1901. 8°.
- Kordhanke W.* — Ueber Erythromelie. Greifswald, 1902. 8°.
- Korth P.* — Ueber Myxoedem. Greifswald, 1902. 8°.
- Köthner P.* — Das reine Tellur und sein Atomgewicht. Halle, 1901. 8°.
- Kremer O.* — Die Pathogenese der arthritischen Amyotropien. Greifswald, 1902. 8°.
- Kudlek F.* — Ueber Hernia inguino-properitonealis. Greifswald, 1902. 8°.
- Kuhnemann W.* — Ueber die Ectopia vesicae und ihre operative Behandlung. Bonn, 1902. 8°.
- Lange W.* — Ueber den Einfluss der Quecksilberbehandlung auf das Auftreten der tertiären Lues. Düren, 1902. 8°.
- Laubenthal G.* — Ueber Messungen im Absorptionsspektrum. Coblenz, 1901. 8°.
- Lehmann H.* — Beitrag zur Frage der Zuckerbildung aus Eiweiss. Halle, 1902. 8°.
- Leick L.* — Ein seltener Fall von Missbildungen. Greifswald, 1902. 8°.
- Lemke M.* — Ueber hysterische und epileptische Krampfstände und eigenartige Zwangshandlungen in einem Falle degenerativen Irreseins. Greifswald, 1902. 8°.
- Lenneper A.* — Ueber das serienweise Auftreten der Eklampsie mit besonderer Berücksichtigung der Infektionstheorie. Bonn, 1902. 8°.
- Levy S.* — Ueber das Verhalten der Gefässe bei Lebercirrhose. Bonn, 1902. 8°.
- Lindhorst G.* — Ueber Strangulations-Ileus. Halle, 1902. 8°.

- Lohmann M.* — Die Dauererfolge der Laparotomie bei tuberculöser Bauchfellentzündung. Godeberg, 1902. 8°.
- Lorent J.* — Ueber Ileus nach Trauma. Bonn, 1902. 8°.
- Luhder E.* — Ueber den Einfluss von Kernsubstituenten auf die Reaktionsfähigkeit aromatischer Aldehyde und Ketone. Greifswald, 1902. 8°.
- Luiken H.* — Elephantiasis nach Lymphdrüsenexstirpation. Greifswald, 1902. 8°.
- Marenbach O.* — Die Behandlung der Scabies mit Eudermol. Bonn, 1901. 8°.
- Marquardt L.* — Die Wirkung der Schwitzbäder bei Lebercirrhose nach dem Material der II. med. Klinik in Berlin. Halle, 1902. 8°.
- Mathieu J.* — Ueber die Capillarität der Lösungen. Bonn, 1902. 8°.
- Matzuschita T.* — Zur Physiologie der Sporenbildung der Bacillen. Halle, 1902. 8°.
- Id.* — Untersuchungen über die Mikroorganismen des menschlichen Kotes. München, 1902. 8°.
- Menzen J.* — Ueber Gonorrhoe bei kleinen Mädchen. Bonn, 1901. 8°.
- Meyer H.* — Ueber die rechte Wanderniere und ihre Beziehungen zu den ausführenden Gallenwegen. Halle, 1902. 2°.
- Meyer L.* — Beitrag zur Statistik der Totalexstirpation bei Uteruscarcinom. Bonn, 1902. 8°.
- Meyer P.* — Ueber die Eiweisszersetzung unter dem Einfluss des elektrischen Glühlichtbades. Halle, 1902. 8°.
- Mielert B.* — Zur Casuistik der Ganglien. Greifswald, 1902. 8°.
- Mohr F.* — Beobachtungen über die progressive Paralyse bei Frauen. Bonn, 1902. 8°.
- Mosebach O.* — Ueber Verbreitung des Milzbrandes durch Rohwolle, Ross-haare und Torfstreu. Bonn, 1901. 8°.
- Mouilpied A. (Th. de)* — Ueber die Kondensation von Anillessigestern mit Natriumalkoholat. Halle, 1901. 8°.
- Muehl G.* — Rudimentäre Entwicklung von Uterus und Vagina. Greifswald, 1902. 8°.
- Mülhens H.* — Vier Fälle von Abscessus intrahepaticus aut subphrenicus. Bonn, 1902. 8°.
- Müller C.* — Ueber die Tyson'schen Drüsen beim Menschen und einigen Säugetieren. Guben, 1902. 8°.
- Müller F.* — Zur Statistik der Steisslagen. 495 Fälle aus der geburtshilflichen Klinik und Poliklinik zu Halle. Halle, 1902. 8°.
- Müller K.* — Ueber Bildung von Condensationsproducten aus Pseudophenolen und organischen Basen und deren Verhalten bei der Acetylierung. Greifswald, 1902. 8°.
- Mutke E.* — Ein Fall von Hemiplegie und Aphasie nach Ligatur der Arteria carotis communis sinistra. Postdam, 1901. 8°.

- Nathan R.* — Ueber complicierte Schadelfrakturen. Bonn, 1902. 8°.
- Neelmeier W.* — Ueber die Verseifung der Ester mehrbasischer Säuren. Halle, 1902. 8°.
- Neitzert O.* — Zur Aetiologie und Therapie der Unguis incarnatus mit besonderer Berücksichtigung der Rosenbach'schen Operation und ihrer Dauererfolge. Bonn, 1902. 8°.
- Overbeck O.* — Ueber Radikaloperation incarcerierter Hernien von October 1895 bis April 1901. Bonn, 1901. 8°.
- Pankow O.* — Die Behandlung schwerer Trigeminus - Neuralgien mit heisser Luft. Greifswald, 1901. 8°.
- Peipers F.* — Consanguinität in der Ehe und deren Folgen für die Descendenz. Berlin, 1902. 8°.
- Petrus A.* — Beiträge zur Theorie der Herpethode Poinsets. Halle, 1902. 8°.
- Pfleiderer A.* — Ueber den Einfluss verschieden grosser Dosen von Alkohol auf die Muskelzuckung. Greifswald, 1902. 8°.
- Picard E.* — Beitrag zur Kenntniss der Gastropoden der Mitteldeutschen Trias. Halle, 1902. 4°.
- Pohle F. A.* — Beiträge zur quantitativen Bestimmung der Kohlehydrate in menschlichen Faeces bei verschiedenen Krankheitsformen. Bonn, 1902. 8°.
- Prang A.* — Ueber alte Erstgebärende. Greifswald, 1901. 8°.
- Prochnow M.* — Zur Klinik und pathologischen Anatomie der sulzigen Scleritis. Greifswald, 1902. 8°.
- Prüss H.* — Der Processus vermiformis im Bruchsack und seine Einklemmung. Halle, 1902. 8°.
- Pühmeyer A.* — Die Funktionsprüfung des Auges bei völliger Trübung der brechenden Medien. Greifswald, 1902. 8°.
- Radefeldt F.* — Ein Fall von Fraktur der Halswirbelsäule und Hernia duodenojejunalis. Greifswald, 1901. 8°.
- Rasmus P.* — Ueber die Bedeutung der Röntgenaufnahmen für die Heilung von Frakturen. Greifswald, 1902. 8°.
- Rathert C.* — Ueber zwei Fälle von Magenkrebs mit Metastasen in den Ovarien. Greifswald, 1901. 8°.
- Reichert F.* — Einiges über die Beziehungen zwischen Klebergehalt und Backfähigkeit. Halle, 1902. 8°.
- Reinermann H. A.* — Zur Methodik der quantitativen Stärkeanalyse in menschlichen Fäces. Bonn, 1902. 8°.
- Reinicke G.* — Ueber den Einfluss des Carbonyls auf benachbarte Gruppen. Halle, 1902. 8°.
- Reno K.* — Beitrag zur Kasuistik der Darmintussusception. Aachen, 1902. 8°.
- Richter H.* — Behandlung der Strikturen der männlichen Harnröhre. Dortmund, 1902. 8°.

- Ringleb O.* — Zur Operation fixirter Blasenscheidenfisteln mit Loslösung der Blase. Halle, 1902. 8°.
- Ritter A.* — Erfahrungen über Zangengeburt der Halleschen Universitäts-Frauenklinik u. Poliklinik. Halle, 1901. 8°.
- Roemer Th.* — Ueber die Wendungsoperation nach der Statistik der Bonner Frauenklinik. Bonn, 1902. 8°.
- Rogage E. E.* — Zur Statistik der Gesichtslagegeburt. Halle, 1902. 8°.
- Rössler H.* — Ueber einige neue Peri-Naphtalinderivate. Bonn, 1902. 8°.
- Rothe M.* — Ein Beitrag zur Casuistik der Eisensplitterverletzungen des Auges. Halle, 1902. 8°.
- Rudeloff H.* — Ueber Hirntuberkel und seine chirurgisch-operative Behandlung. Halle, 1902. 8°.
- Schaffer P.* — Die Behandlung von Gelenkergüssen mit heisser Luft. Greifswald, 1902. 8°.
- Schicke G.* — Ueber Nierentumoren und deren Exstirpation. Halle, 1901. 8°.
- Schirmer E.* — Ueber die chirurgische Behandlung der spina bifida. Greifswald, 1902. 8°.
- Schmitz M.* — Ueber Oberschenkelfracturen auf Grund von Röntgenaufnahmen. Bonn, 1901. 8°.
- Schoeller W.* — Zur Constitution des Campherphorons. Greifswald, 1902. 8°.
- Scholz E.* — Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Torsionsnachwirkung. Köln, 1902. 8°.
- Schönbrod F.* — Ueber einen Fall von Phocomelie. Bonn, 1901. 8°.
- Schrammen F. R.* — Ueber die Einwirkung von Temperaturen auf die Zellen des Vegetationspunktes des Sprosses von *Vicia Faba*. Bonn, 1902. 8°.
- Schrödter M.* — Nitrosoverbindungen aromatischer Aminocarbonsäuren. Halle, 1902. 8°.
- Schubart Ph.* — Synthese isomerer Indigodisulfosäuren. Halle, 1902. 8°.
- Schwab E.* — Ueber den Gehalt der natürlichen Eisenwasser an gelöstem Eisen und an Kohlensäure. Bonn, 1902. 8°.
- Schwalbach P.* — Ueber Konzentrationsketten und deren Temperaturcoefficienten. Bonn, 1901. 8°.
- Schwenke W.* — Ueber den Stoffhaushalt des Hundes in der Rekonvalescenz von akuten Erkrankungen. Greifswald, 1902. 8°.
- Schwenker O.* — Beiträge zur Prognose und Therapie schwerer Verbrennungen. Bonn, 1902. 8°.
- Senger R.* — Zur Casuistik der primären Dünndarmsarkome im Kindesalter. Halle, 1902. 8°.
- Selter H.* — Einiges über die Methodik der quantitativen Fettbestimmungen in den Faeces des Menschen. Bonn, 1902. 8°.
- Seyffert P.* — Ueber die Prognose der Coloncancerome. Halle, 1902. 8°.
- Simon G.* — Beitrag zur Kenntniss der Eiweisskörper der Kuhmilch. Halle, 1901. 8°.

- Spätling Th.* — Die Rückbildung des Pneumothorax nach Empyemoperation und ihre Beeinflussung durch eine neue Ventilvorrichtung. Greifswald, 1902. 8°.
- Spengemann P.* — Ueber die Entstehung von Hernien nach Trauma. Bonn, 1901. 8°.
- Spielmeyer W.* — Ein Beitrag zur Kenntnis der Encephalitis. Berlin, 1902. 8°.
- Steingraber E.* — Ueber die Influenz, welche elektrische Masse auf ein hohles Rotationsellipsoid als Konduktor ausübt, wenn die Masse im Innern auf der Achse symmetrisch angelagert ist. Greifswald, 1902. 8°.
- Stelzner H.* — Resultate und Dauererfolge bei 80 Fällen von vaginalen Totalexstirpationen bei Prolaps, aus den Kliniken von Basel und Halle. Halle, 1902. 8°.
- Stoffels H.* — Ueber einen Fall von Osteoidsarcom der Tibia. Bonn, 1902. 8°.
- Strube F.* — Ueber einige Derivate der Hydrochelidonsäure. Halle, 1901. 8°.
- Tashiro Ak.* — Ueber Bau und Pigmentierung der Aderhautsarkome. Halle, 1902. 8°.
- Technau C.* — Beitrag zur Kenntnis der Muskelgummata. Greifswald, 1902. 8°.
- Tiling (J. von).* — Ueber die mit Hilfe der Marchifärbung nachweisbaren Veränderungen im Rückenmark von Säuglingen. Leipzig, 1901. 8°.
- Toop E.* — Ueber den Einfluss der Atmung und Bauchpresse auf die motorische Funktion des Magens. Halle, 1902. 8°.
- Trampedach E.* — Aromatische Diazoniumsalze und ammoniakalische Kupferoxydullösung. Halle, 1901. 8°.
- Triepcke O.* — Ueber Blutcysten in Nebennierenstrumen. Greifswald, 1901. 8°.
- Uliszewski H.* — Ueber primäres Carcinom der Gallengänge. Greifswald, 1902. 8°.
- Ulrich H.* — Ueber molekulare Umlagerungen acetylierter Phenole. Berlin, 1902. 8°.
- Unruh (M. von).* — Ueber gelbes Arsen und über Molekulargewichts-Bestimmung durch Siedepunkts-Erhöhung im calibrirten Weinholdschen Vacuumgefäß. Halle, 1901. 8°.
- Urban F.* — Ein Fall vom Adenoma malignum Uteri bei einem einundzwanzigjährigen Mädchen. Halle, 1902. 8°.
- Voit (C. v.)* — Max von Pettenkofer zum Gedächtniss. München, 1902. 4°.
- Volkholz H.* — Bestimmung von Aldehyden mit Dimethylhydroresorcin. Halle, 1902. 8°.
- Vorschütz J.* — Zur Casuistik der Sklerodermie mit besonderer Berücksichtigung der Therapie derselben. Greifswald, 1902. 8°.
- Wangerin A.* — Ueber die Titration des Indigos mit Hydrosulfit und über die Bildung von Indigo aus Phenylglycin-o-Carbonsäure. Halle, 1902. 8°.

- Wassermeyer M.* — Ueber den Verlauf posttraumatischer Nervenkrankheiten nach Beobachtungen der medizinischen Klinik in Bonn. Bonn, 1902. 8°.
- Wederhake K. J.* — Ueber Dormiol. Bonn, 1902. 8°.
- Wehowshi R.* — Ueber Faltungstrübungen der Hornhaut. Greifswald, 1901. 8°.
- Weski O.* — Beiträge zur Kenntnis des mikroskopischen Baues der menschlichen Prostata. Wiesbaden, 1902. 8°.
- Whitten J. C.* — Das Verhältnis der Farbe zur Tötung von Pfirsichknospen durch Winterfrost. Halle, 1902. 8°.
- Wilcke K.* — Das Geburtsgewicht der Kinder bei engem Becken. Halle, 1902. 8°.
- Wilke A.* — Lungenveränderungen beim Aorten-Aneurysma. Halle, 1902. 8°.
- Winternitz H.* — Ueber die Wirkung verschiedener Bäder. — insbesondere auf den Gaswechsel. Naumburg, 1902. 8°.
- Wittfeld E.* — Ueber den angeborenen Hochstand der Scapula. Bonn, 1901. 8°.
- Wittkamp H. P.* — Zur Statistik der Mammacarcinome. Bonn, 1901. 8°.
- Wolff.* — Ueber Atrophie und compensatorische Hypertrophie der Lungen. Greifswald, 1902. 8°.
- Wrasidlo G.* — Ein Fall von sympathischer Entzündung nach Neurotomia optico-ciliaris. Greifswald, 1902. 8°.
- Wulff T.* — Ueber einen Fall von sensorischer Aphasie. Greifswald, 1902. 8°.
- Wullstein L.* — Die Skoliose in ihrer Behandlung und Entstehung nach klinischen und experimentelle Studien. I. Stuttgart, 1902. 8°.
- Zachlehner K.* — Ueber Axendrehung im Dickdarm. Greifswald, 1902. 8°.

V. C.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 febbraio 1903.*

P. VILLARI, Presidente.

**Matematica.** — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.* Nota I del Corrispondente G. MORERA.

La trasformazione di un sistema di equazioni differenziali Hamiltoniane in un altro simile sistema fu ampiamente e profondamente trattata da Sophus Lie nella Memoria intitolata: *Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen*, inserita nel secondo volume dell'Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Kristiania, 1877).

La trattazione di tale argomento acquista notevolmente in *generalità*, semplicità ed eleganza quando a base di essa si ponga la considerazione del *covariante bilineare* di una certa espressione differenziale, come mi propongo di mostrare in questo scritto <sup>(1)</sup>.

1. Consideriamo l'espressione differenziale:

$$(I) \quad E_d = q_1 dp_1 + q_2 dp_2 + \dots + q_n dp_n + Udt,$$

ove:  $q_1, p_1; q_2, p_2; \dots; q_n, p_n$  e  $t$  designano  $2n + 1$  variabili indipendenti ed  $U$  una data funzione di esse.

Formiamo il covariante bilineare di tale espressione:

$$\delta E_d - dE_c = \sum_{i=1}^n (\delta q_i dp_i - dq_i \delta p_i) + \delta U dt - dU \delta t$$

(<sup>1</sup>) Una completa esposizione dei risultati fin qui ottenuti nella teoria delle perturbazioni si trova nella bella monografia del sig. E. O. Lovett, pubblicata nel tomo XXX del Quarterly Journal of mathematics (pp. 47-149): *The theory of perturbations and Lie's Theory of contact Transformations*.

ed eguagliamo a zero i coefficienti delle  $\delta p_i$ ,  $\delta q_i$  e  $\delta t$ ; avremo il sistema di equazioni differenziali:

$$(II) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2 \dots n);$$

$$0 = \sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right),$$

delle quali l'ultima è una conseguenza delle  $2n$  precedenti.

Adunque il sistema Hamiltoniano (II) è il primo sistema di Pfaff dell'espressione differenziale (I) e com'è noto esso è invariantivamente congiunto con tal espressione differenziale <sup>(1)</sup>.

Si noti che se due espressioni differenziali nelle stesse variabili indipendenti hanno i covarianti bilineari identici non possono differire che per un differenziale esatto, sicchè dato il sistema Hamiltoniano (II) non è determinata un'unica espressione differenziale invariantivamente con esso congiunta, ma infinite che differiscono fra loro per differenziali esatti.

2. Se l'espressione differenziale (I) si riduce alla forma canonica di Pfaff:

$$E_d = \sum_i Q_i dP_i + d\Phi,$$

il sistema (II) diviene:

$$dP_i = dQ_i = 0$$

sicchè le  $P_i$ ,  $Q_i$  sono gli integrali del sistema Hamiltoniano.

Inoltre ridurre alla forma canonica Pfaffiana la espressione differenziale  $E_d$  equivale, secondo il metodo d'integrazione di Pfaff, a trovare un integrale completo dell'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi:

$$(III) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = U \left( p_1, p_2, \dots, p_n; \frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2} \dots \frac{\partial f}{\partial p_n}; t \right).$$

Riassumendo possiamo enunciare il *teorema fondamentale* seguente.

*Il sistema Hamiltoniano:*

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i}$$

*è il primo sistema di Pfaff dell'espressione differenziale:*

$$\sum_i q_i dp_i + U dt.$$

*L'integrazione del sistema Hamiltoniano equivale al ridurre alla forma canonica di Pfaff la espressione differenziale precedente, ossia ad*

<sup>(1)</sup> Cfr. Darboux, *Sur le problème de Pfaff*, Paris Gauthier-Villars 1882, p. 7.

integrare completamente l'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = U\left(p_1, p_2, \dots, p_n; \frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}; t\right).$$

3. Data un'espressione differenziale della classe  $2n+1$ :

$$(IV) \quad X_0 dx_0 + \sum_{j=1}^{2n} X_j dx_j,$$

ove  $X$  indicano delle funzioni delle  $x$ , posto:

$$(i, k) = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

nel determinante del covariante bilineare non possono essere nulli tutti i sottodeterminanti del 1° ordine (grado  $2n$ ) e per conseguenza, giusta un noto teorema di Frobenius (1), non possono svanire tutti i sottodeterminanti principali del grado  $2n$ . Supponiamo che non sia nullo il sottodeterminante principale

$$\begin{vmatrix} (1, 1) & (1, 2) & \dots & (1, 2n) \\ (2, 1) & (2, 2) & \dots & (2, 2n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2n, 1) & (2n, 2) & \dots & (2n, 2n) \end{vmatrix}.$$

Allora l'espressione differenziale  $\sum_{j=1}^{2n} X_j dx_j$ , ove si considerano come variabili le sole  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ , è della classe  $2n$ , e quindi riducibile alla forma canonica di Pfaff:

$$q_1 dp_1 + q_2 dp_2 + \dots + q_n dp_n;$$

ma se si considera variabile anche la  $x_0$ , che ora sostituiremo colla lettera  $t$ , avremo identicamente:

$$X_0 dt + \sum_{j=1}^{2n} X_j dx_j = \sum_{i=1}^n q_i dp_i + U dt,$$

ove

$$U \equiv X_0 + \sum_{j=1}^{2n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial t}.$$

Il primo sistema di Pfaff dell'ultima espressione differenziale è un

(1) Crelle's Journal, t. 82, pag. 244. Cfr. la mia Nota: *Sulle proprietà invariantive del sistema di una forma lineare e di una bilineare alternata*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XVIII (1883).

sistema Hamiltoniano: tale sistema Hamiltoniano è il trasformato del 1° sistema di Pfaff della (IV).

Reciprocamente se nella (I) alle  $p_i, q_i, t$  sostituiamo delle funzioni fra loro indipendenti di nuove variabili  $x_0 \dots x_{2n}$ , essa assume la forma (IV) e per conseguenza il sistema Hamiltoniano (II) si trasforma nel 1° sistema di Pfaff di (IV), che è:

$$(i, 0) dx_0 + (i, 1) dx_1 + (i, 2) dx_2 + \dots + (i, 2n) dx_{2n} = 0 \\ (i = 0, 1, 2 \dots 2n),$$

il quale comprende  $2n$  equazioni differenziali fra loro indipendenti.

4. Il più generale cambiamento di variabili che converte un sistema Hamiltoniano (II) in un altro simile sistema è adunque quello che converte l'espressione differenziale:

$$\sum_{i=1}^n q_i dp_i + U dt$$

in un'altra del tipo

$$d\Omega + \sum_{i=1}^n q_i^* dp_i^* + U^* dt^*,$$

ove  $\Omega$  indica una funzione qualunque delle nuove variabili indipendenti  $p_i^*, q_i^*, t^*$  ed  $U^*$  una funzione delle variabili stesse.

Ci proponiamo anzitutto di trovare il più generale cambiamento delle sole variabili  $p_i$  e  $q_i$  (ma non della  $t$ ) che soddisfa alla condizione voluta.

Secondo quanto precede, un simile cambiamento è una trasformazione tra due sistemi di variabili indipendenti:

$$(p_i, q_i) ; (p_i^*, q_i^*),$$

la quale dipende anche dal parametro  $t$ , ed è tale che, riguardando questo come costante, si abbia identicamente:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_i q_i^* dp_i^* = d\Omega.$$

Se a ciascun sistema di variabili si aggiunge una nuova variabile indipendente:  $z$  e  $z^*$ , e si pone la relazione:

$$z = \Omega + z^*,$$

tra i due sistemi di variabili si ha una trasformazione di contatto, dipendente dal parametro  $t$ .

Una cosiffatta trasformazione si trova subito nella sua forma più generale col procedimento seguente. Si assuma per  $\Omega$  una funzione qualunque delle  $p_i, p_i^*, t$  e si stabilisca a piacere nessuna, oppure una, od anche più equa-

zioni fra le sole  $p_i, p_i^*$  e  $t$ , in guisa però che tra esse non sia possibile eliminare nè le  $p_i$ , nè le  $p_i^*$ . Si trovino di poi le relazioni ancora occorrente a definire la trasformazione con quel procedimento col quale nella meccanica analitica le condizioni di equilibrio d'un sistema vincolato si deducono dall'equazione dei lavori virtuali, quando i vincoli sono espressi da equazioni finite tra i parametri di posizione ed il tempo, e cioè col classico *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*.

Stabilite adunque le equazioni:

$$(V) \quad \Omega_\nu(p_1 \dots p_n; p_1^* \dots p_n^*; t) = 0 \quad (\nu = 1, 2 \dots q)$$

ove  $q \leq n$ , essendo le  $\Omega_\nu$  delle funzioni fra loro indipendenti, sia rapporto alle  $p_i$ , sia rapporto alle  $p_i^*$ , alle precedenti equazioni si aggiungano quelle  $2n - \nu$  altre che risultano per eliminazione dei moltiplicatori  $\lambda$  fra le equazioni seguenti:

$$(VI) \quad \begin{cases} q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_i} \\ q_i^* = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^*} + \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial p_i^*} \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Colla teoria dei determinanti funzionali è facile indicare quella limitazione cui vanno assoggettate le  $\Omega$  affinchè le equazioni (V) e (VI) sieno risolvibili tanto rispetto alle  $\lambda_\nu, p_i, q$ , quanto rispetto alle  $\lambda_\nu, p_i^*, q_i^*$  ossia *definiscano la trasformazione cercata*.

Posto:

$$W \equiv \Omega + \lambda_1 \Omega_1 + \dots + \lambda_q \Omega_q,$$

detta limitazione è che a cagione delle (V) non sia identicamente nullo il seguente determinante, che è una funzione intera del grado  $n - q$  nelle  $\lambda$ :

|                                                    |                                                                                                           |                                            |                                                                                           |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1}$           | $\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_2} \dots \dots \frac{\partial \Omega_1}{\partial p_n}$               | $0$                                        | $0 \dots \dots 0$                                                                         |
| $\frac{\partial \Omega_2}{\partial p_1}$           | $\frac{\partial \Omega_2}{\partial p_2} \dots \dots \frac{\partial \Omega_2}{\partial p_n}$               | $0$                                        | $0 \dots \dots 0$                                                                         |
| $\dots$                                            | $\dots$                                                                                                   | $\dots$                                    | $\dots$                                                                                   |
| $\frac{\partial \Omega_q}{\partial p_1}$           | $\frac{\partial \Omega_q}{\partial p_2} \dots \dots \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_n}$               | $0$                                        | $0 \dots \dots 0$                                                                         |
| $\frac{\partial^2 W}{\partial p_1^* \partial p_1}$ | $\frac{\partial^2 W}{\partial p_1^* \partial p_2} \dots \frac{\partial^2 W}{\partial p_1^* \partial p_n}$ | $\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_1^*}$ | $\frac{\partial \Omega_2}{\partial p_1^*} \dots \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_1^*}$ |
| $\frac{\partial^2 W}{\partial p_2^* \partial p_1}$ | $\frac{\partial^2 W}{\partial p_2^* \partial p_2} \dots \frac{\partial^2 W}{\partial p_2^* \partial p_n}$ | $\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_2^*}$ | $\frac{\partial \Omega_2}{\partial p_2^*} \dots \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_2^*}$ |
| $\dots$                                            | $\dots$                                                                                                   | $\dots$                                    | $\dots$                                                                                   |
| $\frac{\partial^2 W}{\partial p_n^* \partial p_1}$ | $\frac{\partial^2 W}{\partial p_n^* \partial p_2} \dots \frac{\partial^2 W}{\partial p_n^* \partial p_n}$ | $\frac{\partial \Omega_1}{\partial p_n^*}$ | $\frac{\partial \Omega_2}{\partial p_n^*} \dots \frac{\partial \Omega_q}{\partial p_n^*}$ |

[Cfr. Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, II Absch., Cap. 6, Abth. I].

Si ponga:

$$V = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \sum_{\nu} \lambda_{\nu} \frac{\partial \Omega_{\nu}}{\partial t}$$

e si immaginino comunque eliminate da questa equazione le  $\lambda$  per mezzo delle (VI). Avremo identicamente:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_i q_i^* dp_i^* + V dt = d\Omega.$$

Si noti che una volta ottenute le espressioni delle  $p_i$  e  $q_i$  nelle  $p_i^*, q_i^*$  e  $t$ , dette  $\Omega^*$  e  $V^*$  le trasformate in queste variabili di  $\Omega$  e  $V$ , avremo:

$$V^* = \frac{\partial \Omega^*}{\partial t} - \sum_i q_i \frac{\partial p_i}{\partial t}.$$

Adunque colla trasformazione trovata abbiamo per identità:

$$(VII) \quad \sum_i q_i dp_i + U dt = d\Omega + \sum_i q_i^* dp_i^* + (U^* - V^*) dt,$$

ove  $U^*$  indica la trasformata di  $U$  nelle  $p_i^*, q_i^*$  e  $t$ .

In particolare se  $\nu = 0$ , come condizioni di risolubilità delle (VI), abbiamo che non sia identicamente nullo il determinante funzionale:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \Omega}{\partial p_1^*}, \frac{\partial \Omega}{\partial p_2^*} \dots \frac{\partial \Omega}{\partial p_n^*} \right)}{\partial (p_1, p_2, \dots p_n)};$$

le (VI) divengono:

$$q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}; \quad - q_i^* = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^*};$$

e la espressione della  $V$  diviene:

$$V = \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

*Per  $V$  si può assumere una funzione arbitrariamente data delle primitive variabili  $p_i, q_i, t$ : allora è da assumersi per la  $\Omega$  un integrale completo dell'equazione alle derivate parziali:*

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = V \left( p_1, \dots, p_n; \frac{\partial V}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial p_n}; t \right)$$

*colle costanti arbitrarie non aggiunte:*

$$p_1^*, p_2^* \dots p_n^*.$$

In ogni caso per la (VII) posto:

$$H^* = U^* - V^*$$

il trasformato del sistema Hamiltoniano (II) sarà:

$$\frac{\partial p_i^*}{\partial t} = - \frac{\partial H^*}{\partial q_i^*}; \quad \frac{\partial q_i^*}{\partial t} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*}.$$

Sulla indicata trasformazione particolare si basa la ordinaria teoria delle perturbazioni.

5. Per trovare la trasformazione più generale che converte il sistema Hamiltoniano (II) in un altro sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dp_i^*}{\partial t^*} = - \frac{\partial U^*}{\partial q_i^*}; \quad \frac{\partial q_i^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U^*}{\partial p_i^*},$$

si consideri la più generale trasformazione tra i due sistemi di *variabili indipendenti*:

$$\begin{aligned} (p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_n, q_n; t, u), \\ (p_1^*, q_1^*; p_2^*, q_2^*; \dots; p_n^*, q_n^*; t^*, u^*) \end{aligned}$$

che dà luogo ad una identità della forma:

$$(VIII) \quad \sum_i q_i dp_i + u dt = d\Omega + \sum_i q_i^* dp_i^* + u^* dt^*.$$

Pongasi una qualunque relazione fra le variabili del primo sistema:

$$(IX) \quad u - U(p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_n; t) = 0.$$

Per la trasformazione considerata questa relazione si convertirà in una relazione:

$$F(p_1^*, q_1^*; \dots; p_n^*, q_n^*; t^*, u^*) = 0.$$

che non può essere identica. Supponiamo che  $F$  contenga  $u^*$ : questa supposizione in fondo *non è restrittiva* giacchè la coppia di variabili coniugate  $t^*, u^*$  è una qualunque delle coppie delle nuove variabili ed inoltre è sempre lecito di porre: invece della  $\Omega$  la  $\Omega_1 = \Omega + t^* u^*$ , invece di  $t^*$  e  $u^*$  rispettivamente  $t_1^* = -u^*$ ,  $u_1^* = t^*$ . Allora la equazione precedente si potrà risolvere rispetto alla  $u^*$ , e cioè porre sotto la forma:

$$u^* - U^*(q_1^* \dots p_n^*; q_1^* \dots q_n^*; t^*) = 0;$$

sicchè dalle espressioni delle primitive variabili  $p_i, q_i$  e  $t$  nelle nuove si potrà eliminare la variabile ausiliaria  $u^*$ , e così pure dalle formule che danno la trasformazione inversa si potrà eliminare la  $u$ . Siccome poi nella identità (VIII) non compariscono nè  $du$  nè  $du^*$ , col sostituire ad  $u$  la funzione

U e ad  $u^*$  la  $U^*$  non si muterà la forma dell'identità stessa. Dunque *avremo identicamente*:

$$\sum_i q_i dp_i + U dt = d\Omega + \sum_i q_i^* dp_i^* + U^* dt^*;$$

così la trasformazione richiesta è trovata.

Per esempio, scelta comunque la  $\Omega$ :

$$\Omega \equiv \Omega(p_1, p_2 \dots p_n; p_1^*, p_2^* \dots p_n^*; t, t^*),$$

si assumano  $n + 1$  relazioni della forma:

$$\Omega_v(p_1 \dots p_n; p_1^* \dots p_n^*; t, t^*) = 0 \quad (v = 0, 1, 2 \dots n)$$

che soddisfacciano alla condizione di essere risolvibili tanto rispetto alle  $p_1, \dots, p_n, t$ , quanto rispetto alle  $p_1^*, \dots, p_n^*, t^*$ . La trasformazione cercata è definita dalle  $n + 1$  precedenti equazioni e da quelle altre  $n + 1$  che si ottengono eliminando i moltiplicatori  $\lambda$  fra le  $2(n + 1)$  equazioni seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i + \sum_{v=0}^n \lambda_v \frac{\partial \Omega_v}{\partial p_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2 \dots n); \\ u + \sum_{v=0}^n \lambda_v \frac{\partial \Omega_v}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \\ -q_i^* + \sum_{v=0}^n \lambda_v \frac{\partial \Omega_v}{\partial p_i^*} = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^*}, \quad (i = 1, 2 \dots n); \\ -u^* + \sum_{v=0}^n \lambda_v \frac{\partial \Omega_v}{\partial t^*} = \frac{\partial \Omega}{\partial t^*}. \end{array} \right.$$

Per una trasformazione cosiffatta la (IX) si converte in un'equazione che non può contenere le sole  $p_1^* \dots p_n^*, t$ . Senza scapito della generalità possiamo adunque ritenere che la trasformata della (IX) contenga la  $u^*$ .

6. Consideriamo un sistema qualunque di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine fra  $2n + 1$  variabili:

$$(X) \quad \frac{dx_0}{X_0} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_{2n}}{X_{2n}}.$$

Ci proponiamo di esaminare se un tale sistema per trasformazione delle variabili  $x$  in altre  $y$ , fra loro indipendenti, sia riducibile alla forma canonica di Hamilton.

Secondo quanto precede bisogna cercare se esiste un'espressione differenziale:

$$Y_0 dx_0 + Y_1 dx_1 + \dots + Y_{2n} dx_{2n},$$

della classe  $2n + 1$ , il cui primo sistema di Pfaff coincide col sistema pro-

posto: in altri termini, se è possibile determinare in funzione delle  $x$  le  $Y$  in guisa che posto:

$$(i, k) = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 0, 1, 2 \dots 2n),$$

si abbia:

$$(XI) \quad X_0(i, 0) + X_1(i, 1) + X_2(i, 2) + \dots + X_{2n}(i, 2n) = 0 \\ (i = 0, 1, 2 \dots 2n).$$

Am messo possibile ciò, si riduca la espressione differenziale anzidetta alla forma (§ 3):

$$\sum_i q_i dp_i + U dt,$$

le equazioni differenziali (X) per introduzione delle nuove variabili indipendenti  $p_i, q_i$  e  $t$  assumeranno la forma Hamiltoniana (II).

Le (XI) non sono fra loro indipendenti, giacchè moltiplicata ordinatamente per  $X_0 \dots X_{2n}$  e sommate danno luogo all'identità:

$$\sum_i \sum_k (i, k) X_i X_k = 0;$$

sicchè, supposto per esempio  $X_0 \neq 0$ , la prima di esse è una conseguenza delle rimanenti  $2n$ .

Il sistema delle  $2n$  equazioni, lineari, omogenee, alle derivate parziali del primo ordine (XI) ammette notoriamente infinite soluzioni. Scelta infatti ad arbitrio per es. la  $Y_0$  fu dimostrato da Cauchy (Œuvres, S. I; t. VII, pag. 33) che le  $Y_1 \dots Y_{2n}$  si possono determinare in guisa da soddisfare alle  $2n$  equazioni differenziali e da divenire uguali, per un particolare valore della variabile indipendente  $x_0$ , a funzioni arbitrariamente date delle  $x_1, x_2 \dots x_{2n}$ : l'unica condizione che deve essere soddisfatta è che le funzioni considerate sieno funzioni analitiche regolari.

Del resto la stessa conclusione può trarsi ovviamente dalla nostra teoria invariante.

Integrate le (X) ed introdotte come nuove variabili invece delle  $x_1 \dots x_{2n}$  un sistema di  $2n$  integrali indipendenti delle equazioni stesse:

$$y_i = y_i(x_0, x_1 \dots x_{2n}) \quad (i = 1, 2 \dots 2n),$$

esse assumono la forma:

$$dx_0 = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \dots = \frac{dy_{2n}}{0},$$

e per conseguenza le (XI) divengono:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_0} - \frac{\partial Y_0}{\partial y_i} = 0.$$

La soluzione più generale di queste equazioni è:

$$Y_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}, Y_i = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \eta_i,$$

ove  $\Phi$  è una funzione arbitraria di tutte le variabili e le  $\eta_i$  sono funzioni arbitrarie delle sole:  $y_1, y_2 \dots y_{2n}$ . Per conseguenza le (X) costituiscono il primo sistema di Pfaff dell'espressione differenziale:

$$d\Phi + \sum_{i=1}^{2n} \eta_i dy_i,$$

nella quale si devono porre per le  $\eta_i$  delle funzioni delle  $y_i$  tali che non risulti nullo il determinante gobbo formato colle  $\frac{\partial \eta_i}{\partial y_k} - \frac{\partial \eta_k}{\partial y_i}$ , affinchè essa sia della classe  $2n + 1$ . Per esempio, basterebbe scegliere:

$$\eta_j = y_{n+j} \quad \eta_{n+j} = 0 \quad (j = 1, 2 \dots n).$$

Adunque si ha il *teorema* seguente che parmi più curioso che utile. *Qualsiasi sistema di  $2n$  equazioni differenziali è sempre riducibile alla forma canonica di Hamilton.*

**Chimica.** — *Intorno all'olivile, la sua composizione e costituzione* <sup>(1)</sup>. Nota del Socio G. KÖRNER e del dott. L. VANZETTI.

L'olivile estratto dal Pelletier sin dal 1816 dalla gomma dell'olivo, di cui è il costituente principale, è stato più volte oggetto di studi chimici, specialmente per parte del compianto Sobrero, il quale lo sottopose ripetutamente all'analisi e gli attribuì la formula  $C_{14}H_{18}O_5$ .

Anche uno di noi, in unione al prof. Carnelutti <sup>(2)</sup>, si era da tempo occupato di quella sostanza, ed in base a numerose analisi si credette poter attribuire all'olivile cristallizzato dall'acqua la formula:  $C_{14}H_{18}O_6$  e a quello ottenuto da soluzione alcoolica l'altra:  $C_{16}H_{22}O_6$ , colle quali formule si accordava anche la composizione dei prodotti di trasformazione allora studiati. Alcuni fatti venuti successivamente alla luce ed in ispecie la determinazione quantitativa del ioduro metilico ottenibile scaldando l'olivile ed i suoi derivati con acido iodidrico, non si interpretavano felicemente colle predette for-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

<sup>(2)</sup> Rendiconti del R. Istituto Lombardo Serie II<sup>a</sup>, vol. XV, pag. 654.

mule ed indicavano per esso una composizione assai più complessa, probabilmente corrispondente per l'idrato dell'olivile alla formula  $C_{25}H_{32}O_{10}$ , od anche  $C_{30}H_{38}O_{12}$ , che si accordavano parimente ed anzi ancor meglio coi risultati analitici.

Noi abbiamo ripreso lo studio di questo interessante composto e siamo ora in grado di stabilirne con certezza la formula, il peso molecolare ed alcuni suoi rapporti con sostanze affini di costituzione nota.

Esporremo brevemente i principali risultati finora ottenuti, riservandoci di descrivere diffusamente e corredati di tutti i dati analitici raccolti, i dettagli delle nostre ricerche a lavoro compiuto.

Dobbiamo premettere che l'olivile gode della proprietà di combinarsi colla maggior parte dei suoi solventi, ed in ispecie con alcoli e con acqua.

Numerose analisi istituite sul prodotto cristallizzato da acqua diedero in media per cento:

$$C = 60,74$$

$$H = 6,59$$

mentre si calcola per:

|   | $C_{20}H_{26}O_8$ | $C_{25}H_{32}O_{10}$ | $C_{30}H_{38}O_{12}$ |
|---|-------------------|----------------------|----------------------|
| C | 60,91             | 60,98                | 61,01                |
| H | 6,59              | 6,50                 | 6,44                 |

Avendo constatato la presenza del gruppo ossimetilico nell'olivile, si procedette alla determinazione del carbonio contenutovi sotto quella forma, deducendone col metodo di Zeisel il rapporto tra il carbonio ossimetilico ed il carbonio totale. Si trovò che la decima parte del carbonio complessivo era contenuto come carbonio ossimetilico, il che autorizzava ad escludere per l'olivile ogni formula che non contenesse 10, o n. 10 atomi di carbonio.

L'analisi dell'olivile cristallizzato da alcoli di differente natura ha confermato questa conclusione.

Di fatto il composto cristallizzato da alcool metilico corrisponde alla formula  $C_{21}H_{28}O_8$ ; quello dall'alcool etilico possiede la composizione  $C_{22}H_{30}O_8$ ; i due prodotti risultanti per cristallizzazione dagli alcoli propilico ed isopropilico contengono  $C_{23}H_{32}O_8$ ; il composto preparato coll'alcool allilico corrisponde alla formula  $C_{23}H_{30}O_8$ . Tutti questi corpi cristallizzano assai bene e possono essere riscaldati a 100° senza perdere alcool. Non siamo riusciti a combinare coll'olivile gli alcoli butilico terziario e benzilico.

Tanto l'idrato quanto gli alcoolati cristallini, riscaldati in corrente di anidride carbonica secca ad una temperatura di 130 a 160° si scindono, abbandonando il solvente e trasformandosi nel composto anidro che risulta come massa vetrosa perfettamente trasparente e incolore, fortemente rifrangente. Il suo punto di fusione è a circa 66°. Ricristallizzando questo prodotto da

uno dei solventi suddetti si ottengono i prodotti addizionali (idrato o alcoolati), mentre la sostanza cristallizza inalterata anidra da acetone secco, da alcool benzilico e dal trimetilcarbinolo. Allora fonde a  $142^{\circ},5$  e possiede la composizione  $C_{20}H_{24}O_7$  dedotta dall'analisi e confermata determinando le quantità di acqua o di alcool che perdono rispettivamente l'idrato ed i vari alcoolati.

Parecchi tentativi fatti per determinare per crioscopia il peso molecolare impiegando il fenolo come solvente, ebbero esito poco confortante; nè si ottennero risultati migliori ricorrendo al metodo ebullioscopico e servendosi dell'alcool etilico e dell'acetone quali solventi. Questo insuccesso forse proviene dalla presenza degli ossidrili fenolici ed alcoolici nella molecola dell'olivile.

Prove istituite in seguito sui rispettivi anisoli, p. e. sul derivato bietilato condussero a risultati soddisfacenti e pienamente concordanti colla formula  $C_{20}H_{24}O_7$ , e così ottennero conferma le formule date superiormente per l'olivile idrato e per i vari alcoolati.

Con questa formula l'olivile contiene due nuclei benzinici con due ossimetili e due ossidrili fenolici, i quali ultimi possono alla loro volta essere trasformati coi noti metodi in ossimetili, ossietili ecc. Abbiamo preparato tra altri i composti dimetil- e dietil-olivile e siamo anche riusciti ad introdurre un solo residuo alcoolico nella molecola dell'olivile; fatto questo che conferma un'altra volta la formula  $C_{20}H_{24}O_7$  per il composto anidro.

Nell'intento di raccogliere altro materiale onde poter stabilire la costituzione dell'olivile, abbiamo sottoposto il suo derivato dimetilico e quello acetilato all'ossidazione, seguendo quantitativamente la reazione. Il derivato acetilico nell'ossidazione eseguita con  $KMnO_4$ , fornisce con discreto rendimento acido acetovaniglico a fianco a poca acetovaniglina; mentre il dime-tilolilivile dà come prodotti principali, acido veratrico e acido veratroilformico; del primo circa 50% sul peso della sostanza ossidata e quasi altrettanto, o poco meno, del secondo, accompagnati però costantemente da acido ossalico (7 a 14 p. c.). Ciò dimostra che nella molecola dell'olivile devono esistere due nuclei benzinici, i quali forniscono i due acidi appartenenti alla serie protocatechica e ne risulta altresì che questi due nuclei sono legati tra loro evidentemente da un gruppo  $C_6H_{10}O_3$  e contengono ciascuno un ossimetile ed un ossidrile fenico nelle posizioni in cui questi gruppi trovansi nella serie vaniglica. In appoggio a ciò sta l'altro fatto da noi constatato che l'olivile a temperatura elevata si decompone e lascia distillare un liquido bruno, da cui facilmente si può separare un prodotto incolore, avente punto di ebollizione fisso e corrispondente per questo e per gli altri suoi caratteri al *creosolo*, di cui possiede anche la composizione. Questo prodotto era già stato osservato dal Sobrero, che lo ritenne per un isomero dell'eugenolo, non avendo potuto ottenere cristallizzato un composto potassico, il quale invece risulta facilmente col nostro prodotto puro.

Trattando il dimetilolivile con anidride acetica si ottiene un derivato biacetilico, sotto forma di una sostanza vetrosa trasparente ed incolore, che non siamo riusciti ad avere cristallizzata e che colla potassa rifornisce la sostanza primitiva; questo dimostra la presenza di due ossidrilici alcoolici nella catena  $C_6 H_{10} O_3$ .

I fatti sin qui esposti conducono alla conclusione che l'olivile altro non è che un prodotto di condensazione tra due molecole di alcool coniferilico, o di un suo isomero, avvenuta coll'intervento di un atomo di ossigeno: sulla posizione e funzione di questo atomo di ossigeno non abbiamo ancora dati sufficienti per poter decidere con sicurezza.

*Isoolivile.* L'olivile idrato od alcoolato, riscaldato per pochi minuti con acido acetico diluito (1 a 4) e meno bene con altri acidi, si trasforma quantitativamente in un isomero, Isoolivile, che è pure due volte fenolo e due volte anisolo e possiede l'identico peso molecolare dell'olivile anidro, da cui differisce per tutte le proprietà fisiche: la forma cristallina, il punto di fusione, l'azione sulla luce polarizzata ecc. Questa trasformazione non abbiamo potuto realizzare coi derivati metilato od etilato dell'olivile e, d'altra parte, ad onta di numerosi tentativi eseguiti in condizioni differenti, non siamo riusciti a ritornare dall'isolivile, o da un suo derivato, all'olivile primitivo, o ad un derivato di esso.

L'isolivile cristallizza pure con diversi alcoli e si unisce all'etere etilico. Devia energicamente a destra il piano della luce polarizzata, mentre l'olivile è levogiro e devia con assai minore intensità.

L'isoolivile fornisce derivati mono- e bi-alchilici, tutti facilmente e bene cristallizzabili; i prodotti monoalchilati cristallizzano coi solventi (acqua ed alcoli). I prodotti di ossidazione del dimetil- e del dietil- isoolivile sono interessantissimi sotto diversi riguardi. Sono più complessi di quelli ottenuti dai dialchilolivile corrispondenti. Tra essi vi sono due acidi ed un composto neutro meno ossigenato, intermedio tra la sostanza primitiva ed uno degli acidi.

In altra nota descriveremo queste sostanze, la cui costituzione molto probabilmente condurrà al riconoscimento della struttura della catena laterale e della funzione dell'ultimo atomo di ossigeno non idrossilico in essa contenuto.

Chimica fisiologica. — *Identità della colesterina del latte con quella della bile* <sup>(1)</sup>. Nota del Corrispondente A. MENOZZI.

La presenza della colesterina nel latte di vacca fu segnalata fino dal 1866 da Hoppe-Seyler <sup>(2)</sup>; nel 1867 fu riscontrata e determinata quantitativamente nel latte di donna da Tolmatscheff <sup>(3)</sup>; ed in seguito fu indicata come componente normale del latte in generale da Hoppe-Seyler <sup>(4)</sup>.

Ma se è certa la presenza della colesterina nel latte e se si possiede anche qualche dato intorno alla quantità per la quale è contenuta nel latte medesimo, non è dimostrato finora che essa sia identica alla colesterina della bile. Da vari fatti si può presumere che si tratti dell'identico composto; ma non è esclusa la possibilità che si tratti invece di un isomero in generale o di uno stereoisomero in ispecie. L'esistenza di un isomero nel grasso di lana (il composto chiamato isocolesterina), e quella di isomeri nelle piante (i composti chiamati fitosterine), lasciano ammettere la possibilità che la colesterina del latte non coincida perfettamente con quella della bile.

Per queste ragioni ho creduto utile di fare uno studio un po' approfondito della colesterina del latte nell'intento di precisarne la natura. Questo studio presentavasi opportuno anche per un altro riguardo. Da qualche tempo è stata proposta l'identificazione della colesterina del latte e rispettivamente la ricerca della fitosterina, come mezzo di riconoscimento della eventuale sofisticazione del burro con margarina <sup>(5)</sup>, quando, come prescrive la legge tedesca, la margarina deve essere mescolata con olio di sesamo. Il quale metodo presuppone di conoscere perfettamente la colesterina del latte.

Mi sono procurato una sufficiente quantità di colesterina del latte di vacca separandola col procedimento indicato dal Bömer <sup>(6)</sup>, procedimento che se ha l'inconveniente di richiedere molto solvente, offre il vantaggio di arrivare presto in possesso del prodotto quasi puro. La colesterina greggia l'ho purificata mediante cristallizzazioni da alcool dapprima poi da miscele di alcool ed etere.

Sul prodotto puro si sono fatte le seguenti osservazioni e determinazioni.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

<sup>(2)</sup> Medicinisch-chemische Untersuchungen, Heft I.

<sup>(3)</sup> Medicinisch-chemische Untersuchungen, Heft II, 1867, pag. 272-75.

<sup>(4)</sup> Physiologische Chemie, 1881, pag. 725.

<sup>(5)</sup> A. Römer, Beiträge zur Analyse der Fette. Ueber den Nachweis von Pflanzenfetten in Thierfetten mittels der Phytosterinacetat probe. Zeit. für Untersuchung der Nahrungs und Genussmittel, 1901, pag. 10-70.

<sup>(6)</sup> Zeit. für Untersuchung der Nahrungs und Genussmittel, vol. I, 1898, pag. 38.

Sciogliendo alcuni centigrammi di sostanza in 2 c. m. c. di cloroformio, aggiungendo 2 c. m. c. di acido solforico concentrato, poi agitando il cloroformio, si colora in rosso-sangue dapprima, poi in rosso-ciliegia, mentre l'acido solforico presenta una forte fluorescenza verde. Versando in una capsula un po' della soluzione cloroformica sovrastante, si ha dapprima una colorazione bleu, indi verde e da ultimo giallo-pallida.

La sostanza fonde a 147°.

Scaldando in corrente d'aria secca ad una temperatura di 70-80° (1), gr. 1,450 di sostanza hanno perduto gr. 0,065, ciò che corrisponde a 4,48% di acqua.

La combustione della sostanza secca ha dato questi numeri: con gr. 0,3526 di sostanza si sono ottenuti gr. 1,0087 di CO<sub>2</sub> e gr. 0,387 di H<sub>2</sub>O. Da cui:

|     |        |
|-----|--------|
| C % | 83,70  |
| H " | 12,20. |

Il risultato della determinazione dell'acqua di cristallizzazione corrisponde alla formola C<sub>26</sub>H<sub>43</sub>OH. H<sub>2</sub>O, la quale richiederebbe 4,66 % di acqua. Così le determinazioni del carbonio e dell'idrogeno hanno dato dei risultati che si accordano colla formola C<sub>26</sub>H<sub>43</sub>OH, la quale (prendendo pei pesi atomici H = 1; C = 11,98; O = 15,88) richiederebbe:

|     |       |
|-----|-------|
| C % | 83,80 |
| H " | 11,90 |

Ma d'altra parte vanno abbastanza d'accordo anche coll'altra formola proposta per la colesterina allo stato secco C<sub>27</sub>H<sub>45</sub>OH, che richiederebbe:

|     |       |
|-----|-------|
| C % | 83,86 |
| H " | 12,00 |

Così soddisfanno all'altra formola pure proposta per la colesterina C<sub>27</sub>H<sub>43</sub>OH.

L'osservazione della soluzione cloroformica al polarimetro ha dato questi risultati: con una soluzione di gr. 4,501 di sostanza in cloroformio, al volume di 25 c. m. c., alla temperatura di 15°, in tubi lunghi 20 c. m., si è avuta una deviazione a sinistra di 12°,11'. Da cui si ha pel potere rotatorio specifico:

$$\begin{aligned} (\alpha)_D^{15^\circ} &= -33^\circ,7 \text{ per la sostanza idrata} \\ (\alpha)_D^{15^\circ} &= -35^\circ,41 \text{ " " anidra.} \end{aligned}$$

Operando presso a poco nelle stesse condizioni di concentrazione e temperatura colla colesterina della bile (gr. 4,620 in cloroformio a 25 c. m. c.)

(1) Per eliminare l'acqua di cristallizzazione dalla colesterina non occorre arrivare a 100°; rimanendo a 70-80° si ha il vantaggio che la sostanza non si agglutina, come incomincia a fare a 100°.

ho ottenuto  $(\alpha)_D^{44} = -34,1$  per la sostanza idrata e  $(\alpha)_D^{44} = -35,80$  per la sostanza anidra.

Sebbene i dati sopra riportati stieno a dimostrare l'identità della colesterina del latte con quella della bile, ho voluto, per maggior sicurezza, preparare alcuni esteri e compararli coi corrispondenti della colesterina biliare.

*Formiato.* — Ottenuto scaldando a b. m. la colesterina anidra con acido formico anidro in lieve eccesso; evaporando, indi, per scacciare l'eccesso di acido formico, poscia riprendendo il residuo con alcool assoluto bollente, con aggiunta di una piccola quantità di nero animale.

Per raffreddamento il prodotto si depone in aghi ben sviluppati, se la soluzione non è troppo concentrata. Due ricristallizzazioni da alcool portano il prodotto allo stato di purezza.

L'etere è anidro; fonde a  $96^\circ \text{C}$ .

La determinazione del potere rotatorio ha dato questi risultati: gr. 2,7008 di etere, sciolti in cloroformio, portato il volume a 25 cc.; con tubi lunghi 20 cm. alla temperatura di  $14^\circ$  si è avuta una rotazione di  $-11^\circ 12'$ . Ciò dà per potere rotatorio specifico:

$$(\alpha)_D^{44} = -51,83.$$

Punto di fusione e potere rotatorio corrispondono perfettamente a quelli del formiato della colesterina della bile. Il punto di fusione, dato da Bömer e Winter, che per primi prepararono quest'etere, è a  $96,8$  (corr.). E questo è pure il punto trovato su un campione da me appositamente preparato; e pel potere rotatorio ho ottenuto (con gr. 3,005 a 25 cc.):

$$(\alpha)_D^{43} = -51,48.$$

Avverto che pel confronto di questo come degli altri derivati della colesterina, di cui in appresso, rispetto al potere rotatorio specifico, è necessario lavorare per quanto possibile nelle stesse condizioni di concentrazione e di temperatura, variando sensibilmente il potere rotatorio medesimo a seconda dei due indicati fattori.

*Acetato.* — Preparato col trattare la colesterina anidra con anidride acetica, portando all'ebollizione per alcuni minuti, poi evaporando a bagno maria al fine di scacciare l'eccesso di anidride acetica. Riprendendo il residuo con alcool assoluto bollente, scolorando con un po' di nero animale, si ha tosto un prodotto incolore, e con due ricristallizzazioni da alcool, affatto puro. Dall'alcool si depone in lunghi prismi aghiformi. Da alcool ed etere, in cristalli abbastanza sviluppati.

Il prodotto è anidro; la combustione ha dato questi risultati: da gr. 0,258 di sostanza si sono ottenuti gr. 0,7748 di  $\text{CO}_2$  e 0,2652 di  $\text{H}_2\text{O}$ ,

da cui

$$C \% — 81,50$$

$$H \text{ „ } — 11,39$$

L'etere acetico della colesterina della bile è stato studiato da Bömer e Winter <sup>(1)</sup>, i quali hanno dato per punto di fusione 114°,3-114°,8 (corr). Io ne ho determinato il potere rotatorio (con p. 5,500, sciolti in cloroformio a 25 cc. a 14°), ed ho ottenuto per potere rotatorio specifico  $(\alpha)_D^{14} = -42°,5$ .

L'etere da me ottenuto dalla colesterina del latte fuse a 114° (corr.); riguardo al potere rotatorio ho ottenuto questo risultato: gr. 4,2996 sciolti in cloroformio, a 25 cc.; con tubi lunghi 20 cm. a 14°, rotazione osservata — 14°,30. Ciò che dà:

$$(\alpha)_D^{14} = -42°,7.$$

Il dott. Boeris ha studiato questo etere in confronto di quello della colesterina biliare e mi ha comunicato quanto segue:

« I cristalli dell'acetato di colesterina secondo Zepharovich sono del sistema monoclinico colle costanti:

$$a : b : c = 1,8446 : 1 : 1,7283$$

$$\beta = 73°,38'$$

« Hanno aspetto ora di laminette e ora di aghi e sono sempre allungati secondo l'asse [010]. Presentano le seguenti forme:  $\{001\}$   $\{100\}$   $\{\bar{1}01\}$   $\{\bar{1}10\}$   $\{011\}$   $\{010\}$   $\{111\}$   $\{112\}$ .

« Lo stesso aspetto e le stesse forme, meno  $\{010\}$ , hanno i cristalli di acetato di colesterina del latte. I valori angolari di quest'ultimo sono in buonissimo accordo con quelli calcolati dallo Zepharovich per i cristalli dell'acetato di colesterina comune, come risulta dalla seguente tabella:

| acetato colesterina<br>della bile |             | acetato colesterina<br>del latte |
|-----------------------------------|-------------|----------------------------------|
| (001) : (100)                     | 73°,38'     | 73°,36'                          |
| (001) : ( $\bar{1}00$ )           | 50°,41'.18' | 50°,44'                          |
| (110) : (100)                     | 60°,32'     | 60°,40'                          |
| (110) : (001)                     | 82°,2'      | 82°,5'                           |
| (111) : (110)                     | 25°,51'.36' | 25°,52'                          |
| (111) : (112)                     | 16°,22'.18' | 16°.17'                          |

Anche nei cristalli di acetato di colesterina del latte si ha una direzione

(1) Zeit. für Untersuchungen der Nah. und Genussmittel 1901, p. 865.

di estinzione parallela allo spigolo [010]. Gli assi ottici poi sono in piani normali al piano di simmetria ».

*Benzoato.* — Ottenuto riscaldando colesterina anidra colla quantità equimolecolare di anidride benzoica a 160° per alcune ore. Il composto fu purificato cristallizzandolo da miscela di alcool ed etere.

Il punto di fusione è stato trovato a 146°. Riguardo al potere rotatorio ecco i risultati ottenuti: gr. 3,7408 di sostanza, furono sciolti in cloroformio, portando il volume a 25 c. m. c.; la soluzione fu osservata in tubi lunghi 20 cm., alla temperatura di 13° C.; la rotazione rilevata fu di — 4°, 42'. Da cui si calcola:

$$(\alpha)_D^{43} = -15^{\circ},1$$

L'etere benzoico della colesterina della bile preparato per confronto, mostrò lo stesso punto di fusione: così pure il potere rotatorio è della stessa grandezza di quello ottenuto dalla colesterina del latte, le osservazioni fatte in proposito portano all'espressione  $(\alpha)_D^{43} = -15^{\circ},4$ .

L'esame cristallografico compiuto dal prof. Boeris ha dato i risultati che qui si riportano.

#### Benzoato di colesterina del latte.

Sistema tetragonale.

$$a : c = 1 : 3,57115$$

forme osservate      {001}    {111}    {112}    {113}

| Angoli                  | Valori osservati | Valori calcolati |
|-------------------------|------------------|------------------|
| (001) : (111)           | 78°, 48'         | *                |
| (111) : (1 $\bar{1}$ 1) | 87°, 30'         | 87°, 50'         |
| (001) : (112)           | 68°, 47'         | 68°, 24'         |
| (001) : (113)           | 59°, 40'         | 59°, 17'         |

Sfaldatura perfetta secondo la base. Doppia rifrazione negativa.

La sostanza è quindi cristallograficamente identica al benzoato di colesterina della bile studiata dal Fock (Zeit. für Krystall. und Min. XXI, 243) e preparato da Obermüller (Inaug. Dissert. Berlin 1893, 23). Il Fock peraltro prendendo pure come fondamentale il valore 78°, 48' che osservò per lo spigolo (001) : (111), calcolò erroneamente questo rapporto parametrico

$$a : c = 1 : 3,6265$$

e questi angoli

$$\begin{aligned} (111) : (1\bar{1}1) &= 87^{\circ},30 \\ (001) : (112) &= 68^{\circ},42 \end{aligned}$$

pei quali trovò rispettivamente  $88^{\circ}.0'$  e  $68^{\circ}.33$ . Anche nei cristalli di benzoato di colesterina della bile si ha sfaldatura perfetta secondo (001) e doppia rifrazione negativa.

Tutti i dati soprariportati intorno alla colesterina del latte ed intorno ad alcuni suoi eteri stanno a dimostrare che essa è identica a quella della bile.

Biologia vegetale. — *Biologia dei semi di alcune specie d'Inga*. Nota del Corrispondente A. BORZI.

Molte specie del genere *Inga* (Mimosee) presentano il rarissimo e forse nuovo caso di *diretta disseminazione di embrioni*, anzichè di semi normalmente provvisti di tegumenti o di altri annessi. Tale particolarità, finora ignota agli autori, conferisce alla biologia della disseminazione e della germinazione di quelle specie qualcosa di quanto mai caratteristico ed interessante. Difatti facilmente si comprende che se fra le proprietà fisiologiche e biologiche del seme primeggiano quelle che permettono ad esso di persistere più o meno lungamente allo stato di riposo e di provvedere alla sua conservazione e diffusione nei rapporti cogli agenti esteriori, importante argomento di studio divien quello in cui tali prerogative vengono per caso unicamente e direttamente ad essere esercitate dal solo embrione pervenuto sul terreno spoglio di tuniche protettrici e regolatrici degli atti della vita esteriore. Per questo fatto gli embrioni d'*Inga* hanno con sorprendente perfezione assunto i caratteri esteriori di veri semi completi; sicchè non può recar meraviglia se anche nelle opere fitografiche più autorevoli essi trovansi indicati e descritti col nome di semi.

Quantunque siffatta particolarità è da ritenersi sia caratteristica di tutte quelle specie indicate dagli autori con semi ravvolti da un mantello polposo, la mia attenzione è stata rivolta soltanto alla *Inga Feuillei* DC., la quale si coltiva in questo R. Orto botanico, ove è capace di raggiungere le dimensioni di un bell'albero che fruttifica copiosamente e regolarmente tutti gli anni.

Riferendomi appunto a tale specie dirò che i legumi maturano nel corso dell'inverno e possono perfino raggiungere una lunghezza di 50 cm. Essi sono spessi e larghi fino a 4 cm. colle facce turgide e convesse e lungo le due suture fortemente schiacciati e depressi, dando luogo in questa regione a due robusti rilievi laterali marginali a mo' di ala. È precisamente lungo la faccia interna delle ale che prendono origine le fessure di deiscenza. Queste rimangono d'ordinario molto strette ed incomplete da non permettere la spontanea uscita dei semi. In tal modo i legumi maturi, sorretti da robusti pe-

duncoli, spenzolano dai rami costituendo un *apparato di disseminazione pendulo, oscillante e liberamente accessibile alla visita di animali volatili e specialmente di uccelli*.

I caratteri normali dei semi vanno ricercati in legumi che abbiano appena raggiunta metà o un terzo della lunghezza definitiva. Il corpo embrionale apparisce a quell'epoca completamente avviluppato dall'integumento che ha l'aspetto di una membranella sottile, molle, bianchiccia, a superficie finalmente granulosa e lucida, facilmente separabile dal corpo stesso.

La parte più prevalente di quest'ultimo è rappresentata dai due cotiledoni che sono di forma schiacciata quasi fogliacea, brevemente ovale od ellissoide ed hanno un colorito pallido verdastro e stanno situati strettamente in contatto l'uno contro all'altro per mezzo della faccia interna. In tal guisa nel suo complesso il seme prende una forma lenticolare.

La radichetta e l'asse embrionale scorgonsi appena appena, essendo nascosti dai lobi cotiledonari. Sicchè nulla di anormale presenta nei suoi caratteri morfologici il seme considerato in questo stadio. Più tardi a mano a mano che progredisce il grado di maturazione, l'integumento diviene più spesso e di una tinta più chiara, mentre la superficie prende un aspetto tomentoso più brillante di prima. Sotto la lente, questa appare tappezzata da un denso intreccio di brevi e delicate papille trasparenti, a riflessi argentini o sericei. Intanto è cresciuto anche lo spessore e l'ampiezza dei lobi cotiledonari, e questi sono divenuti più duri, più rigidi e più robusti e fortemente convessi sulla faccia esterna, mentre la loro tinta tende già al verde olivaceo scuro, e va a poco a poco ad accostarsi al nero violaceo.

A compiuta maturità e prima che avvenga la deiscenza, al posto dei semi scorgiamo allagate, dentro corrispondenti escavazioni o fossette all'interno del legume, delle masse distinte di forma sferico-depressa, aventi l'aspetto di veri gomitoli di densa, molle bambagia, bianchissima, anzi a riflessi brillanti a dirittura come neve. Esse si distaccano facilmente e sotto la più lieve compressione salta fuori dal loro interno un grosso corpo lenticolare biconvesso, molto resistente, della grossezza di una fava comune, nero e lucente che facilmente sdrucchiola e scappa dalle dita. La materia cotonosa sembra che aderisca alla superficie di detto corpo per mezzo di uno straterello membranoso, molle quasi come una pellicola cartilaginea. Il corpo stesso, per la durezza, per il colorito e per il posto che occupa, assume l'apparenza di un vero seme, mentre l'invoglio cotonoso sembra qualcosa di accessorio a questo e ci richiama a talune di quelle multiformi produzioni arillari che occorrono così frequenti nei semi delle Leguminose.

A tale particolarità si riferiscono precisamente le indicazioni di *semina pulpa dulci involuta v. rarius nuda* che leggiamo in HOOKER e BENTHAM (Gen. Pl. 1, 599) e quelle di *Samen von einem Fruchtbrei umgebem selten ohne diesen* riportate nelle *Pflanzenfamilien* di ENGLER e PRANTL (III, 3°,

pag. 101). Ma un'attenta considerazione ci rivela tosto che l'invoglio molle, cotonoso suddescritto, proviene direttamente dall'integumento del seme, nessun altro organo accessorio o estraneo a quest'ultimo prende parte alla sua formazione, nemmeno temporaneamente; mentre ciò che rimane al disotto dell'invoglio e così apparentemente ritrae i caratteri di un vero seme, rappresenta integralmente l'embrione normale, completo in tutta la sua organizzazione.

Durante la evoluzione del seme si riesce chiaramente a determinare che quella sorta di mantello d'aspetto, come si disse, serico e cotonoso, deriva particolarmente dallo strato epidermico (o malpighiano) del tegumento seminale, di cui tutte le cellule si accrescono considerevolmente in altezza e formano estesi prolungamenti a mo' di delicatissimi peli. Questi sono semplici e tratto tratto irregolarmente sinuosi e decorrono fitti e serrati, costituendo una sorta di feltro compatto inestricabile. Le pareti sono sottilissime, trasparenti e si trovano mantenute in istato di forte tensione dall'abbondante succo cellulare, anch'esso diafano e *ricco in modo superlativo di glucosio*.

Da tali condizioni fisiche deriva il candore sericeo brillante che contraddistingue l'inviluppo di cui è parola. La straordinaria quantità di materia zuccherina del contenuto cellulare si rivela anche al semplice gusto. E così prende origine una materia eminentemente appetibile agli animali e molto gradita anche al palato dell'uomo stesso. Per questa ragione io ritengo, l'*Inga Feuillei* e forse ancora altre specie congeneri, si trovano coltivate negli orti dell'America meridionale come piante a frutti commestibili.

Gli altri tessuti del tegumento seminale, durante l'evoluzione descritta, non subiscono che lievi modificazioni. Da essi deriva lo stato membranoso interno dell'invoglio, il quale è formato da un parenchima del tutto omogeneo. Soltanto da un lato questo è percorso dal fascio libero-legnoso proveniente dal funicolo ombelicale; del resto le cellule si dispongono in piani regolari, e sono quasi tutte piuttosto piccole, con pareti mediocrementemente ispessite e cellulosiche, e contengono anch'esse abbondante copia di glucosio.

Il tegumento seminale, così costituito, forma un tutto perfettamente distinto e indipendente dal sottoposto embrione e facilmente separabile da questo. Fra l'uno e l'altro anzi ordinariamente si frappone un tenue straterello di materia viscida e scorrevole al tatto e che umetta la superficie degli embrioni e fa sì che questi facilmente scappino e scivolino alla più lieve pressione esercitata colle dita nel momento di liberarli della tunica inviluppante. A prescindere per ora da ciò, essi presentano una forma lenticolare biconvessa.

Gli embrioni maturi somigliano come si è detto a grossi semi del tipo ordinario e comune alle altre Leguminose. Hanno nell'insieme una forma lenticolare biconvessa a contorno ovale o ellittico più o meno regolare, e un colorito nero violaceo intenso, talora anche nero piceo accompagnato da lu-

centezza quasi metallica che persiste anche alcun tempo dopo la disseminazione. Sono piuttosto massicci e capaci di pesare allo stato fresco da 3 a 4 gr. l'uno; si possono paragonare per volume ad una grossa fava. La materia di cui sono formati è resistente, anzi coriacea. Visti sul terreno somigliano molto grossolanamente a dei grossi coleotteri, carattere che, come vedremo, potrà avere la sua particolare importanza.

I due cotiledoni sono fortemente convessi verso il centro e combaciano così strettamente colla loro faccia interna piana da riuscire quasi difficile lo scorgere a prima vista la linea di commissura; anzi per assicurare la perfetta chiusura dei margini dei due lobi cotiledonari, gli orli sono spianati ed inclinati in modo da corrisponderli esattamente come i battenti di un uscio. Talora anche per lo stesso scopo l'orlo, sollevato e spianato, di un cotiledone si ribatte sul margine dell'altro. Le due facce interne dei cotiledoni presentano verso la base una piccola fossetta o scannellatura destinata a ricevere l'asse dell'embrione, in guisa da rimanere questo ermeticamente chiuso e riparato.

La biologia della disseminazione e germinazione dei semi dell'*Inga Feuillei* dà ragione di altre importanti particolarità di struttura che presentano gli embrioni.

Progredendo lo stato di maturazione dei semi, il cresciuto volume dell'embrione forza le linee di deiscenza e determina l'apertura parziale del legume. Il mantello sericeo candidissimo che involge i semi si scorge facilmente al di fuori. La materia zuccherina copiosissima accumulata nei suoi elementi serve di esca ad alcuni uccelli. Le valve del legume spenzolante dai rami non si aprono completamente, ma per quanto basta a rendere appariscenti i semi. Anche le pareti interne del legume presentano la stessa tinta candida e brillante. Tutto ciò è sufficiente ad esercitare una bastevole azione vessillare sugli uccelli, essendo questi particolarmente dotati di eccellente potere visivo a grande distanza.

Sotto il clima di Palermo la disseminazione della *Inga Feuillei* ha luogo per mezzo delle capinere. Ho visto questi animali aggirarsi intorno all'unico esemplare di quella specie che coltivasi nel Giardino botanico, lanciarsi sui legumi già aperti e senza cessare il volo afferrare e carpire col becco qualche seme e tentare di asportarlo. La grossezza di questo e la facilità colla quale l'involuppo si separa dal corpo embrionale, ordinariamente sono di ostacolo perchè l'animale riesca ad impossessarsi subito od a portar via a grande distanza integralmente qualche seme del quale si è impadronito. Molto spesso, alle prime strette, il mantello sericeo si lacera, l'embrione scivola rapidamente di bocca e cade sul terreno. Così la polpa dolcissima dell'invoglio è subito inghiottita.

Per questa ragione, e nel caso particolare da me osservato, si può dire che i semi d'*Inga* non possiedano disposizioni atte ad assicurare ad essi

un'estesa disseminazione. Ma ciò poco importa per la diffusione della specie, giacchè, come molti esempi ci ammaestrano, la grossezza ed il peso dei semi o frutti ed altre difficoltà materiali che a prima vista sembra debbano riuscire di ostacolo ad una larga disseminazione per mezzo di animali o del vento, non costituiscono sempre una condizione di svantaggio in ordine alla diffusione geografica e di fronte ad altre specie fornite di semi o frutti più facilmente asportabili a grandi distanze. E a questo proposito va notato che questa specie, come altre del genere appartengono al novero di quelle che formano oggetto di coltura negli orti dell'America meridionale a cagione dei frutti, come si disse, commestibili; e quindi trattasi di una circostanza che molto vantaggiosamente può influire sulla frequenza e disseminazione della specie.

Con tale artificio dunque gli embrioni nudi di *Inga* pervengono sul terreno, e si inizia tosto o tardi la fase della vita germinativa. Se la disseminazione venisse però ritardata o impedita per cause esterne e specialmente per la mancata visita degli uccelli disseminatori, la germinazione ha luogo all'interno dello stesso legume. Avendo osservato questo caso nelle piante coltivate sotto il nostro clima, non saprei affermare se debba considerarsi come un fatto normale e caratteristico di questa specie. Certo che tutte le più favorevoli condizioni influiscono sulla germinazione degli embrioni all'interno dei legumi. Il voluminoso mantello di cui sono involti i semi è sede di grande copia di umidità; sicchè le prime fasi germinative possono compiersi regolarmente e prontamente. Ho visto degli embrioni in germinazione dentro legumi rimasti appesi tutto l'inverno sui rami, in cui la radicetta aveva raggiunto una lunghezza di 5 cm. Un lieve spiraglio praticato attraverso le linee di deiscenza per la pressione esercitata dagli embrioni germinanti, basta a favorire l'uscita della piumetta. In tal modo, ripeto, possiamo benissimo spiegarci i frequenti casi di *viviparità* da me osservati senza attribuire ad essi un carattere normale per la specie di cui è parola; almeno ciò non è possibile finchè non saranno compiuti studi sull'argomento nei paesi originari.

Sul terreno, gli embrioni nudi si trovano subito esposti a quelle medesime condizioni che ordinariamente agiscono sui semi. Il seme, è bene ricordarlo, a prescindere dalle sue attitudini fisiologiche, che lo rendono per eccellenza idoneo alla conservazione della razza, non è che un vero apparato biologico destinato a regolare l'esercizio di quelle attitudini sotto la influenza degli svariati e variabili rapporti coll'ambiente. Tutti gli embrioni dei vegetali superiori fondamentalmente si somigliano perchè identica ed unica è nella sua essenza, presso ogni individuo, la maniera colla quale è provveduto alla conservazione della specie; identica è, cioè, la funzione della radicetta, dei cotiledoni e della piumetta. Ma il pieno esercizio di tale funzione esige l'intervento di molteplici e differenti atti biologici ai quali sono principal-

mente deputate tutte le parti annesse o accessorie che sogliono accompagnare l'embrione sul terreno. Ciò spiega il vero significato degli invogli e degli altri annessi seminali, e nel caso particolare degli embrioni d'*Inga* la considerazione, come feci rilevare, acquista molta importanza, perchè l'embrione stesso e da per sè medesimo, in questa specie deve soddisfare alle medesime condizioni biologiche per regola devolute al seme completo. E fra queste primeggia la capacità di resistere e conservare più o meno lungamente la facoltà germinativa senza pregiudizio dello sviluppo. Questa proprietà è invero importante nei riguardi fisiologici e molto più dal lato biologico.

Se un embrione venisse sottratto dai tessuti o dalle parti che lo circondano e abbandonato sul terreno, difficilmente riuscirebbe a compiere il suo sviluppo, poichè esso manca della facoltà di adattarsi e resistere alle azioni dell'ambiente; soprattutto fa difetto in esso il potere di resistenza alla secchezza e le sue parti delicatissime si disseccerebbero ben presto.

Negli embrioni d'*Inga Feuillei* il caso è diverso. *La resistenza alla secchezza raggiunge in essi un maximum paragonabile soltanto con quello che avviene in semi perfetti.* Ho esposto per quindici giorni continui all'aria racchiusa sotto una campana di vetro e tenuta secca per azione dell'acido solforico concentrato alcuni embrioni, senza che rimanessero menomamente alterate le facoltà germinative di essi. Detti embrioni erano stati in precedenza pesati e la perdita di peso subita in quindici giorni è qui appresso segnata:

| Peso primitivo             | Peso<br>dopo il dissecca-<br>mento | Peso perduto | Peso perduto<br>in rapporti<br>centesimali |
|----------------------------|------------------------------------|--------------|--------------------------------------------|
| I. Embrione gr. 3,362      | gr. 1,968                          | gr. 1,394    | 41 %                                       |
| II.       "       " 3,017  | " 1,662                            | " 1,355      | 44 %                                       |
| III.       "       " 3,780 | " 2,328                            | " 1,472      | 39 %                                       |
| IV.       "       " 3,303  | " 2,016                            | " 1,287      | 39 %                                       |
| V.       "       " 3,578   | " 2,128                            | " 1,450      | 40 %                                       |

Da tali dati si scorge anzitutto che la perdita d'acqua avvenuta per effetto della traspirazione è stata relativamente insignificante, tenuto conto del volume degli embrioni e della *durata* della esperienza. L'esame anatomico infatti dimostra che tutto il corpo embrionale, specialmente i cotiledoni che ne rappresentano la parte più rilevante, è costituito da tessuti compatti, privi affatto d'interstizi aeriferi e di lacune dentro cui possano l'acqua o il vapor acqueo circolare o depositarsi. Tutto il lavoro della emissione dell'acqua si riduce ad un semplice processo di traspirazione cuticolare, che da per sè stessa rappresenta cosa molto esigua. Mancano idatodi o simili organi; nè esistono stomi in tutta l'epidermide e gli elementi di questo

tessuto, relativamente molto piccoli e di forma poligona tabulare, sono fitti, serrati e costituiscono un plesso compatto, omogeneo, rivestito da uno strato cuticolare abbastanza spesso.

A preservare vieppiù dal disseccamento gli embrioni giova efficacemente lo strato di cellule od antociana situato sotto l'epidermide e formante una zona continua e omogenea in tutto il percorso degli organi. Il copioso contenuto di materia tannica, che contraddistingue siffatti elementi, basta a dimostrare l'importanza biologica di detto strato in ordine alla funzione traspirativa. Ma anche sotto altri riguardi è importante la considerazione di tali cellule come adattamento o mezzo di esplicazione della funzione difensiva nei rapporti cogli animali, imperocchè da una parte la presenza del tannino alla periferia degli embrioni costituisce una cinta, si può dire, di sicurezza contro l'avidità di molti roditori, essendo quella materia amara e disgustosa al palato; dall'altra, determinando siffatti elementi la caratteristica colorazione nero-violacea intensa dei cotiledoni, è possibile pensare che molto probabilmente la funzione difensiva venga esercitata col *mimismo*, giacchè, come fu rilevato, tenuto conto della forma, quella tinta conferisce agli embrioni una certa grossolana rassomiglianza col corpo di alcuni insetti.

Le descritte disposizioni protettive riguardano naturalmente i soli cotiledoni, che per il loro considerevole volume rappresentano certo la parte più rilevante dell'embrione. Posti strettamente in contatto fra di loro, essi servono nel tempo stesso a proteggere le altre parti del germe, le quali, come si disse, si trovano interamente racchiuse e nascoste dentro un'apposita fossetta o camera scavata alla base di ogni lobo cotiledonare.

Ma oltre a ciò, tanto la radichetta, quanto la plumula, compreso l'asse epicotiledonico, possiedono particolari proprie disposizioni di difesa contro la secchezza o altre azioni esterne.

La radichetta infatti all'epoca della disseminazione ha l'aspetto di un corpo conico massiccio, lucido, della lunghezza di circa 2 mm. sopra una larghezza di 1 a 1  $\frac{1}{2}$  mm. Sezionandola longitudinalmente colpisce il considerevole sviluppo e la particolare struttura della pileoriza e questa prende il carattere di un vero astuccio resistente, formato da elementi compatti densamente associati fra di loro in strati periclinici fitti a pareti relativamente spesse. La compattezza e resistenza crescono verso l'esterno, anzi *l'estrema serie di cellule periferiche presenta pareti distintamente cuticularizzate*. Durante la germinazione siffatto astuccio si sfalda e staccasi in striscioline irregolari, mentre il cono di vegetazione si allunga.

La plumula, compreso l'asse epi- ed ipocotiledonico, quantunque poco evoluti, sono coperti da una densa e lunga pelurie di color fosco ferrugineo formata da due sorta di peli; gli uni molto forti, rigidi e cuticularizzati, unicellulari; gli altri più brevi, costituiti di molte cellule sferiche e in sommo grado turgescanti per la grande copia di tannino che contengono.

Gli embrioni nudi di *Inga*, disseccati al lento calore di una stufa, si contraggono, si riduce alquanto il loro volume e la materia da cui sono formati, prende una consistenza quasi cornea. Osservando in tale stadio la radicetta e la plumula, si può rilevare che il disseccamento non ha alterato questi ultimi organi. Tenuti in acqua per alcune ore, gli embrioni ripigliano a poco a poco il primitivo vigore e germinano regolarmente.

Sottoponendo degli embrioni freschi ad una corrente d'aria calda e secca e molto lentamente facendo innalzare la temperatura sino a 65° C., si ottengono i medesimi risultati. Notisi anche che nel caso di tali esperienze gli embrioni si sono trovati esposti per due ore ad una temperatura compresa fra' 50° ai 60° C. È possibile che i limiti di resistenza al calore sieno ancora più elevati sperimentando su embrioni disseccati spontaneamente alla temperatura normale.

A questo riguardo il loro comportamento può dirsi identico a quello dei semi delle altre Leguminose. Mancano però osservazioni sul limite massimo di durata delle facoltà germinative.

Nei semi in generale, le disposizioni relative all'aeramento e al regime dello scambio dei prodotti gassosi hanno principalmente sede negli integumenti, particolarmente nelle Leguminose. Nel caso dei semi d'*Inga* l'esercizio della funzione aerifera non esige speciali artifizi, essendo gli embrioni nudi. Ma mentre i cotiledoni colla faccia loro esterna sono in diretto contatto coll'aria, l'asse dell'embrione e specialmente la radichetta, trovandosi, come si disse, ermeticamente chiusi dentro una particolare fossetta scavata verso la base della faccia interna dei lobi cotiledonici, occupano una posizione meno vantaggiosa nei rapporti coll'ambiente, tanto più che le dette due facce interne dei cotiledoni si toccano e si comprimono a vicenda impedendo l'accesso all'aria. Perchè questa dunque giunga in contatto all'asse embrionale, occorre che la fossetta comunichi coll'esterno. A tal uopo ciascun cotiledone presenta alla sua base un'angusta fessura mediana, che partendosi dall'estremo lembo va a raggiungere detta escavazione. La fessura di ciascun cotiledone si corrisponde esattamente con quella dell'opposto lobo, e ne deriva un vero canalicolo molto stretto sul cui fondo troviamo situata la radichetta rivolta colla sua estremità verso l'esterno. In tal modo, con un artificio molto semplice, prende origine un condotto che possiamo opportunamente chiamare *respiratorio*, il quale interamente corrisponde per funzionalità al canale micropilare, cui in mancanza si sostituisce.

E quasi per avvalorare vieppiù siffatta analogia, l'apertura esterna del descritto condotto, esaminata in semi non ancora maturi, va a sboccare nel dutto micropilare. Sicchè la via del movimento dell'aria apparisce sin dai primordî aperta a beneficio della radichetta e dell'asse cotiledonare.

Intorno alla biologia della germinazione mi restano poche considerazioni da fare.

Gli embrioni d'*Inga* germinano alla superficie del terreno. I cotiledoni sono quindi *epigei*, ma non presentano che scarsi adattamenti allo esercizio della funzione clorofillica, giacchè troppo esigua è la quantità di clorofilla contenuta in essi. Già fin dai primordî della vita embrionale si nota una debole colorazione verdastra nei lobi cotiledonari dovuta a rari granuli clorofillacei; ed anche a maturità persistono tali condizioni. I cotiledoni vanno a poco a poco ad assumere i caratteri di due voluminosi serbatoi di materia amilacea. Il tessuto è nel suo complesso un parenchima molto compatto ed irregolare per la distribuzione degli elementi. Le pareti cellulari sono relativamente spesse, cellulasiche e attraversate da frequenti punteggiature che rappresentano i luoghi di passaggio di minutissimi processi fibrillari protoplasmatici intercellulari.

Durante la germinazione i lobi cotiledonici conservano la caratteristica colorazione nero-violacea, la quale persiste fino a compiuta fase germinativa. Non vi è alcun dubbio sul significato biologico particolare di tal fatto, visto che lo sviluppo si compie all'aperto senza alcun riparo contro l'azione molto intensa della luce. Lo strato superficiale ad antociana, per la presenza in esso della sostanza tannica, deve evidentemente costituire anche un efficace adattamento contro gli attacchi degli animali.

Nella germinazione di semi in generale il primo e più importante atto è quello destinato a liberare la radichetta e l'asse embrionale da ogni ostacolo circostante a far sì che essi si svolgano agevolmente. A tal'uopo l'integumento si rompe secondo determinati modi. Negli embrioni d'*Inga* i cotiledoni, crassi, massicci, resistenti e fortemente serrati l'uno contro l'altro, abbracciano strettamente le altre parti dell'embrione. A favorire lo svolgimento di queste giovano anzitutto le fessure che abbiamo osservate alla base di ogni lobo cotiledonare. Esse costituiscono, come si è detto, un angusto condotto, al fondo del quale si trova collocata la radichetta colla punta in fuori. Le pareti di detto canale sono determinate dalla convergenza dei margini delle fessure. Poichè ogni fenditura divide il lembo inferiore di ciascun lobo cotiledonare in due distinte lacinie per una lunghezza uguale a circa  $\frac{1}{3}$  dell'asse longitudinale mediano del lobo stesso, si può dire che alla formazione delle pareti del condotto concorrano quattro distinti pezzi coi loro margini interni. Il che rende più agevole l'avanzarsi della radice, riducendosi quasi a nulla la difficoltà che dovrebbe superare in confronto al caso in cui questa fosse obbligata a spostare la intera massiccia massa dei due lobi se fossero rimasti indivisi.

L'allungamento della radichetta è seguito anche da quello dell'asse ipocotiledonare, il quale si dirige nel senso geotropico positivo come la radice medesima. Tuttavia il detto asse cessa di allungarsi prestissimo e rimane molto corto, tutto al più un paio di millimetri; sembra che la sua funzione si riduca a quella sola di aiutare la radice a raggiungere prontamente il terreno. Del resto il fatto che i cotiledoni, quantunque *epigei*, non sono

adattati alla funzione clorofillica, pone un limite all'ufficio biologico dell'asse ipocotiledonare.

Con un meccanismo un po' diverso, il fusticino, compresa la plumula, si apre una via d'uscita attraverso i due massicci lobi cotiledonari. A tale scopo questi ultimi divengono a poco a poco divergenti. L'allontanamento è lieve ed all'apice importa tutto al più un'ampiezza di 3 o 4 mm.; ma ciò basta per determinare la formazione di uno spiraglio proporzionato al passaggio del germoglio. Il moto di divaricazione dei lobi cotiledonari non dipende da particolare maniera di accrescersi dalla loro base; anzi in questa regione essi restano strettamente addossati quasi saldati rigidamente coll'asse dell'embrione. Notevole è invece il fatto di una vera inversione che si manifesta nella forma di detti organi, in modo che la faccia esterna, la quale era da prima convessa, diviene piana durante la germinazione, mentre al contrario quella interna, già piana, in corrispondenza e proporzionatamente acquista un contorno manifestamente convesso. Anche i margini vieppiù s'ispessiscono, e così rimane definitivamente assicurato al germoglio il modo di svolgersi in via normale.

Dalle esposte osservazioni risulta dunque che gli embrioni dell'*Inga Feuillei* e di altre specie dello stesso genere, pervengono sul terreno affatto spogli dei tegumenti seminali, i quali si sono trasformati in una sorta d'inviluppo polposo, atto ad adescare, colla grande copia di zucchero contenuto e col colorito candidissimo, determinati uccelli e a promuoverne così la disseminazione. Particolari adattamenti biologici possiedono inoltre gli embrioni stessi in tal guisa disseminati, per cui sono resi capaci di conservare a lungo la loro facoltà di sviluppo provvedendo alle funzioni della difesa contro la eccessiva radiazione e traspirazione, contro gli animali roditori ed in generale assumendo tutte le qualità fisiologiche e biologiche dei semi completi, come lo sono molto somiglianti nei caratteri esteriori. Anche durante la fase germinativa si rilevano importanti analogie di adattamenti caratteristiche del germogliamento dei semi stessi.

**Matematica.** — *Sulle condizioni d'integrabilità di un particolare sistema d'equazioni alle derivate parziali, e loro applicazione a un problema di geometria.* Nota del dott. P. BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

1. Sia dato il sistema composto delle due equazioni

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + a_{22} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + a_{33} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \\ + 2a_{12} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + 2a_{23} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + 2a_{31} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0; \end{array} \right.$$

ove  $a_{rs} = a_{sr}$ , e le  $a_{rs}, \alpha, \beta, \gamma$  sono funzioni delle variabili indipendenti  $x, y, z$ . Noi vogliamo determinare le condizioni necessarie e sufficienti, perchè esse abbiano delle soluzioni comuni (1).

Ponendo per brevità

$$U_i(q) = a_{i1} \frac{\partial q}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial q}{\partial y} + a_{i3} \frac{\partial q}{\partial z} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$V(q) = \alpha \frac{\partial q}{\partial x} + \beta \frac{\partial q}{\partial y} + \gamma \frac{\partial q}{\partial z},$$

il sistema dato si può scrivere sotto la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} U_1(f) + \frac{\partial f}{\partial y} U_2(f) + \frac{\partial f}{\partial z} U_3(f) = 0 \\ V(f) = 0. \end{cases}$$

Consideriamo adesso l'equazione

$$\begin{aligned} & V\left(\frac{\partial f}{\partial x} U_1(f) + \frac{\partial f}{\partial y} U_2(f) + \frac{\partial f}{\partial z} U_3(f)\right) - \\ & - U_1(f) \frac{\partial V(f)}{\partial x} - U_2(f) \frac{\partial V(f)}{\partial y} - U_3(f) \frac{\partial V(f)}{\partial z} - \\ & - U_1(V(f)) \frac{\partial f}{\partial x} - U_2(V(f)) \frac{\partial f}{\partial y} - U_3(V(f)) \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

È chiaro che essa ammette tutte le soluzioni comuni alle equazioni date. Eseguendo le operazioni ivi indicate, le derivate seconde si elidono; e si riduce infine alla forma

$$(2) \quad \begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + A_{22} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + A_{33} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \\ & + 2A_{12} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + 2A_{23} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + 2A_{31} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

ove

$$(3) \quad \begin{cases} A_{11} = V(a_{11}) - 2U_1(\alpha), & A_{22} = V(a_{22}) - 2U_2(\beta), \\ A_{33} = V(a_{33}) - 2U_3(\gamma), & A_{12} = V(a_{12}) - U_1(\beta) - U_2(\alpha), \\ A_{23} = V(a_{23}) - U_2(\gamma) - U_3(\beta), & A_{31} = V(a_{31}) - U_3(\alpha) - U_1(\gamma). \end{cases}$$

A questa equazione e al sistema dato possiamo aggiungere le seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x} V(f) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} V(f) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} V(f) = 0.$$

(1) Quando la soluzione comune ha la maggiore generalità possibile, si dirà che il sistema (1) è *completo*.

Per ottenere le condizioni cercate esprimeremo che tutte queste equazioni non sono fra loro indipendenti, cioè che sono nulli tutti i minori del 5° ordine della matrice:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{12} & A_{23} & A_{31} \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{12} & a_{23} & a_{31} \\ 2\alpha & 0 & 0 & \beta & 0 & \gamma \\ 0 & 2\beta & 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma & 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}.$$

Indicando allora con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  quattro indeterminate, dovranno sussistere le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lambda_1 a_{11} + 2\lambda_2 \alpha, & A_{22} &= \lambda_1 a_{22} + 2\lambda_3 \beta, & A_{33} &= \lambda_1 a_{33} + 2\lambda_4 \gamma \\ A_{12} &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \alpha, & A_{23} &= \lambda_1 a_{23} + \lambda_3 \gamma + \lambda_4 \beta, & A_{31} &= \lambda_1 a_{31} + \lambda_2 \gamma + \lambda_4 \alpha, \end{aligned}$$

dalle quali è facile dedurre

$$(4) \quad \begin{cases} A_{11} \beta^2 + A_{22} \alpha^2 - 2A_{12} \alpha \beta = \lambda_1 (a_{11} \beta^2 + a_{22} \alpha^2 - 2a_{12} \alpha \beta) \\ A_{32} \gamma^2 + A_{33} \beta^2 - 2A_{33} \beta \gamma = \lambda_1 (a_{22} \gamma^2 + a_{33} \beta^2 - 2a_{23} \beta \gamma) \\ A_{33} \alpha^2 + A_{11} \gamma^2 - 2A_{31} \gamma \alpha = \lambda_1 (a_{33} \alpha^2 + a_{11} \gamma^2 - 2a_{31} \gamma \alpha). \end{cases}$$

Così le condizioni trovate sono in numero di due, e si ottengono dalle (4) colla eliminazione di  $\lambda_1$ ; ma noi le terremo sotto questa forma. Se sono soddisfatte, diremo che il sistema dato è *completo*, nel senso che chiariremo più innanzi.

Moltiplichiamo la prima delle (4) per  $\gamma^2$ , la seconda per  $\alpha^2$ , la terza per  $\beta^2$ ; poi sottraggiamo dalla prima le altre due, dalla seconda le altre, e dalla terza pure le altre. Si ottengono in tal maniera le tre equazioni seguenti, che sono perciò una conseguenza delle (4):

$$(4') \quad \begin{cases} A_{13} \alpha \beta + A_{12} \alpha \gamma - A_{11} \gamma \beta - A_{23} \alpha^2 = \lambda_1 (a_{12} \alpha \beta + a_{12} \alpha \gamma - a_{11} \gamma \beta - a_{23} \alpha^2) \\ A_{21} \beta \gamma + A_{23} \beta \alpha - A_{22} \alpha \gamma - A_{31} \beta^2 = \lambda_1 (a_{21} \beta \gamma + a_{23} \beta \alpha - a_{22} \alpha \gamma - a_{31} \beta^2) \\ A_{32} \gamma \alpha + A_{31} \gamma \beta - A_{33} \beta \alpha - A_{12} \gamma^2 = \lambda_1 (a_{32} \gamma \alpha + a_{31} \gamma \beta - a_{33} \beta \alpha - a_{12} \gamma^2). \end{cases}$$

Indichiamo con  $b_{33}, b_{11}, b_{22}, b_{23}, b_{31}$  e  $b_{12}$  ordinatamente i secondi membri (escluso il fattore  $\lambda_1$ ) delle (4) e (4'), e con  $B_{33}, B_{11}$  ecc. i primi membri; da quelle formule risulta che le due forme

$$\begin{aligned} & b_{11} \xi^2 + b_{22} \eta^2 + b_{33} \zeta^2 + 2b_{12} \xi \eta + 2b_{23} \eta \zeta + 2b_{31} \xi \zeta \\ & B_{11} \xi^2 + B_{22} \eta^2 + B_{33} \zeta^2 + 2B_{12} \xi \eta + 2B_{23} \eta \zeta + 2B_{31} \xi \zeta \end{aligned}$$

differiscono per un fattore. Ma la prima forma è un controvariante algebrico

del sistema

$$(s) \quad \begin{cases} a_{11} \xi_1^2 + a_{22} \eta_1^2 + a_{33} \zeta_1^2 + 2a_{12} \xi_1 \eta_1 + 2a_{23} \eta_1 \zeta_1 + 2a_{31} \zeta_1 \xi_1 \\ (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1)^2; \end{cases}$$

e la seconda l'analogo controvariante del sistema

$$(s') \quad \begin{cases} A_{11} \xi_1^2 + A_{22} \eta_1^2 + A_{33} \zeta_1^2 + 2A_{12} \xi_1 \eta_1 + 2A_{23} \eta_1 \zeta_1 + 2A_{31} \zeta_1 \xi_1 \\ (\alpha \xi_1 + \beta \eta_1 + \gamma \zeta_1)^2; \end{cases}$$

onde risulta che le condizioni, perchè il sistema dato sia completo, si ottengono esprimendo che il controvariante del sistema (s) differisce per un fattore da quello di (s').

Rimane a mostrare che le condizioni così ottenute sono necessarie e sufficienti, perchè il sistema (1) sia completo. Dalla seconda delle (1) ricaviamo l'espressione di  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , e sostituiamola nella prima; si trova

$$(a_{11} \beta^2 + a_{22} \alpha^2 - 2a_{12} \alpha \beta) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (a_{33} \beta^2 + a_{22} \gamma^2 - 2a_{23} \gamma \beta) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + 2(a_{13} \beta^2 - a_{22} \alpha \gamma - a_{23} \alpha \beta) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

la quale può essere decomposta in due

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \varrho_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \varrho_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (\text{posto } a_{11} \beta^2 + a_{22} \alpha^2 - 2a_{12} \alpha \beta \neq 0).$$

Allora è chiaro che le soluzioni del sistema (1) dovranno essere quelle di uno dei due sistemi

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \varrho_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\gamma + \alpha \varrho_1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \varrho_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\gamma + \alpha \varrho_2}{\beta} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

o di entrambi. In questo secondo caso i due sistemi devono essere Jacobiani; perciò danno luogo a due equazioni di condizione. Le soluzioni del sistema (1) saranno allora  $\varphi(\omega_1)$  e  $\psi(\omega_2)$ , ove  $\varphi$  e  $\psi$  sono funzioni arbitrarie dell'argomento indicato;  $\omega_1$  soluzione del primo sistema Jacobiano,  $\omega_2$  del secondo. Ora è facile vedere che le condizioni in discorso equivalgono a quelle già trovate. Infatti, fra la equazione (2) e la seconda delle (1) eliminiamo  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ; si ottiene come precedentemente

$$(2') \quad (A_{11} \beta^2 + A_{22} \alpha^2 - 2A_{12} \alpha \beta) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (A_{33} \beta^2 + A_{22} \gamma^2 - 2A_{23} \beta \gamma) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + 2(A_{13} \beta^2 + A_{22} \alpha \gamma - A_{12} \beta \gamma - A_{23} \alpha \beta) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

la quale, poste le solite restrizioni, si decompone in due:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \varrho'_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \varrho'_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Poichè la (2) ha tutte le soluzioni del sistema (1), i due sistemi

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \varrho'_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\gamma + \alpha \varrho'_1}{\beta} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} - \varrho'_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\gamma + \alpha \varrho'_2}{\beta} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

saranno Jacobiani; ed è chiaro che non potranno differire dai precedenti (5). Per conseguenza la (2') e la prima delle (1') dovranno avere i coefficienti proporzionali. Se scriviamo che ciò avviene, troviamo precisamente le condizioni (4). Risulta quindi dimostrato *che il teorema precedentemente enunciato dà le condizioni necessarie e sufficienti, perchè il sistema dato sia completo.*

Può avvenire, come abbiamo detto, che uno solo dei sistemi (5) sia Jacobiano. In tal caso i coefficienti delle date equazioni devono soddisfare ad una sola condizione; e la soluzione sarà della forma  $\varphi(\omega)$ , ove  $\varphi$  è il simbolo d'una funzione arbitraria. Tale condizione si può ottenere sotto forma razionale rispetto ai coefficienti. Infatti, se uno dei sistemi (5) è Jacobiano, tale deve essere anche uno dei sistemi (5'). Siano i primi due. Dovendo ammettere la medesima soluzione, è chiaro che deve essere  $\varrho_1 = \varrho'_1$ . Dunque per ottenere la condizione cercata, basterà esprimere colle regole note dell'algebra che la (2') e la prima delle (1'), considerate come equazioni del 2° grado in  $\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}$ , hanno una radice comune. Quando questa unica condizione è soddisfatta, si dirà che il sistema (1) è *semi-completo*.

2. Il sistema (1) s'incontra in alcune questioni di geometria.

Sia  $g(x, y, z) = \text{cost}$  l'equazione di una famiglia di superficie con le assintotiche reali. Considerando sopra ogni superficie della famiglia le assintotiche di un sistema, si ottiene nello spazio una congruenza di curve. Per quali famiglie  $g = \text{cost}$ . tale congruenza è *normale*? E per quali sono *normali* le due congruenze formate colle assintotiche di un sistema e con quelle dell'altro?

Per risolvere questo problema, indichiamo con  $f(x, y, z) = \text{cost}$ . l'equazione della famiglia di superficie che tagliano ortogonalmente la congruenza formata dalle assintotiche di un sistema. Si avrà pertanto:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Inoltre, indicando con  $dx, dy, dz$  gl' incrementi che subiscono le coordinate di un punto  $M$ , quando si passa da esso ad un punto infinitamente vicino sulla assintotica considerata, e giacente sulla superficie  $\varphi = \text{cost.}$  che passa per  $M$ , deve essere evidentemente

$$dx \cdot d \frac{\partial \varphi}{\partial x} + dy \cdot d \frac{\partial \varphi}{\partial y} + dz \cdot d \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

e per l'ortogonalità della congruenza

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Sviluppando i calcoli, si trova subito che, se  $\varphi = \text{cost.}$  è una famiglia che gode della proprietà voluta, la funzione  $f(x, y, z)$  deve soddisfare al sistema

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \\ & + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right.$$

il quale è della forma del sistema (1). In questo caso le  $a_{11}, a_{22} \dots$  sono le derivate seconde di  $\varphi$ , ed  $\alpha, \beta, \gamma$  le derivate prime; per conseguenza le  $A_{11}, A_{22} \dots$  conterranno linearmente le derivate terze di  $\varphi$ . Ora per le cose dette, il sistema (6) può essere completo o semi-completo. Perchè avvenga il primo caso, i coefficienti delle (6) devono soddisfare a due condizioni (quelle che si deducono dalle (4)), le quali si traducono in due equazioni alle derivate parziali terze rispetto a  $\varphi$ ; perchè avvenga il secondo, i coefficienti devono essere legati da una sola condizione, che si traduce in una equazione del 3° ordine, alla quale deve soddisfare  $\varphi$ . Ponendo in generale

$$A(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z},$$

i coefficienti  $A_{rs}$  hanno nel caso presente le espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} A_{11} &= A\left(\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) - 2A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), A_{22} = A\left(\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) - 2A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \\ A_{33} &= A\left(\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) - 2A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \\ A_{12} &= A\left(\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) - 2A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), A_{23} = A\left(\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right) - 2A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \\ A_{31} &= A\left(\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right) - 2A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Così, con la scorta delle considerazioni fatte nel paragrafo precedente, si scrivono subito le equazioni differenziali, dalle quali dipende la risoluzione del problema geometrico proposto.

Ma noi non scriveremo tali equazioni, perchè a questo problema se ne associa un altro, il quale dà luogo ad equazioni di forma più semplice. Deriviamo, infatti, la seconda delle (6) una volta rispetto a ciascuna variabile indipendente; si ottiene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$- \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right)$$

ed analoghe, le quali trasformano la prima delle (6) nella seguente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \dots \right) = 0.$$

Quindi, posto

$$H = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2,$$

ne risulta che il sistema (6) equivale al seguente:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

che è di facile interpretazione. Le superficie delle due famiglie  $H = \text{cost.}$  e  $f = \text{cost.}$  tagliano ortogonalmente quelle della famiglia  $\varphi = \text{cost.}$ ; e poichè, per cose note, le intersezioni delle  $H = \text{cost.}$  con le  $f = \text{cost.}$  sono le linee di equidistanza di  $f = \text{cost.}$ , si conclude: *Le traiettorie ortogonali della famiglia  $\varphi = \text{cost.}$  sono le linee di equidistanza della famiglia  $f = \text{cost.}$*  A questa conclusione si poteva anche giungere con un ragionamento puramente geometrico. Infatti, le normali di una superficie  $\varphi = \text{cost.}$  lungo una delle assintotiche considerate sono le binormali di questa curva; d'altra parte essa è traiettoria ortogonale della  $f = \text{cost.}$ , quindi quelle binormali sono le tangenti alle linee d'equidistanza delle  $f = \text{cost.}$ ; ciò in virtù d'un teorema noto (1).

Quanto alla famiglia  $f = \text{cost.}$  possiamo anche dire che le sue linee d'equidistanza formano una congruenza normale.

(1) Morera, *Sui sistemi di superficie e loro traiettorie ortogonali* (R. Ist. Lomb. 1886).

Le funzioni  $f(x, y, z)$ , che uguagliate a costante definiscono queste famiglie, soddisfanno ad una equazione differenziale del 3° ordine. Esprimendo che le (7) formano un sistema completo rispetto a  $\varphi$ , si trova

$$(8) \quad \left| \begin{array}{ccc} A\left(f, \frac{\partial H}{\partial x}\right) - A\left(H, \frac{\partial f}{\partial x}\right) & A\left(f, \frac{\partial H}{\partial y}\right) - A\left(H, \frac{\partial f}{\partial y}\right) & A\left(f, \frac{\partial H}{\partial z}\right) - A\left(H, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right| = 0;$$

che è l'equazione cercata. Ad ogni  $f(x, y, z)$  integrale di questa equazione corrisponde, in virtù delle (7), una famiglia  $\varphi = \text{cost.}$ , che ha una congruenza *normale* di assintotiche.

Riguardo alle famiglie  $\varphi = \text{cost.}$ , che hanno *normali* le due congruenze di assintotiche, abbiamo detto che devono soddisfare a due equazioni del 3° ordine; onde è necessario di proporsi la questione della loro esistenza. La quale si risolve subito ricorrendo alle (7) e (8). Se  $\varphi = \text{cost.}$  soddisfa la condizione ora detta, devono esistere due soluzioni distinte  $f$  e  $f_1$  della (8) tale, che i due sistemi completi (7) costruiti successivamente con  $f$  e  $f_1$  abbiano una medesima soluzione  $\varphi$ . È chiaro che ciò è impossibile. Si conclude che *non esistono famiglie di superficie che abbiano normali le due congruenze di assintotiche.*

Come applicazione, si possono determinare le soluzioni della (8) della forma  $X(x) + Y(y) + Z(z)$ ; e poi le  $\varphi(x, y, z)$  corrispondenti.

**Matematica.** — *Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti.* Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

**Fisica matematica.** — *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.* Nota I di G. PICCIATI, presentata dal Socio VOLTERRA.

**Fisica.** — *Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica.* Nota di ALESSANDRO ARTOM, presentata dal Corrispondente GUIDO GRASSI.

Chimica. — *Nuova sintesi della anidride nitrica*. Nota di DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Chimica. — *Sintesi diretta della anidride nitrosa*. Nota di DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio CANNIZZARO.

Zoologia. — *Uncinaria duodenalis e uncinaria americana*. Nota di GINO PIERI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

V. C.

---

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 1° marzo 1903.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

**Matematica.** — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton.* Nota II del Corrispondente G. MORERA.

7. Secondo l'ultimo paragrafo (6) della mia precedente Nota <sup>(1)</sup> date  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine esistono infinite espressioni differenziali lineari fra loro differenti, e *non soltanto per differenziali esatti*, che ammettono quelle equazioni come primo sistema di Pfaff.

Adunque, osservando che un'espressione differenziale  $\sum_{i=1}^{2n} \eta_i dy_i$ , ove le  $\eta_i$  sono funzioni delle sole  $y_i$ , è sempre riducibile alla forma  $\sum_{j=1}^n Y_j^* dy_j^*$ , concludiamo che *qualsiasi sistema di  $2n$  equazioni differenziali del primo ordine è il primo sistema di Pfaff di una espressione differenziale del tipo:*

$$[I] \quad E_a \equiv \sum_{j=1}^n y_{n+j} dy_j + d\Phi,$$

*ove le  $y$  sono un qualunque sistema di integrali indipendenti di dette equazioni differenziali.*

Consideriamo un sistema Hamiltoniano:

$$[II] \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

e prendiamo per  $y_1 \dots y_n; y_{n+1} \dots y_{2n}$  quegli integrali che per un dato valore

<sup>(1)</sup> V. pag. 113.

iniziale  $t_0$  della variabile indipendente  $t$  divengono rispettivamente uguali ai valori iniziali di  $p_1, p_2 \dots p_n; q_1 \dots q_n$ : allora si ha com'è noto <sup>(1)</sup>:

$$\sum_{j=1}^n y_{n+j} dy_j \equiv U dt + \sum_{j=1}^n q_j dp_j + d\Phi,$$

e cioè si trova per  $E_d$  quella forma che abbiamo appunto considerata nel § 1 della precedente Nota.

Ma se per le  $y$  si prendono degli integrali che per  $t=t_0$  divengono uguali a funzioni qualunque ma fra loro indipendenti dei valori iniziali delle  $p$  e  $q$ , la forma della  $E_d$  *in generale* non sarà a priori nota, anzi la sua determinazione non si potrà fare senza integrazioni.

Esaminiamo più specialmente il caso in cui la  $U$  non dipenda da  $t$ . Si scelga un gruppo canonico cui appartenga  $U$ , che ora per simmetria scriveremo  $U_1$ ; e un tal gruppo sia:

$$U_1, U_2 \dots U_n; V_1, V_2 \dots V_n.$$

Allora gli integrali canonici di [II] sono <sup>(2)</sup>:

$$U_1, U_2 \dots U_n; V_1 - t, V_2 \dots, V_n$$

ed in [I] possiamo assumere:

$$\begin{aligned} y_1 &= V_1 - t; y_2 = f_2(U_1, U_2 \dots U_n; V_2 \dots V_n); \dots \\ &\dots \dots \dots y_n = f_n(U_1, U_2 \dots U_n; V_2 \dots V_n); \\ y_{n+j} &= f_{n+j}(U_1, U_2 \dots U_n; V_1 - t; V_2 \dots V_n) \quad (j = 1, 2 \dots n), \end{aligned}$$

ove le  $f$  sono funzioni arbitrarie dei rispettivi argomenti, soggette all'unica limitazione di essere indipendenti rispetto a  $U_1 \dots U_n; V_2 \dots V_n$ . Ciò posto la [I] diviene:

$$E_d = \sum_{j=1}^n f_{n+j} \cdot df_j - f_{n+1} \cdot dt + d\Phi,$$

ove per simmetria abbiain scritto  $f_1$  invece di  $V_1$ ; dunque la trasformazione:

$$\begin{aligned} p_1^* &= V_1, & p_2^* &= f_2, \dots & p_n^* &= f_n; \\ q_1^* &= f_{n+1}, & q_2^* &= f_{n+2}, \dots & q_n^* &= f_n^n, \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Nota: *Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine*, inserita nei Rend. dell'Istituto lombardo, S. II, V, XVI, fasc. XIII (1883).

<sup>(2)</sup> Si tenga presente che un integrale è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial U_1}{\partial p_j} \frac{\partial y}{\partial q_j} - \frac{\partial U_1}{\partial q_j} \frac{\partial y}{\partial p_j} \right) \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + (U_1, Y) = 0, \text{ e che } (U_1, V_1) = 1.$$

converte il sistema [II] in un altro sistema Hamiltoniano. Questa trasformazione riuscirà indipendente da  $t$  se le  $f_{n+j}$  non contengono  $V_1 - t$ . (Cfr. Lie, Mem. cit., pag. 155, Theorem III). Come fu notato da Lie, una cosiffatta trasformazione non è in generale una trasformazione di contatto ridotta, cioè sulle sole  $p$  e  $q$ , come sono quelle considerate al § 4 della mia precedente Nota.

8. Consideriamo il sistema:

$$[III] \quad \delta x_i = X_i \delta x \quad (i = 0, 1, 2 \dots 2n),$$

ove le  $X$  sono funzioni delle sole  $x$ .

Posto come al § 6:

$$(i, k) = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 0, 1, \dots 2n),$$

per mezzo del sistema di equazioni

$$(i, 0) X_0 + (i, 1) X_1 + \dots + (i, 2n) X_{2n} = 0$$

si sieno determinate le  $Y$  in funzione delle  $x$ ; allora la forma differenziale:

$$[IV] \quad Y_{dx} \equiv Y_0 dx_0 + Y_1 dx_1 + \dots + Y_{2n} dx_{2n}$$

secondo la nomenclatura di Lie è, a meno del differenziale esatto  $d \sum_i X_i Y_i$ , un'invariante per la trasformazione infinitesima definita dalle [III], ossia per la trasformazione infinitesima:

$$[V] \quad U f \equiv \sum_{i=0}^{2n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si trova infatti <sup>(1)</sup>:

$$U Y_{dx} \equiv \sum_i \sum_k (ik) X_k dx_i + d \sum_i X_i Y_i \equiv d \sum_i X_i Y_i.$$

La funzione  $\sum_i X_i Y_i$  è un invariante simultaneo della forma differenziale [IV] e della trasformazione infinitesima [V] per qualsiasi cambiamento di variabili.

Secondo la terminologia usata dal Poincaré nell'opera: « *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* » (T. III, p. 9) *l'integrale della* [IV] *è un invariante integrale relativo alle linee chiuse*, per conseguenza l'espressione differenziale [IV] differisce per un differenziale esatto da un invariante assoluto lineare (ibid. p. 14). Tale differenziale esatto, come si vede subito

(1) Cfr. Lie, Leipziger Berichte, 1896 — *Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen*.

dal notare che

$$U(Y_{dz} + df) \equiv \sum_i \sum_k (ik) X_k dx_i + d[Uf + \sum_i X_i Y_i]$$

è quello di una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$Uf + \sum_i X_i Y_i = 0.$$

Una tale soluzione si ottiene con una quadratura quando sieno note le  $2n$  soluzioni indipendenti dell'equazione a derivate parziali:

$$Uf = 0,$$

ossia gli integrali indipendenti da  $z$  del sistema [III]. Espresse le  $x_1 \dots x_{2n}$  in funzione di  $x_0$  e di detti integrali, riguardando questi come costanti si calcoli la funzione:

$$f = - \int \sum_i X_i Y_i \frac{dx_0}{X_0};$$

a quadratura eseguita si sostituiscano agli integrali le loro espressioni nelle  $x$ ; la  $f$  così ottenuta è la soluzione richiesta.

**Matematica.** — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni  $\vartheta$  di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Astronomia.** — *Osservazioni delle comete 1902 d Giacobini e 1903 a Giacobini, fatte all'equatoriale di 38 cm.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Nella seduta di dicembre ho avuto l'onore di comunicare la prima osservazione da me fatta della cometa 1902 d.

Aggiungo le tre seguenti posizioni, le sole che mi fu possibile di fare.

|                           |                                                       |
|---------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1902 Dicembre 20          | 9 <sup>h</sup> 32 <sup>m</sup> 38 <sup>s</sup> R.C.R. |
| $\alpha$ apparente cometa | 7 10 20.50 (9 <sup>a</sup> .559)                      |
| $\delta$ " " +            | 1° 5' 15".4 (0. 762)                                  |
| 1903 Gennaio 17           | 9 <sup>h</sup> 7 <sup>m</sup> 47 <sup>s</sup> R.C.R.  |
| $\alpha$ apparente cometa | 6 50 55 <sup>s</sup> .34 (9 <sup>a</sup> .341)        |
| $\delta$ " " +            | 8°53' 15."4 (0. 690)                                  |
| 1903 Febbraio 21          | 6 <sup>h</sup> 49 <sup>m</sup> 49 <sup>s</sup> R.C.R. |
| $\alpha$ apparente cometa | 6 36 30.64 (9 <sup>a</sup> .313)                      |
| $\delta$ " " +            | 20° 8' 46".1 (0. 538)                                 |

La prima cometa del 1903 (1903 *a*) fu scoperta dall'astronomo Giacobini, occupato a ricercare la cometa periodica Tempel<sub>3</sub>-Swift, al 15 gennaio. Due sole posizioni fui in caso di fare di detta cometa.

|                           |                                                       |
|---------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1903 Gennaio 20           | 6 <sup>h</sup> 22 <sup>m</sup> 31 <sup>s</sup> R.C.R. |
| $\alpha$ apparente cometa | 22 58 48.03 (9.524)                                   |
| $\delta$ " "              | + 2°30' 2".1 (0.752)                                  |
| 1903 Febbraio 19          | 6 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup> R.C.R.  |
| $\alpha$ apparente cometa | 23 41 26.55 (9.640)                                   |
| $\delta$ " "              | + 11°36' 0".0 (0.736)                                 |

L'aspetto della cometa, il 19 febbraio 1903, era quello d'una nebulosità circolare del diametro di  $\frac{3}{4}$  di primo d'arco, con nucleo di ottava grandezza.

**Matematica.** — *Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti.* Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Nella Nota presente espongo i risultamenti delle mie ricerche intorno alle terne di congruenze ortogonali a invarianti costanti.

Essi sono, a mio credere, non privi di eleganza, e si riassumono brevemente così:

— « Le terne di congruenze ortogonali a invarianti costanti sono costituite da *eliche* di ugual passo, avvolgentisi su cilindri circolari, i cui assi sono paralleli ad una retta fissa.

« Tutte le terne di tal natura vengono individuate, a meno di uno spostamento rigido, da tre parametri: ne esiste quindi una tripla infinità.

« Di queste,  $\infty^2$  formano tra loro e con una terna rettilinea (*terna del Cattaneo*) angoli costanti, e hanno in comune la proprietà di aver uguale la somma delle torsioni delle linee delle tre congruenze » —.

— « Le eliche di una stessa congruenza sono sovrapponibili.

« Se si associa ad ogni punto la normale principale all'elica che vi passa, e (su questa) il centro di curvatura dell'elica, avremo una doppia infinità (non tripla) di rette distinte, che insieme con quella degli assi dei cilindri, forma parte di una terna rettilinea, che fa con la congruenza data angoli costanti.

« Ai punti di una retta parallela agli assi dei cilindri, vengono allora associate le generatrici di un'*elicoide rigata ad area minima*, e i centri di curvatura descrivono un'elica uguale a quelle della congruenza » —.

Questi i risultamenti principali. Ho determinato inoltre le condizioni necessarie e sufficienti affinchè nove costanti  $\gamma_{h+1h+2h}$  siano gli invarianti di

una terna del tipo studiato; ho ricavate di questa ed integrate le equazioni differenziali.

In una prossima Nota mostrerò una applicazione di questi risultamenti alla soluzione di una classe di problemi dinamici <sup>(1)</sup>.

1. Indichiamo con

$$\varphi = ds^2 = \sum_{r,s}^3 a_{rs} dx_r dx_s$$

il quadrato dell' elemento lineare dello spazio. Le equazioni differenziali canoniche di una terna di congruenze ortogonali  $[\lambda_1]$ ,  $[\lambda_2]$ ,  $[\lambda_3]$  sono

$$\frac{\partial x_r}{\partial s_h} = \lambda_h^{(r)} \quad \begin{cases} r = 1, 2, 3 \\ h = 1, 2, 3 \end{cases}$$

dove  $s_h$  sono gli archi delle curve  $\lambda_h$ , e le  $\lambda_h^{(r)}$  soddisfanno le relazioni

$$\sum_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} a_{rs} = \varepsilon_{hk} \quad \varepsilon_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{per } h = k \\ 0 & \text{per } h \neq k \end{cases}$$

Designeremo inoltre con  $\lambda_{h|r}$  gli elementi

$$\lambda_{h|r} = \sum_s a_{rs} \lambda_h^{(s)},$$

con  $\lambda_{h|rs}$  le loro derivate, covarianti a  $\varphi$ , rispetto ad  $x_s$ .

Gli invarianti della terna  $[\lambda]$  sono dati dalle espressioni

$$\gamma_{hkl} = -\gamma_{khl} = \sum_{rs} \lambda_{h|rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)}.$$

Da queste, derivando rispetto ad  $x_t$ , ed eliminando le derivate seconde delle  $\lambda_{h|r}$ , si ottengono (come è noto) nove equazioni di condizione per le  $\gamma_{hkl}$ . Queste, nel nostro caso ( $\gamma_{hkl} = \text{cost.}$ ), si possono scrivere

$$\gamma_{hk} = \sum_l \gamma_{h+1h+2l} (\gamma_{lk+1h+2} - \gamma_{lk+2h+1}) - \gamma_{hh+1h+1} \gamma_{hh+2h+2} + \gamma_{hh+1h+2} \gamma_{hh+2h+1} = 0$$

2. Vediamo di dar loro una forma più adatta alle nostre ricerche, e più agilmente adoperabile.

Introduciamo a tale scopo le curvature medie ( $H_h$ ) e totali ( $K_h$ ) dei complessi <sup>(2)</sup> ortogonali alle  $[\lambda_h]$ , e le torsioni ( $\tau_h$ ) delle  $[\lambda_h]$ . Avremo

$$\begin{aligned} 2 H_h &= \gamma_{hh+1h+1} + \gamma_{hh+2h+2} \\ K_h &= \gamma_{hh+1h+1} \gamma_{hh+2h+2} - \gamma_{hh+1h+2} \gamma_{hh+2h+1} \\ \tau_h &= \gamma_{h+1h+2h} \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Il metodo adoperato in queste ricerche è quello del *Calcolo Differenziale Assoluto*. Cfr. G. Ricci e T. Levi Civita, *Mathematische Annalen*, Bd. 54.

<sup>(2)</sup> Per la teoria del *Complesso ortogonale* ad una  $[\lambda_h]$  e delle sue curvature, confronta la mia Memoria, *Sulla teoria delle congruenze di curve* ecc., Milano, *Annali di Matematica*, tomo VI, S. III, pag. 1 e segg.

Le prime ci esprimono le somme e i prodotti della quantità  $\gamma_{hh+1h+1}$ ,  $\gamma_{hh+2h+2}$ , che saranno perciò radici dell'equazione

$$\gamma^2 - 2 H_h \gamma + K_h - \tau_{h+1} \tau_{h+2} = 0.$$

Si avrà cioè

$$\gamma_{hh+1h+1} = H_h + V_h, \quad \gamma_{hh+2h+2} = H_h - V_h.$$

dove

$$V_h^2 = H_h^2 - K_h + \tau_{h+1} \tau_{h+2}$$

Potremo quindi ora scrivere le  $\gamma_{hk} = 0$ , o i tre gruppi equivalenti  $\gamma_{hk} - \gamma_{kh} = 0$ ,  $\gamma_{hk} + \gamma_{kh} = 0$ ,  $\gamma_{hh+1} V_{h+2} + \gamma_{hh+2} V_{h+1} = 0$ , sotto la forma

$$(1) \quad -H_h (\tau_{h+1} + \tau_{h+2}) + H_{h+1} V_{h+2} + H_{h+2} V_{h+1} = 0$$

$$(2) \quad \sum_p H_p^2 - H_{h+1} V_{h+1} + H_{h+2} V_{h+2} + V_h^2 - \tau_{h+1} \tau_{h+2} = 0$$

$$(3) \quad \tau_h \sum_p H_p^2 + \sum_p \tau_p V_p^2 - 2 V_1 V_2 V_3 - \tau_1 \tau_2 \tau_3 = 0$$

Come si verifica facilmente, queste diventano identità quando si facciano simultaneamente nulle tutte le  $H$ , e conseguentemente le  $K$ .

Questa anzi è la soluzione più generale possibile. Infatti in ogni altro caso, le (3) che differiscono soltanto per il coefficiente del primo termine, danno  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 \equiv \tau$ , cioè

$$\tau (\sum_p H_p^2 + \sum_p V_p^2 - \tau^2) = 2 V_1 V_2 V_3.$$

Le (2) sommate porgono

$$(4) \quad 3 \sum_p H_p^2 + \sum_p V_p^2 - 3 \tau^2 = 0.$$

Inoltre perchè le  $H$  siano diverse da zero è necessario si annulli il determinante dei loro coefficienti nelle (1), sia cioè

$$\tau (\sum_p V_p^2 - 4 \tau^2) = - V_1 V_2 V_3.$$

Dal confronto di queste tre si ricava

$$\tau (\sum_p V_p^2 - 3 \tau^2) = 0$$

per la quale la (4) si riduce a una somma di quadrati, e non può essere soddisfatta quando  $H_1, H_2, H_3$  non siano tutti nulli.

Dunque fra i nove invarianti della nostra terna devono passare le sei relazioni

$$H_h = 0, \quad K_h = 0; \quad h = 1, 2, 3$$

tre quindi rimangono arbitrari, cioè: « La determinazione delle nostre terne si può far dipendere da tre parametri ».

3. Se un terna  $[\lambda]$  ha gli invarianti costanti, li avrà pure ogni terna  $[\mu]$  che formi angoli costanti con la  $[\lambda]$ .

Se poniamo  $\cos \widehat{\mu_h \lambda_k} = \alpha_{hk}$  (= cost.), sarà

$$\mu_{h|r} = \sum_p \alpha_{hp} \lambda_{p|r}$$

e per gli invarianti della terna  $[\mu]$  avremo le espressioni

$$g_{hkl} = \sum_{pqr} \alpha_{hp} \alpha_{kq} \alpha_{lr} \gamma_{pqr}.$$

Ora io dico che si possono sempre assumere le  $\alpha_{hk}$  in modo che tutti i  $g_{hkl}$  si annullino all'infuori di uno con tutti gli indici distinti: ad esempio  $g_{123}$ : si abbia cioè  $g_{h+1h+2l}$  eguale a zero per  $h, l$  diversi da 3, eguale ad una costante  $g$  per  $h = l = 3$ , o più sinteticamente  $g_{h+1h+2l} = g \epsilon_{3h} \epsilon_{3l}$ , da cui

$$\sum_{pqr} \alpha_{h+1p} \alpha_{h+2q} \alpha_{lr} \gamma_{pqr} = g \epsilon_{3h} \epsilon_{3l}.$$

Moltiplicando per  $\alpha_{lk}$  e sommando rispetto ad  $l$

$$\sum_{pq} \alpha_{h+1p} \alpha_{h+2q} \gamma_{pqh} = g \epsilon_{3h} \alpha_{3h}$$

oppure (scambiando  $p$  con  $q$  e sommando)

$$\sum_p \alpha_{hp} \gamma_{p+1p+2h} = g \epsilon_{3h} \alpha_{3h}.$$

Moltiplicando per  $\alpha_{hl}$  e sommando rispetto ad  $h$

$$\gamma_{l+1l+2h} = g \alpha_{3l} \alpha_{3h}.$$

Inoltre, facendo in questa  $l = k$  e sommando

$$\sum_h \gamma_{k+1k+2h} = \sum_h \tau_h = g.$$

Abbiamo così dimostrato: Che gli invarianti di una terna, e quindi la terna stessa dipendono dal parametro  $g$  e dai due parametri che individuano la direzione  $\mu_3$  (coseni direttori  $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ ). — Che tutte le terne che hanno comune la somma delle torsioni formano tra loro angoli costanti. — Che ogni terna forma angoli costanti con una terna che ha tutti gli invarianti nulli eccetto una torsione (cost.).

4. Questa terna rientra nel tipo studiato dal dott. Cattaneo <sup>(1)</sup> delle « terne di congruenze rettilinee, costituite da sistemi piani cartesiani ortogonali situati sovra piani paralleli, e dalle normali a tali piani ». Nel caso nostro aggiungeremo che esse si ottengono da un sistema cartesiano ortogonale dello spazio, facendo ruotare i piani  $z = \text{cost.}$  intorno all'asse  $z$ , di un angolo  $\vartheta$ ; che varia linearmente con  $z$ .

Indicando con  $y_{h|r}$  i sistemi coordinati covarianti delle linee  $x, y, z$ , sarà

$$\begin{aligned} \mu_{1|r} &= y_{1|r} \cos \vartheta + y_{2|r} \sin \vartheta \\ \mu_{2|r} &= y_{2|r} \cos \vartheta - y_{1|r} \sin \vartheta \\ \mu_{3|r} &= y_{3|r} \end{aligned} \quad (5)$$

<sup>(1)</sup> P. Cattaneo, *Sulle congruenze di linee in uno spazio piano a tre dimensioni*. Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXI, parte II, pag. 42 e segg.

e le relazioni tra gli invarianti della  $[\mu]$  e quelli (nulli) della  $[y]$  saranno tutte soddisfatte per  $\vartheta = gz + c$ .

In coordinate cartesiane  $x, y, z$ , avremo più semplicemente

$$(6) \quad \begin{cases} \mu_{1|1} = \cos(gz + c) & , & \mu_{1|2} = \sin(gz + c) & , & \mu_{1|3} = 0 \\ \mu_{2|1} = -\sin(gz + c) & , & \mu_{2|2} = \cos(gz + c) & , & \mu_{2|3} = 0 \\ \mu_{3|1} = 0 & , & \mu_{3|2} = 0 & , & \mu_{3|3} = 1 \end{cases}$$

Possiamo per mezzo di queste trovare una espressione molto semplice per le  $\lambda_{h|p}$ , riferite alle coordinate  $x, y, z$ .

La prima formola del § 3 dà

$$\lambda_{h|p} = \sum_k \alpha_{hk} \mu_{k|p}$$

da cui

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda_{h|1} = \frac{\partial x}{\partial s_h} = \alpha_{1h} \cos(gz + c) - \alpha_{2h} \sin(gz + c) \\ \lambda_{h|2} = \frac{\partial y}{\partial s_h} = \alpha_{1h} \sin(gz + c) + \alpha_{2h} \cos(gz + c) \\ \lambda_{h|3} = \frac{\partial z}{\partial s_h} = \alpha_{3h} \end{cases}$$

La terza mostra intanto che le  $[\lambda_h]$  formano angoli costanti con l'asse  $z$ : le altre due, divise per la terza ed integrate, danno, mediante eliminazione di  $z$

$$(x - c_h)^2 + (y - c'_h)^2 = \frac{\alpha_{1h}^2 + \alpha_{2h}^2}{g^2 \alpha_{3h}^2} = \frac{1}{g^2} \frac{1 - \alpha_{3h}^2}{\alpha_{3h}^2}$$

ossia, indicando con  $\alpha_h$  l'angolo che la  $\lambda_h$  forma con l'asse  $z$  ( $\cos \alpha_h = \alpha_{3h}$ )

$$(x - c_h)^2 + (y - c'_h)^2 = r_h^2 = \frac{1}{g^2} \operatorname{tg}^2 \alpha_h$$

che è l'equazione di un cilindro circolare di raggio  $r_h = \frac{1}{g} \operatorname{tg} \alpha_h$ , con le generatrici parallele all'asse delle  $z$ . Come era evidente a priori le  $\lambda$  sono eliche circolari. Essendo  $\alpha_h$  l'angolo che l'elica  $\lambda_h$  forma con le generatrici del cilindro, il passo dell'elica è

$$r_h \frac{2\pi}{\operatorname{tg} \alpha_h} = \frac{2\pi}{g}.$$

Ricaviamo di qua (e ciò a priori non era evidente) che tutte le eliche della terna hanno lo stesso passo e si avvolgono su cilindri con gli assi paralleli all'asse  $z$ .

Osservando che i raggi di questi cilindri sono eguali per una stessa congruenza, ne ricaviamo anche che questa risulta di eliche congruenti.

5. Consideriamo ora una generica congruenza  $[\lambda]$  della nostra terna e immaginiamo di associare ad ogni punto dello spazio la normale principale all'elica che vi passa.

Notiamo anzitutto che le normali principali alle eliche, essendo normali ai cilindri su cui le eliche si avvolgono, sono normali all'asse  $z$ . Indicando con  $n$  queste normali, potremo porre

$$\cos \widehat{nx} = \cos \beta \quad , \quad \cos \widehat{ny} = \sin \beta \quad , \quad \cos \widehat{nz} = 0.$$

La tangente  $t$  all'elica, ha i coseni  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , dati dalle (7) (omesso per brevità l'indice  $h$ ). Sarà

$$\cos \widehat{nt} = \lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 \sin \beta = 0$$

sostituendo per  $\lambda_1, \lambda_2$  i loro valori, si riconosce facilmente che

$$\beta = gz + k$$

dove  $k$  indica una costante.

Dunque tutte le rette  $n$  giacenti in un piano  $z = \text{cost.}$  sono parallele ( $\beta = \text{cost.}$ ), e sono le  $\infty$  rette parallele del piano, prese  $\infty$  volte. Quando il punto associato alla retta  $n$  si sposta sopra una parallela all'asse  $z$ , la  $n$  ruota generando un'elicoide rigata ad area minima.

Dunque: « La congruenza delle normali principali alle eliche di una  $[\lambda_h]$  appartiene insieme con la congruenza costituita dagli assi dei cilindri, ad una terna del Cattaneo ».

Il centro di curvatura dell'elica (sulla normale, ad una distanza dal punto associato  $= r_h$ ) ha per coordinate  $(x, y, z$  coordinate del punto associato)

$$\begin{aligned} c_h &= x + r_h \cos \beta \\ c'_h &= y + r_h \sin \beta \end{aligned}$$

essendo la terza coordinata uguale alla coordinata  $z$  del punto.

Quando il punto si sposta sopra una parallela all'asse  $z$ , il centro di curvatura percorre un'elica congruente alle eliche della  $[\lambda_h]$ .

**Matematica.** — *Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

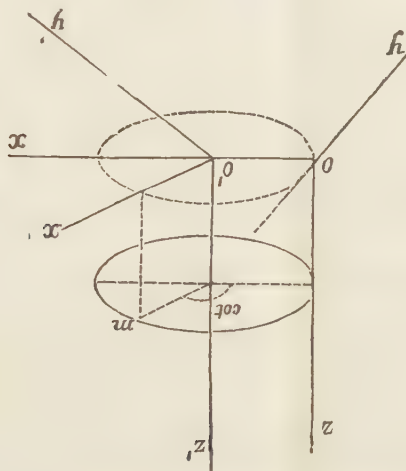
**Meccanica.** — *Sull'equilibrio d'un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota I di A. VITERBI, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Fisica matematica.** — *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.* Nota I di G. PICCIATI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una Nota recente <sup>(1)</sup> ho determinato il campo elettromagnetico generato da una carica elettrica  $m$  in moto circolare uniforme; considero ora il caso in cui la carica ha un moto circolare uniforme parallelamente ad un piano conduttore indefinito omogeneo  $\sigma$ , il mezzo ambiente essendo l'etere.

1. Riferiamoci ad un sistema di assi fissi  $Oxyz$ , aventi per piano  $z=0$  il piano  $\sigma$ , e ad un sistema di assi mobili  $O'x'y'z'$ , invariabilmente collegati con la carica  $m$ , scelti nel modo indicato dalla figura. Facendo uso



delle stesse notazioni, i potenziali del campo generato dalla carica, quando non si ha il piano conduttore, conservano le loro espressioni date nella Nota citata, col solo mutamento di  $z$  in  $z-d$  nella espressione della funzione  $r$  che in essi compare, se  $d$  è la distanza del piano in cui la carica si muove dal piano conduttore  $\sigma$ . L'introduzione nel campo del piano conduttore  $\sigma$  porta in esso delle modificazioni, originandosi una variabile distribuzione di elettricità indotta sopra il piano stesso, alla quale corrisponde un potenziale elettrostatico ed un potenziale vettore, del quale è nulla la com-

<sup>(1)</sup> *Campo elettromagnetico ecc.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XII, fasc. 2°, 1903, pag. 41. Indicherò le formole relative a questa Nota con N. p.

ponente secondo la normale al piano, il moto della elettricità avendo luogo nel piano stesso. Riferendoci nel sistema di assi mobili alle coordinate cilindriche  $\varrho, \theta, z'$  siano  $F_1$  il potenziale elettrostatico indotto e  $\lambda_1, \mu_1$  le componenti di quello vettore secondo le linee  $\theta = \text{cost.}$ ,  $\varrho = \text{cost.}$ ; siano poi  $F, \lambda, \mu$  i potenziali analoghi nel caso in cui non si ha il piano conduttore. I potenziali del campo così modificato sono quindi  $F + F_1, \lambda + \lambda_1, \mu + \mu_1$ : la risoluzione del problema proposto è perciò ridotta alla determinazione delle funzioni  $F_1, \lambda_1, \mu_1$ . Note queste e le  $F, \lambda, \mu$ , le (19) e (20) della Nota precedente danno le componenti delle forze elettromagnetiche del campo che si considera. Per potere procedere alla loro determinazione esaminiamo a quali condizioni debbono soddisfare le  $F_1, \lambda_1, \mu_1$  considerate come funzioni di  $\varrho, \theta, z', t$ .

Intanto il fenomeno essendo stazionario rispetto agli assi mobili  $O'x'y'z'$ , queste funzioni non dipenderanno esplicitamente dal tempo. Come si è visto nella Nota precedente, il potenziale elettrostatico  $F_1$  deve essere soluzione dell'equazione

$$(1) \quad \square F_1 = \Delta_2 F_1 - a^2 \frac{d^2 F_1}{d\theta^2} = 0,$$

ed i due  $\lambda_1, \mu_1$  debbono essere soluzioni del sistema

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_2 \lambda_1 - a^2 \frac{d^2 \lambda_1}{d\theta^2} - \frac{\lambda_1}{\varrho^2} = \frac{2}{\varrho^2} \frac{d\mu_1}{d\theta}, \\ \Delta_2 \mu_1 - a^2 \frac{d^2 \mu_1}{d\theta^2} - \frac{\mu_1}{\varrho^2} = -\frac{2}{\varrho^2} \frac{d\lambda_1}{d\theta}, \end{cases}$$

essendo inoltre legati fra loro dall'equazione

$$(3) \quad -a \frac{dF_1}{d\theta} + \frac{d\lambda_1}{d\varrho} + \frac{\lambda_1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu_1}{d\theta} = 0.$$

Essendo potenziali ritardati corrispondenti a distribuzione di superficie sul piano  $\sigma$  essi si comportano come potenziali ordinari, le loro espressioni analitiche sotto forma di integrali estesi al piano  $\sigma$  non mutando col mutare il segno di  $z'$ ; sono quindi funzioni di  $|z'|$ . Le condizioni caratteristiche relative al piano  $\sigma$  sono

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{dF_1}{d|z'|} = e_1; \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} = Au_1; \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{d\mu_1}{d|z'|} = Av_1$$

essendo  $e_1, u_1, v_1$  la densità di distribuzione e le componenti della corrente indotta sul piano secondo le linee  $\theta = \text{cost.}$ ,  $\varrho = \text{cost.}$  Ora la legge di Ohm per le superfici conduttrici omogenee ci dice che la corrente è proporzionale alla componente tangenziale della forza elettrica ed ha la stessa direzione. Possiamo quindi porre, indicando con (H), (K) le componenti tangenziali

della forza elettrica,

$$(4) \quad (H) = Akw_1, \quad (K) = Akv_1$$

essendo  $k$  costante di cui il significato fisico è il seguente <sup>(1)</sup>: essa è un trentesimo della resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore espressa in ohm. Ricordando le espressioni generali delle forze elettromagnetiche per i potenziali del campo, date dalle (19) della N. p., le condizioni relative al piano  $\sigma$  per i potenziali  $F_1, \lambda_1, \mu_1$  sono

$$\begin{aligned} - \frac{d}{d\varrho} (F + F_1) + a \frac{d}{d\theta} (\lambda + \lambda_1) &= - \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|}, \\ - \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\theta} (F + F_1) + a \frac{d}{d\theta} (\mu + \mu_1) &= - \frac{k}{2\pi} \frac{d\mu_1}{d|z'|}, \end{aligned}$$

a cui si può dare la forma:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} - \frac{dF_1}{d\varrho} + a \frac{d\lambda_1}{d\theta} = \frac{dF}{d\varrho} - a \frac{d\lambda}{d\theta}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{d\mu_1}{d|z'|} - \frac{1}{\varrho} \frac{dF_1}{d\theta} + a \frac{d\mu_1}{d\theta} = \frac{1}{\varrho} \frac{dF}{d\theta} - a \frac{d\mu}{d\theta}. \end{cases}$$

A queste relazioni valevoli per tutti i punti del piano  $z' = 0$  se ne possono sostituire altre due valevoli per tutto lo spazio; allora, come vedremo, esse, insieme alle (1), (2), (3), sono sufficienti alla determinazione di  $F_1, \lambda_1, \mu_1$ . Si osservi intanto che, per le proprietà di cui godono  $F_1, \lambda_1, \mu_1$ , i primi membri delle (5) sono funzioni regolari di  $\varrho, \theta, |z'|$ , per  $|z'| > 0$ ; esse inoltre soddisfanno al sistema (2), come si verifica facilmente tenendo conto che  $F_1, \lambda_1, \mu_1$  soddisfanno alle (1), (2). Anche i secondi membri delle (5) soddisfanno a tutte queste condizioni purchè in essi si muti  $z'$  in  $-|z'|$ , con che si toglie la singolarità che esse presentano nel punto di coordinate  $\varrho = R, \theta = -ar, z' = d$ , il quale non è altro che la posizione occupata nell'istante  $t - Ar$  dalla carica  $m$ , che occupa nell'istante  $t$  la posizione  $m$ . Questo si riconosce subito ricordando le espressioni di  $F, \lambda, \mu$  che sono:

$$F = \frac{m}{r - aR\varrho \sin(\theta + ar)},$$

$$\lambda = aRF \sin(\theta + ar),$$

$$\mu = aRF \cos(\theta + ar)$$

essendo  $r$  definita dall'equazione

$$r^2 = \varrho^2 + R^2 + (z' - d)^2 - 2R\varrho \cos(\theta + ar).$$

(1) Vedi Levi-Civita, *Sur le champ électromagnétique* etc. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, série III, T. IV, 1902, pag. 25.

Indicando le espressioni di  $F, \lambda, \mu$  dopo la sostituzione di  $-|z'|$  a  $z'$  con  $F', \lambda', \mu'$  e ponendo

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} - \frac{dF_1}{d\rho} + \alpha \frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{dF'}{d\rho} + \alpha \frac{d\lambda'}{d\theta} \\ Q = \frac{k}{2\pi} \frac{d\mu_1}{d|z'|} - \frac{1}{\rho} \frac{dF_1}{d\theta} + \alpha \frac{d\mu_1}{d\theta} - \frac{1}{\rho} \frac{dF'}{d\theta} + \alpha \frac{d\mu'}{d\theta} \end{array} \right.$$

le funzioni  $P, Q$  hanno le seguenti caratteristiche: sono regolari in tutto il semispazio  $S$  da una banda di un piano indefinito  $\sigma$  (la regione  $z' > 0$ ); si annullano sul piano  $z' = 0$ ; all'infinito si annullano, assieme alle loro derivate prime, come  $\frac{1}{\rho^2 + z'^2}$  almeno; soddisfanno al sistema di equazioni

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 P - \alpha^2 \frac{d^2 P}{d\theta^2} - \frac{P}{\rho^2} = \frac{2}{\rho^2} \frac{dQ}{d\theta}, \\ \Delta_2 Q - \alpha^2 \frac{d^2 Q}{d\theta^2} - \frac{Q}{\rho^2} = -\frac{2}{\rho^2} \frac{dP}{d\theta}. \end{array} \right.$$

*Si può dimostrare che queste funzioni  $P, Q$  sono identicamente nulle, e quindi concludere che le relazioni  $P = 0, Q = 0$  sono valevoli in tutto lo spazio  $S$  e non solo sul piano  $z' = 0$ .*

2. Si consideri in generale l'equazione

$$(8) \quad \Delta_2 f + c^2 f = 0,$$

essendo  $\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$  e  $c$  costante reale; per essa sussiste la seguente proprietà:

« Ogni integrale dell'equazione (8) regolare nel semispazio  $S$ , nullo sul piano  $z = 0$ , e nullo all'infinito, insieme alle sue derivate prime, come  $\frac{1}{r^2}$  almeno ( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ) è identicamente nullo per qualsiasi valore della costante  $c$  ».

Si dimostra questo nel seguente modo. Siano  $u$  e  $v$  due integrali della (8) regolari in un generico campo  $\Sigma$ : dalle equazioni

$$\begin{aligned} \Delta_2 u + c^2 u &= 0, \\ \Delta_2 v + c^2 v &= 0, \end{aligned}$$

moltiplicando rispettivamente per  $v$  ed  $u$ , sottraendo ed integrando si ha

$$\int_{\Sigma} (v \Delta_2 u - u \Delta_2 v) d\Sigma = 0.$$

Indicando con  $\sigma$  il contorno di  $\Sigma$  e con  $n$  la normale a  $\sigma$  diretta verso  $\Sigma$  si ha per il teorema di Green

$$\int_{\sigma} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Ricordando che l'espressione del  $A_2$  in coordinate polari  $\varrho, \varphi, \theta$  è

$$A_2 = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\}$$

e che quindi per una funzione della sola  $r$  si riduce ad  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$ , è noto che un particolare integrale della (8) è dato da  $\frac{\cos cr}{r}$ , essendo  $r$  la distanza del punto variabile dall'origine. Esso è regolare in tutto lo spazio, eccettuato solo l'origine; e si annulla all'infinito assieme alle sue derivate.

Indichiamo con  $p$  il piano  $z=0$ , essendo  $S$  il semispazio  $z>0$ ; con  $M$  un generico (variabile) punto di  $S$  e con  $M'$  un punto pure generico di  $S$ , ma fisso; con  $M'_1$  il suo simmetrico rispetto al piano  $p$ , con  $r, r'$  le distanze  $MM', MM'_1$ . La funzione  $\frac{\cos cr'}{r'}$  è un integrale della (8) regolare in tutto  $S$ ; anche la funzione  $\frac{\cos cr}{r}$  è un integrale della (8), ma ha entro  $S$  una singolarità nel punto  $M'$ . Poniamo

$$v = \frac{\cos cr}{r} - \frac{\cos cr'}{r'}$$

ed indichiamo con  $u$  un integrale della (8) regolare in tutto  $S$  e nullo all'infinito, assieme alle sue derivate prime, come  $\frac{1}{r^2}$  almeno. Sia  $T$  una superficie qualunque esterna ad una semisfera di raggio grandissimo,  $\tau$  una sferetta di centro in  $M'$ ; per quanto grande si scelga  $T$  e piccola  $\tau$  nello spazio compreso fra  $p, T, \tau$  le  $u, v$  sono regolari; quindi indicando con  $p'$  la porzione di  $p$  intercetta da  $T$  si ha

$$(9) \quad \int_{p'+T+\tau} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Prendiamo per es. per  $T$  una sfera di centro  $M'$  e di raggio  $\frac{1}{\varepsilon}$  e per  $\tau$  una sfera con lo stesso centro e raggio  $\varepsilon$ . Avremo nei punti di  $T$ , per essere  $dn = -dr$ ,

$$\begin{aligned} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma &= \left( v \frac{du}{dr} - u \frac{dv}{dr} \right) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \\ &= \left( v \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{du}{dr} - \frac{u}{\varepsilon^2} \frac{dv}{dr} \right) \sin \varphi d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Per ipotesi al decrescere indefinito di  $\varepsilon$  le quantità  $\frac{u}{\varepsilon^2}$ ,  $\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{du}{dr}$  si mantengono sempre finite,  $v$  e  $\frac{dv}{dr}$  hanno per limite lo zero, e quindi l'integrale esteso a  $T$  tende a zero con  $\varepsilon$ . Sopra  $\tau$ , tenendo presente l'espressione di  $v$ , si ha, essendo  $dn = dr$ ,

$$\frac{dv}{dn} d\sigma = \left( -\frac{\cos c r}{r^2} + \dots \right) r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = (-\cos c\varepsilon + \gamma) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

indicando  $\gamma$  termini che vanno a zero con  $\varepsilon$ ; inoltre  $v d\sigma$  tende a zero con  $\varepsilon$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \int_{\tau} \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{\tau} u (-\cos c\varepsilon) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{\tau} (-u' + u' - u) \cos c\varepsilon \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= -4\pi u' + \lim_{\varepsilon=0} \int_{\tau} (u' - u) \cos c\varepsilon \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = -4\pi u', \end{aligned}$$

indicando  $u'$  il valore di  $u$  in  $M'$ .

Al limite dunque la (9) ci dà

$$4\pi u' = \int_p \left( u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma;$$

ma siccome la  $v$  è nulla sopra  $p$  resterà

$$(10) \quad 4\pi u' = \int_p u \frac{dv}{dn} d\sigma.$$

Con che ogni integrale  $u$  della (8) regolare in  $S$  e nullo all'infinito nel modo detto rimane espresso mediante i valori che esso prende sul piano  $p$ . Essendo nel caso nostro la  $u$  nulla sopra  $p$  si ha  $u = 0$  in tutto lo spazio.

Dalla proprietà dimostrata si deduce subito quest'altra.

Si indichi con  $u$  un integrale della (8) regolare nel semispazio  $S$ ; riferendoci a coordinate cilindriche  $\varrho$ ,  $\theta$ ,  $z$  sarà  $u$ , per la sua regolarità, funzione periodica di  $\theta$ ; quindi potremo porre

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

con  $u_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  funzioni solo di  $\varrho$  e  $z$ .

Avendosi in coordinate cilindriche

$$\Delta_2 = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

poniamo

$$A_2 = A'_2 + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\gamma^2}{\gamma \theta^2}$$

con che  $A'_2$  è l'espressione del  $A_2$  per una funzione indipendente da  $\theta$ , cioè simmetrica rispetto alla normale al piano  $z=0$ . La (8) ci dà allora

$$A'_2 u_0 + c^2 u_0 + \sum_{1-n}^{\infty} \left\{ \left[ A'_2 a_n - \left( \frac{n^2}{\varrho^2} - c^2 \right) a_n \right] \cos n\theta + \right. \\ \left. + \left[ A'_2 b_n - \left( \frac{n^2}{\varrho^2} - c^2 \right) b_n \right] \sin n\theta \right\} = 0$$

ed esige che per conseguenza si annullino separatamente il termine indipendente da  $\theta$  ed i coefficienti di ogni  $\cos n\theta$ ,  $\sin n\theta$ . Otteniamo quindi:

$$A'_2 u_0 + c^2 u_0 = 0, \\ A'_2 a_n + \left( c^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) a_n = 0, \\ A'_2 b_n + \left( c^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) b_n = 0.$$

Se per l'integrale  $u$  si aggiunge la condizione che sia nullo sul piano  $z=0$  e nullo all'infinito insieme alle derivate prime nel modo sopra detto si sa che esso è identicamente nullo; devono quindi essere identicamente nulli anche  $u_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ . Otteniamo perciò:

« Ogni integrale dell'equazione

$$A'_2 f + \left( c^2 - \frac{n^2}{\varrho^2} \right) f = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

regolare in  $S$ , nullo per  $z=0$  e nullo all'infinito, assieme alle sue derivate prime, come  $\frac{1}{\varrho^2 + z^2}$  almeno è identicamente nullo ».

**Fisica.** — *Intorno ad un nuovo apparecchio per la determinazione dell'equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatometro, del termometro e del psicrometro.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

**Fisica.** — *Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido.* Nota II di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sintesi diretta della anidride nitrosa*. Nota di DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Dei cinque ossidi dell'azoto oggidì ben conosciuti, l'unico che finora non si era potuto isolare e studiare allo stato di sicura purezza era il triossido o anidride nitrosa.

Il primo a menzionarlo sotto il nome di acido nitrico flogisticato fu lo Scheele (1774).

Gay-Lussac nel 1809 ne osservò la colorazione azzurra <sup>(1)</sup>: in una geniale Memoria pubblicata in seguito definì la composizione giusta della sostanza <sup>(2)</sup>.

In seguito Dulong <sup>(3)</sup> operò la sintesi parziale della anidride nitrosa mescolando ossigeno con eccesso di biossido d'azoto e condensando i vapori rossi così generati: lo stesso autore scoprì la reazione della ipoazotide con acqua, reazione che gli fornì un altro mezzo per ottenere il corpo azzurro.

Fritzsche <sup>(4)</sup> fu il primo ad ottenere un prodotto costituito in massima parte da triossido d'azoto: utilizzò la reazione scoperta da Dulong, facendo reagire a goccia a goccia l'acqua sulla ipoazotide fortemente raffreddata; poi distillò cautamente lo strato azzurro formatosi in fondo al recipiente in cui si faceva l'esperienza.

Péligot <sup>(5)</sup> perfezionò la prima sintesi di Dulong: inoltre trovò che la ipoazotide si combina parzialmente col biossido di azoto a temperatura ordinaria. Affinchè la reazione fosse più completa, Hasenbach <sup>(6)</sup> fece passare il vapore di ipoazotide mescolato ad eccesso di biossido d'azoto attraverso ad una canna di vetro arroventata, e raccolse il prodotto in un apparecchio condensatore circondato da miscuglio frigorifero.

Finalmente, uno dei metodi i più frequentemente impiegati consiste nel far reagire sull'acido nitrico di media concentrazione sostanze riducenti, come amido (Liebig) oppure anidride arseniosa (Nylander) <sup>(7)</sup>: però il prodotto ottenuto è fortemente inquinato da ipoazotide.

Comunque la sostanza sia stata preparata, gli autori la descrivono come un liquido di colore variante dall'azzurro cupo al verde sporco: non presenta mai un punto di ebollizione costante, poichè durante la determinazione esso va salendo a mano a mano da — 3° sino a 22°: la distillazione è accom-

(1) Mémoires de la Société d'Arceuil, II, 241.

(2) Ann. de physique et de chimie, Série II, 1, 404.

(3) Ann. de physique et de chimie, S. II, 2, 317.

(4) Journ. für praktische Chemie, 22, 14.

(5) Ann. de physique et de chimie, S. II, 54, 17.

(6) Journ. für praktische Chemie, N. F. 4, 1.

(7) Zeitschr. für Chemie, N. F. 2. 66.

pagnata dallo sviluppo di rilevanti quantità di biossido d'azoto. Questi caratteri dipendono dalla poca stabilità del triossido, esso ha una marcata tendenza a scindersi secondo la reazione:



La instabilità è anche confermata dal fatto, che nessuno degli autori nominati è riuscito ad avere una analisi con cifre concordanti fra di loro e con la teoria.

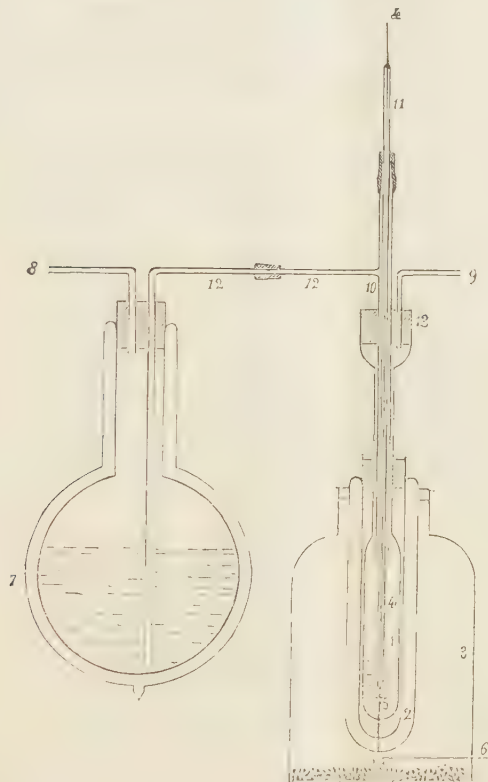


FIG. 1.

Come ebbi ad annunciare in una Nota preliminare <sup>(1)</sup>, facendo avvenire una serie di scariche elettriche in seno all'aria liquida osservai la formazione di una sostanza verdastra assai instabile. Questa sostanza non è altro che il triossido d'azoto, generato per combinazione diretta dei due componenti principali dell'aria liquida. Nella presente Nota espongo le ricerche da me intraprese su questo argomento, ricerche che mi hanno permesso di riconoscere la purezza del composto ottenuto, e di definirne la proprietà.

*Apparecchio per la preparazione della anidride nitrosa (fig. 1).* — Il recipiente cilindrico di vetro (1) munito in fondo di un elettrodo di

<sup>(1)</sup> Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vol. XI, s. 5<sup>a</sup>, fasc. 2, 1902.

platino (5) (spessore mm. 1,5), è isolato termicamente dall'ambiente mediante il cilindro di Dewar (2) attraversato anch'esso in fondo da un filo di platino che va a far contatto con l'elettrodo (5). Per evitare la condensazione dell'umidità atmosferica sulla parete esterna del cilindro (2), condensazione che sarebbe inevitabile a causa della bassa temperatura che il cilindro viene ad assumere quando nel recipiente (1) si trova aria liquida, il cilindro Dewar è racchiuso in un bottiglione a bocca larga (3) sul cui fondo c'è uno strato di cloruro di calcio. La comunicazione elettrica dello elettrodo (5) con l'esterno è assicurata da un pozzuolo di vetro contenente mercurio, fissato sul fondo del bottiglione: in esso pescano tanto l'estremità del filo di platino sporgente dal cilindro Dewar quanto un filo di ferro (6).

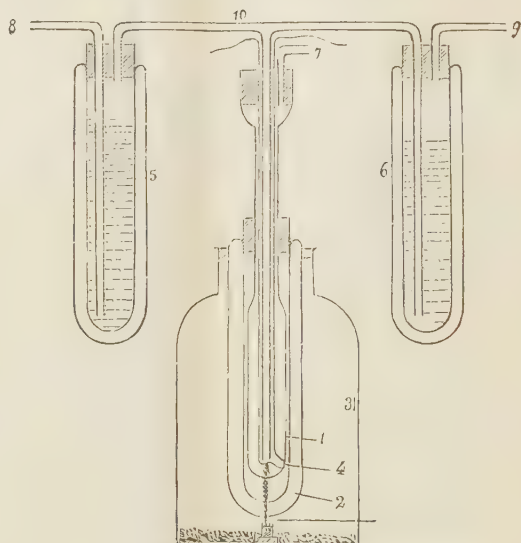


FIG. 2.

Alle prime esperienze, ogni volta che volli versare l'aria liquida nel recipiente (1) questo si rompeva a causa del raffreddamento istantaneo e della brusca contrazione del vetro in cui era saldato l'elettrodo: cercai quindi una disposizione atta a raffreddare lentamente il recipiente (1) in modo da evitare tensioni pericolose fra vetro e platino. Questa disposizione è costituita da due cilindri Dewar (5), (6) (fig. 2) contenenti aria liquida: essi sono congiunti da un tubo a T (10), il cui ramo discendente finisce in fondo al recipiente (1). Facendo gorgogliare per mezzo del tubo (8) una corrente di aria secca nel cilindro (5), quest'aria penetra, fortemente raffreddata, nel recipiente (1) e ne abbassa a poco a poco la temperatura: discesa che questa sia a  $-160^{\circ}$  circa (ciò che si constata dalla forza elettromotrice fornita da una coppia termo-elettrica costantano-ferro la cui saldatura si vede in (4)),

si fa arrivare in (1) l'aria liquida del cilindro (6), per mezzo di una pompetta di gomma applicata al tubo (9). L'aria liquida raccolta nel recipiente (1) lo mantiene raffreddato fino al principio dell'esperienza.

Dopo la descritta operazione di raffreddamento preliminare si distacca dal recipiente (1) l'apparecchio (5), (6), (10) e si fissa sulla imboccatura di (1) (fig. 1) un tappo attraversato dal tubo (10), nell'interno del quale passa liberamente un tubo (11) a pareti piuttosto grosse. Questo contiene un filo di rame (4) terminante in basso con un elettrodo di platino (spessore mm. 1,5) fissato con smalto all'estremità del tubetto (11): il tubo (10) porta alla sua estremità superiore un pezzetto di cannello di gomma attraverso al quale passa a dolce sfregamento il tubo (11).

Mentre si fa avvenire la scarica, una certa quantità di aria liquida si perde per ebollizione: questa si rifornisce al recipiente (1) per mezzo di una diramazione (12) del tubo (10), diramazione la quale comunica col pallone Dewar (7) contenente aria liquida e funzionante all'istesso modo delle solite spruzzette da laboratorio. La pressione necessaria per far salire l'aria liquida dal pallone (7) si otteneva mediante una pompetta di gomma, intercalando fra essa ed il pallone dei tubi con cloruro di calcio ed anidride fosforica, a fine di non inquinare d'umidità atmosferica il contenuto del pallone (7). Un tubo (9) passato attraverso ad un secondo foro del tappo (13) serve a smaltire i prodotti gassosi sviluppati nel recipiente (1). I tubi (10) e (12) sono coperti con un denso strato di lana che li protegge contro il calore dell'ambiente.

La corrente impiegata per produrre le scariche mi era data da un rocchetto di Ruhmkorff di 32 cm. di lunghezza: i poli del circuito secondario di questo apparecchio erano congiunti con i fili (6) e (4). Dopo vari tentativi rinunciai all'impiego del solito interruttore intercalato nel circuito primario <sup>(1)</sup>, mandai invece direttamente in questo la corrente alternante (42 periodi al secondo) fornitami, previa trasformazione, dalla rete urbana di Roma.

L'intensità della corrente primaria si poteva regolare mediante un adeguato reostato.

L'operazione si conduceva nel modo seguente: dopo empito il recipiente (1) a circa un terzo della sua altezza con aria liquida si ponevano in contatto i due elettrodi e si faceva agire il rocchetto: allontanando allora

(1) Da principio facevo uso di un interruttore di Wehnelt e di corrente continua a 60 volt: ottenevo così fra gli elettrodi tensioni che potevano arrivare sino a 3000-4000 volt. Però in queste condizioni nell'aria liquida si formavano abbondanti quantità di ozono: e l'anidride nitrosa generata, probabilmente in seguito ad una combinazione coll'ozono, acquistava la proprietà di esplodere, spesso anche spontaneamente. Continuerò gli studi su questo argomento. L'impiego di corrente alternante come l'ho descritto, evita completamente la formazione dell'ozono.

di un paio di millimetri l'elettrodo superiore dall'inferiore avviavo la scarica. In queste condizioni essa presenta l'aspetto di una fiammella violacea assai stabile. Le punte degli elettrodi si arroventano al rosso vivo malgrado la bassissima temperatura dell'ambiente che li circonda: con corrente troppo forte li ho visti anche fondere. L'intensità della corrente primaria, misurata con un amperometro calorico, variava da 8 a 9 ampère; la forza elettromotrice fra i poli del secondario, determinata mediante un voltmetro elettrostatico, era, a scarica normalmente avviata, di 1000 volt circa.

Pochi istanti dopo il principio della scarica s'incominciano a vedere dei fiocchetti verdastri i quali nuotano nell'aria liquida che circonda gli elettrodi: la loro quantità aumenta rapidamente, tanto che dopo mezz'ora il liquido è divenuto torbido al punto da intercettare alla vista il lampeggiamento della scarica. A mano a mano che il livello del liquido cala, se ne fa arrivare dell'altro dal pallone (7). La quantità di aria liquida richiesta per la preparazione di mezzo grammo d'anidride nitrosa è a un dipresso di 300 cc. La detta quantità di sostanza impiega a formarsi un'ora circa.

Preparata che sia una quantità sufficiente di prodotto, il miglior mezzo per eliminare rapidamente l'aria liquida in cui è sospeso, consiste nello svaporarla a pressione ridotta. A tale uopo si evacua il recipiente (1) con una buona macchina pneumatica: nel tragitto fra la pompa ed il recipiente (1) è intercalato un lungo tubo contenente uno strato di calce sodata ed un altro di cloruro di calcio secco, destinati ad impedire la rientrata di anidride carbonica e d'umidità dall'atmosfera. Il vuoto si controlla mediante un manometro.

Sotto una pressione di 20 mm. l'aria liquida bolle rapidamente: quando ne sia rimasta appena tanta da formare con l'anidride nitrosa una specie di pasta, si sfila il tubo Dewar (2) dal bottiglione (3) e s'immerge in un secondo cilindro Dewar, contenente aria liquida (fig. 3), senza interrompere la comunicazione con la macchina pneumatica nè fermare questa: l'abbassamento della temperatura esterna così prodotto rallenta considerevolmente lo svaporamento del liquido contenuto nel recipiente (1): ma una volta svaporate le ultime tracce di esso, la temperatura della sostanza rimasta indietro non può salire al disopra di quella dell'aria liquida esistente nel cilindro Dewar esterno: in queste condizioni l'anidride nitrosa è perfettamente stabile. Per accertarsi che tutta l'aria liquida sia stata eliminata, si chiude la comunicazione fra la macchina pneumatica ed il recipiente (1) e si osserva il manometro comunicante con questo: il vuoto da esso indicato resta costante solo allorquando non ci sia più rimasta aria liquefatta, la tensione del cui vapore farebbe risalire la pressione.

Finalmente si lascia rientrare l'aria nell'apparecchio, facendola passare attraverso al tubo contenente le sostanze essiccanti.

*Proprietà dell'anidride nitrosa pura.* — Quando la sostanza è sospesa nell'aria liquida il suo aspetto ricorda vivamente quello dell'idrato cromico precipitato: dopo l'eliminazione dell'aria liquida si presenta sotto forma d'una massa polverosa, amorfa, d'un colore celeste pallidissimo.

Il suo punto di fusione fu determinato mediante un termometro termoelettrico costituito da una coppia costantino-ferro, la cui saldatura fu portata a contatto della sostanza contenuta in fondo al recipiente (1): la forza elettromotrice di questa coppia si misurò per mezzo di un millivoltmetro della casa Kaiser e Schmidt, confrontato lo stesso giorno della misura con uno strumento campione (1). La temperatura di fusione così determinata si trovò essere uguale a  $-111^{\circ}$ .

Nell'istante della fusione il colore celeste pallido si trasforma in quello azzurro cupo che finora si considerava come caratteristico del triossido d'azoto: questo colore persiste anche se la sostanza si risolidifica col raffreddarla di bel nuovo con aria liquida.

Appena fusa, la sostanza incomincia a decomporsi, emettendo biossido di azoto: nel vuoto si osserva immediatamente lo sviluppo di bolle di questo gas; alla fine rimane indietro la sola ipoazotide. Questo carattere spiega perchè finora la sostanza preparata con metodi, in cui la temperatura alla quale il corpo si forma e si manipola è molto più alta di quello di fusione, non aveva mai presentato caratteri qualitativi e quantitativi ben definiti: ciò che coincide appieno con l'osservazione fatta dal prof. Ramsay (1), il quale osservò che il liquido azzurro ottenuto con i soliti metodi non è ancora solido a  $-90^{\circ}$  e che a questa temperatura già incomincia a decomporsi sviluppando biossido d'azoto.

*Analisi della anidride nitrosa.* — A causa della estrema instabilità del prodotto non potevo pensare a pesarlo direttamente: dovetti ricorrere ad un metodo il quale mi fornisse la quantità di ossigeno e quella d'azoto contenuta in un peso qualsiasi di sostanza, desumendo poi questo peso dalla somma dei pesi d'azoto e di ossigeno trovati. Procedetti nel modo seguente (fig. 3):

Un tubo di vetro di Jena (6) (assai difficilmente fusibile) conteneva una spirale di reticella di rame, compresa fra due tamponcini di amianto. La spirale era stata profondamente ossidata col riscaldarla in corrente d'ossigeno, e quindi ridotta coll'idrogeno: per eliminare quel po' di quest'ultimo eventualmente occluso dal rame, la spirale era stata arroventata dapprima in una corrente di anidride carbonica secca, e poi nel vuoto di una pompa a mercurio. Dopo avere esattamente pesato, il tubo (6) si adattò mediante una buona smerigliatura, sull'apertura (4) del recipiente (1) contenente la sostanza da analizzare, conservata alla temperatura dell'aria liquida: per rendere la chiu-

(1) Millivoltmetro Weston campione n. 291.

sura in (4) assolutamente sicura, si versò un po' di mercurio nella svasatura a quest' uopo preparata.

All'apertura libera del tubo (6) si applicò mediante un tappo di gomma una pompa a mercurio di Sprengel (9) la quale permetteva di raccogliere al mo-

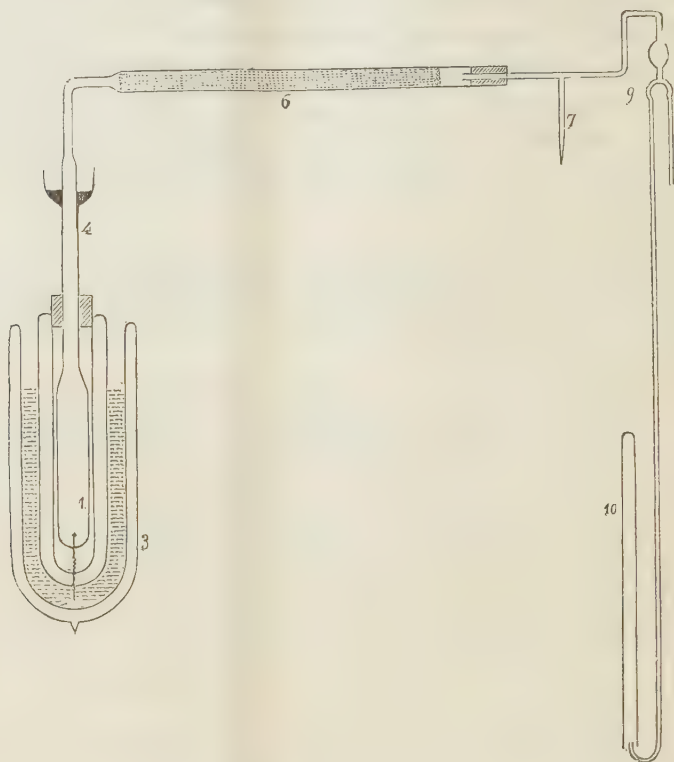


FIG. 3.

mento opportuno in un cilindro graduato (10) il gas estratto dal tubo (6). Questa pompa si fece funzionare fintantochè cessò di portar via quantità visibili d'aria: allora si arroventò il tubo (6) mediante una fila di fiamme a gas, e si tolse il cilindro Dewar (3) permettendo così alla sostanza contenuta nel recipiente (1) di prendere lentamente la temperatura dell'ambiente e, quindi, di decomorsi. I prodotti della scomposizione passando sul rame rovente gli cedevano l'ossigeno; l'azoto veniva continuamente evacuato dalla pompa e raccolto nel cilindro graduato. Dopo la scomparsa delle ultime tracce di sostanza in fondo al recipiente (1) continuai e far funzionare la pompa sino a far cessare lo sviluppo di bolle visibili. Si lasciò allora raffreddare completamente il tubo (6) e poi vi si ammise l'aria attraverso alla diramazione (7): quest'aria era rigorosamente seccata su cloruro di calcio ed anidride fosforica. Finalmente si ripesava il tubo (6) dopo averlo staccato dal recipiente (1)

(1) Journal of the Chemical Society, 1890, 590.

e dalla pompa Sprengel e si misurava su acqua il volume d'azoto raccolto. Quest'azoto conteneva sempre un po' di biossido di azoto indecomposto: si determinava la quantità di questa sostanza assorbendola con solfato ferroso e notando la diminuzione di volume avvenuta dopo l'assorbimento. I pesi di ossigeno e d'azoto calcolati dal volume di biossido assorbito, si aggiunsero a quelli degli istessi corpi ottenuti rispettivamente allo stato di combinazione col rame e di elemento libero. Si ebbero a questo modo i risultati seguenti:

$$\begin{aligned}
 11^{\circ},5 \quad 746,45 \text{ mm. } N &= \text{cc. } 70 = \text{gr. } 0,0822 \\
 NO &= \text{cc. } 5 = \text{gr. } 0,0062 = N \text{ gr. } 0,0029 + O \text{ gr. } 0,0033 \\
 O &= \text{gr. } 0,1483 + 0,0033 = 0,1516 \\
 N &= \text{gr. } 0,0822 + 0,0029 = 0,0851 \\
 \text{Sostanza} &= \text{gr. } 0,2367
 \end{aligned}$$

|                      | Calcolato per $N^2O^3$ | Trovato |
|----------------------|------------------------|---------|
| Azoto % . . . . .    | 36,85                  | 35,96   |
| Ossigeno % . . . . . | 63,15                  | 64,04   |

La formazione della anidride nitrosa per l'azione delle scariche elettriche sull'aria liquida mi suggerisce alcune considerazioni circa la classica esperienza di Cavendish, il quale fu il primo ad osservare la combustione dell'azoto atmosferico nella scintilla elettrica. Come ebbi a notare descrivendo i fenomeni che accompagnano le scariche nell'aria liquida, durante l'esperienza, la punta degli elettrodi è portata ad una temperatura assai elevata: questo riscaldamento è possibile soltanto a condizione, che, grazie al fenomeno di calefazione, gli elettrodi rimangano circondati da un'atmosfera gassosa che li isola termicamente dalla bassissima temperatura del liquido che li circonda. Ci ritroviamo allora nelle stesse condizioni come nella esperienza di Cavendish: abbiamo cioè la scarica in un ambiente gassoso. Mi sembra quindi probabile che l'anidride nitrosa sia il composto che l'ossigeno forma con l'azoto anche quando la scarica avvenga nell'aria atmosferica: ma che questo composto, stabile soltanto a bassissima temperatura, nella esperienza di Cavendish, si manifesti solo coi suoi prodotti di scomposizione (vapori rutilanti): mentrechè se si raffredda, appena formato, ad una temperatura a cui possa sussistere inalterato, lo si può raccogliere e studiare nel modo descritto in questa Nota.

Le presenti ricerche vennero eseguite nell'Istituto chimico della R. Università di Roma.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente BLASERNA dà il doloroso annuncio della morte del Socio straniero G. G. STOKES, ed il Socio VOLTERRA legge la seguente Commemorazione del defunto accademico.

« La cattedra fondata a Cambridge da Enrico Lucas nel 1662 su cui salirono primo Barrow e secondo Newton <sup>(1)</sup> resta oggi, dopo circa due secoli, ancora una volta vuota per la morte di Giorgio Gabriele Stokes.

Il rimpianto per la perdita del venerato vegliardo, che suscitò tanto affetto e tanta ammirazione, si diffonde dalla sua patria in tutto il mondo civile. Mentre i suoi concittadini tributano alla sua memoria i più grandi onori, primo fra tutti quello di stimare la sua carriera scientifica così elevata da potersi paragonare alla carriera del suo grande predecessore, noi, che, pur lontani ammirammo le sue scoperte e lo avemmo Socio di questa Accademia, sentiamo il dovere di commemorarne le opere, invero degne di esser prese a modello di ogni trattazione scientifica, e la vita, grande esempio di virtù e di generosità.

Chiamato a parlare di lui fra voi, illustri Colleghi, mi sforzerò di tratteggiare brevemente, come il tempo limitato permette e le mie forze consentono, la sua nobile figura <sup>(2)</sup>.

Egli nacque il 13 agosto 1819 a Skreen nella contea di Sligo in Irlanda. Suo padre fu il reverendo Gabriele Stokes e sua madre Elisabetta era figlia del rettore di Kilrea, Giovanni Haughton.

Educato dapprima a Dublino ed a Bristol, passò poi nel collegio Pembroke di Cambridge. Era trascorso allora un ventennio appena, dacchè gli estremi vestigi della così detta ultima scuola Newtoniana erano scomparsi. Il genio di Newton, dopo aver sparsa tanta luce e data così potente spinta alle ricerche scientifiche, aveva tenuto ancora avvinti i geometri della sua patria ai suoi metodi ed alla sua tradizione in un'epoca nella quale già altri

(1) I professori Lucasiani furono: Barrow (1664-1669); Newton (1669-1702); Whiston (1702-1711); Saunderson (1711-1739); Colson (1739-1760); Waring (1760-1798); Milner (1798-1820); Woodhouse (1820-1822); Turton (1822-1826); Airy (1826-1828); Babbage (1828-1839); King (1839-1849); Stokes (1849-1903).

(2) Mi sono giovato dei bellissimi studii sulle opere di Stokes pubblicati da Lord Kelvin nel n. 12 feb. 1903 della Rivista inglese *Nature*, e da J. J. Thomson nel n. 12 feb. 1903 della *Cambridge Review*. La *Nature* ha pubblicato altri articoli su Stokes il 12 febbraio 1903, e l'8 giugno 1899 in occasione del suo giubileo, e il *Times* del 2 e 3 feb. 1903 contiene due articoli sulla vita di Stokes.

metodi più potenti si erano sviluppati e diffusi in Europa. Ma, allorchè Stokes incominciò gli studi universitari nel 1837, quel fatale isolamento che per circa un secolo aveva conservato i matematici inglesi lontani dal movimento della scienza continentale era finito.

Stokes insieme con Airy, Sylvester, Green, Cayley, William Thomson, Maxwell ed altri sommi che si succedettero nei collegi inglesi nella prima metà del secolo scorso, mostrarono all'Europa attonita di qual mirabile slancio fosse capace ancora il genio britannico e quali sublimi altezze potesse raggiungere nei campi più ardui dell'analisi, della fisica matematica e della geometria.

L'esame più elevato che si dà a Cambridge si chiama il *Mathematical Tripos*. Wordsworth <sup>(1)</sup> ci racconta la origine curiosa di questo nome, e Ball <sup>(2)</sup> ne rifà la storia rivelando tutta l'importanza di questa prova suprema universitaria nello sviluppo delle matematiche in Inghilterra.

Colui che riesce primo prende nella classificazione il nome di *Senior Wrangler*. Stokes fu *Senior Wrangler* nel 1841 contro formidabili competitori come Cayley e Adams.

Quattro anni dopo il *Second Wrangler* era un altro giovane irlandese, allievo del Collegio di Peterhouse: William Thomson. La reciproca stima, la eguale tendenza verso i più alti problemi della fisica e della matematica univano questi due uomini, dall'epoca in cui si trovavano ambedue a Cambridge, fino al momento in cui la morte venne a spezzare questo loro nobile legame.

Lo stesso lord Kelvin ci narra i ricordi della loro giovanile amicizia. Verso il 1840 nessun gabinetto di fisica, dice lord Kelvin, esisteva nel collegio di Pembroke; dal 1840 al 1843 il primo laboratorio di fisica delle Università della Gran Bretagna era nelle camere abitate dal giovane Stokes.

Lord Kelvin ha rievocato in questi stessi giorni le conversazioni sulla chimica stellare che i due amici tenevano passeggiando nei pressi dei collegi di Cambridge verso il 1852. Il grande superstite attesta ancora una volta che il suo compagno gli suggerì allora una delle più geniali e feconde idee della fisica, la spiegazione cioè del rapporto esistente fra le linee brillanti e le strie di assorbimento delle sostanze. Questa nuova affermazione del più illustre scienziato oggi vivente è l'ultima parola che possa dirsi sulla dibattuta questione, perchè la bocca di Stokes è ormai muta, nè più gli è dato modestamente rifiutare la priorità dell'idea fondamentale che domina l'analisi degli astri <sup>(3)</sup>.

(1) *Origin and history of the mathematical tripos*, Cambridge 1880.

(2) *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge 1889.

(3) Indipendentemente dallo Stokes, che non pubblicò le sue idee, i principii dell'analisi spettrale vennero stabiliti, come è ben noto a tutti da Kirchhoff e Bunsen Cfr.

Stokes fu eletto Fellow di Pembroke, ma nel 1857 dovè abbandonare il Collegio a cagione del suo matrimonio con Maria Robinson, giacchè gli statuti di quell'epoca imponevano ai Fellows il celibato. Però, venute in vigore le nuove disposizioni che toglievano tal vincolo, fu rieletto, e nell'Agosto scorso egli divenne Master che è il più alto grado nell'Istituto. Dal 1849 egli era professore Lucasiano e nel 1851 entrò a far parte della Società Reale di cui tre anni dopo fu Segretario e poscia per un quinquennio Presidente. Rappresentò al Parlamento l'Università di Cambridge e nel 1889 i lunghi servizi da lui resi alla scienza gli valsero di essere creato Baronetto.

L'ultimo premio, che coronò una vita consacrata a studî tanto fecondi, fu la solenne celebrazione del cinquantesimo anniversario della sua nomina a professore Lucasiano. I memorabili giorni del Giugno 1899 in cui, alla presenza di tutte le Autorità accademiche di Cambridge e delle rappresentanze delle Università e dei corpi scientifici di ogni parte del mondo, ebbero luogo le splendide onoranze, sono a tutti presenti e l'eco dei dotti discorsi e delle comunicazioni scientifiche fatte in quella occasione non è scomparsa <sup>(1)</sup>.

In questi ultimi anni Stokes, rimasto vedovo, viveva con la figlia e col genero, quando la morte lo colse, il 1° febbraio scorso, carico di anni e di gloria.

Funerali solenni a cui si associarono le istituzioni e le più alte personalità scientifiche dell'Inghilterra ebbero luogo a Cambridge, ed egli ora riposa nel cimitero di Mill Road, mentre molti chiedono più degno posto per la sua salma nella vecchia Abazia di Westminster.

L'opera scientifica di Stokes può dirsi quella di un perfetto fisico matematico. La sua attività non si svolse in tutti i rami della scienza, ma egli sviscerò alcuni dei più importanti capitoli lasciandovi impronta imperitura.

Provetto conoscitore del calcolo e cultore profondo della più squisita analisi geometrica, appresa specialmente nelle opere immortali degli analisti francesi, seppe conciliare le indagini sperimentali colla ricerca matematica,

---

Kirchhoff, *Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre*. Pogg. Annalen Bd. 118; 1862. Lord Kelvin manifestò nella allocuzione letta alla Associazione Britannica nel 1871 le idee espostegli da Stokes nel 1852 (*Report of the forty-first meeting of the British Association for the advancement of science; held at Edinburgh in August 1871* pag. XCV). Stokes rifiutò in una lettera inserita nella *Nature* (6 gennaio 1876) alcun diritto alla scoperta. Egli si esprime così: « I have never attempted to claim for myself any part of Kirchhoff's admirable discovery, and cannot help thinking that some of my friends have been over zealous in my cause ».

<sup>(1)</sup> *Memoirs presented to the Cambridge philosophical Society on the occasion of the jubilee of Sir George Gabriel Stokes. Bart. Hon. LL. D., Hon. Sc. D. Lucasian Professor*. Cambridge at the University Press, 1900.

e, se i risultati di questa furon guida alle prime, alla loro volta i problemi della fisica ispirarono le sue investigazioni analitiche, tanto che una mirabile armonia regna nelle pagine che Stokes ci ha lasciate, armonia che risponde al perfetto accordo delle facoltà speculative del suo spirito.

Questa rara dote e il genio solido e pratico ereditario nella razza anglo sassone, tennero lo Stokes lontano da un pericolo che ha minacciato anche grandi cultori della fisica matematica: quello cioè di lasciarsi trascinare fuori dal campo dei problemi fisici presi a indagare, dall'attrattiva di sottili disquisizioni geometriche o di sviluppi di calcolo eleganti e difficili. L'abile analista che cede a questo allettamento, diviene spesso lo schiavo della propria abilità. Allora mentre ammiriamo la maestria colla quale supera ardue difficoltà, dobbiamo sovente deplorare che la simmetria delle formule non risponda alla loro pratica applicazione o i risultati analitici non si prestino ad un riscontro sperimentale.

Da un tale difetto sono ben lungi le opere di Stokes, nè esse mai rivelano un'analisi matematica che si spinge oltre i confini del quadro tracciato dalla questione naturale. Lord Kelvin ha espresso con una frase comprensiva questo pensiero dicendo, esser la matematica, per Stokes, un aiuto, non lui esser servo della matematica, e la stella che guidò il suo pensiero essere stata sempre la filosofia naturale.

Le ricerche di Stokes si riferiscono principalmente alla idrodinamica, all'equilibrio ed al moto dei corpi elastici, all'ottica, alla variazione della gravità sulla superficie terrestre.

Egli principiò collo studio del moto stazionario dei fluidi incompressibili, colle indagini sull'attrito interno dei fluidi in moto e sul moto dei solidi nei fluidi.

Le ricerche classiche di Dirichlet non erano in quell'epoca ancora pubblicate, ed i celebri lavori di Helmholtz sui vortici dovevano ancora farsi lungamente attendere. Lo Stokes si occupò del teorema di Lagrange che conteneva in germe la teoria dei vortici, precedette i suoi contemporanei nello studio del moto dei solidi nei fluidi, in particolare dei solidi di forma sferica, nel qual caso applicò felicemente il metodo delle immagini di Thomson; ottenne finalmente la bella e feconda soluzione del problema dei movimenti di un fluido in una scatola rettangolare. L'attrito interno dei fluidi lo occupò a lungo. Trovò le equazioni fondamentali in maniera indipendente dalle ipotesi molecolari, che avevano invece guidato prima di lui Navier e Poisson, e ne fece importanti applicazioni al moto di una sfera nell'aria ed al problema del pendolo.

Altri lavori idrocinetici, in particolare quelli magnifici sulle onde, meriterebbero di essere ricordati se il tempo ce lo concedesse.

Ma le memorie che maggiormente hanno contribuito alla fama dello Stokes furono quelle di ottica. Nella sua teoria dinamica della diffrazione,

scritta fino dal 1849, mostrò la piena padronanza della teoria analitica delle equazioni differenziali della fisica matematica. Questa teoria oggi ha fatto grandi passi e si è in parte rinnovellata, ma si rifletta che i celebri lavori del Kirchhoff sui raggi luminosi, che tanto hanno contribuito al suo progresso, non vennero alla luce che trentacinque anni dopo il lavoro del fisico inglese. La teoria della diffrazione è seguita da abili esperienze, e l'autore vi tratta la questione tanto dibattuta nell'ottica, e prima e dopo di lui, del piano di polarizzazione.

Il magistrale lavoro sul cambiamento di rifrangibilità della luce, in cui vengono stabilite le leggi della fluorescenza, resta monumento perenne del genio di Stokes. Il modo ammirabile con cui egli ha concepite le esperienze, le ha eseguite e discusse, costituirà un modello difficilmente superato dai fisici.

Su altri lavori di ottica pur notevoli, come quello dei colori delle lamine sottili, non mi è concesso fermarmi perchè l'ora incalza.

Classici ormai sono divenuti i teoremi di Stokes sulla gravità. Alle varie ipotesi di Clairault e Laplace relative alla costituzione interna della terra, mediante le quali essi pervenivano a stabilire le relazioni della gravità nei vari punti della superficie terrestre, egli sostituì la sola ipotesi che questa sia una superficie di livello.

La grande memoria sui valori critici delle somme di serie periodiche, tratta con grande maestria una delle più delicate e difficili questioni di analisi strettamente legata ad una classe estesa di problemi sul calore, la elettricità, la idrodinamica. Il lavoro poi sul calcolo numerico di una classe di integrali definiti e di serie infinite è un esempio di straordinaria abilità nel volgere ed impiegare le teorie analitiche a sussidio di questioni pratiche di fisica.

Sebbene numerosi, i lavori pubblicati da Stokes non sono che una parte della sua opera scientifica. Molti risultati egli non ha stampati mai, come la scoperta sull'analisi spettrale di cui già parlammo, come il teorema celebre, che porta il suo nome, sulla trasformazione degli integrali, il quale gli procurò negli anni giovanili il premio Smith. La sua produzione anteriore al 1854 è la più importante, nondimeno egli continuò, anche recentemente le comunicazioni ai periodici scientifici, fra cui è da segnalare l'ultima, sui raggi Röntgen, fatta nel 1896, allorchè questa scoperta scosse il mondo scientifico. Gran parte della sua attività, a partire dal 1854, epoca in cui fu eletto segretario della Società Reale, venne spesa per aiutare gli altri nelle loro ricerche e nei loro studi. Il meraviglioso disinteresse, la sublime generosità con cui egli metteva a disposizione l'alto ingegno per altrui profitto, non erano pareggiate che dalla sicurezza dei suoi apprezzamenti e dalla libertà del suo pensiero privo di ogni pregiudizio scientifico.

È perciò che Stokes lascia, insieme all'alta sua fama di scienziato, larga eredità di affetti e lungo rimpianto come benefattore dei molti che ebbero da lui incoraggiamento, consiglio ed aiuto.

Sulle ridenti e verdi rive del Cam, giace la tranquilla città universitaria, piccola per estensione, ma grande perchè ivi coll'andar dei secoli si è maturato gran parte del pensiero scientifico della vecchia Inghilterra. Colà in mezzo ad istituzioni e a costumi medioevali, l'arringo è aperto alle idee più moderne, e lo spirito conservatore, le antiche tradizioni e i ricordi si rafforzano accoppiandosi ad una larga libertà di pensiero. Nei vetusti e gloriosi Collegi di Cambridge vive ed è tuttora fresco il ricordo di Newton, ed il suo grande spirito sembra aleggiare nelle gotiche sale in mezzo a tanti celebri maestri ed allievi.

Fra questi, e allievo e maestro dell'antica Università, campeggerà sempre nella sua serena, nobile e maestosa figura Giorgio Gabriele Stokes ».

Il Vicepresidente BLASERNA dà annuncio della perdita fatta dall'Accademia nella persona del Socio straniero E. von WILD, del quale legge la seguente Commemorazione.

« Enrico von Wild nacque a Uster, piccolo villaggio del cantone di Zurigo, il 17 dicembre 1833 e studiò al Ginnasio e nell'Università di Zurigo fino al 1854. Si recava poscia a studiar fisica presso il grande maestro F. Neumann a Königsberg e si laureò nel 1858 a Zurigo. Dopo aver lavorato ancora con Kirchhoff e Bunsen a Heidelberg, egli fu chiamato come straordinario di fisica e direttore dell'annesso Osservatorio meteorologico a Berna, ove divenne ordinario nel 1862, nell'età di 29 anni.

La direzione dell'Osservatorio di Berna lo indusse ad occuparsi di preferenza di meteorologia. Egli ne allargò i limiti, facendone una stazione centrale per i cantoni di Berna e di Solothurn; ciò che fu il punto di partenza della grande rete meteorologica svizzera, impiantata nel 1863 dalla Società Elvetica delle Scienze naturali. In pari tempo fu direttore dell'Istituto speciale di pesi e misure, ove ebbe occasione di procedere ad una revisione esatta dei campioni svizzeri.

L'impianto del servizio metereologico svizzero fatto da Wild richiamò su di lui l'attenzione di tutti i cultori di questo ramo di scienze: esso rivelò nel giovane scienziato qualità affatto straordinarie di organizzatore intelligente ed attivo. Fu in seguito a ciò che il governo russo nel 1868 lo chiamava alla direzione dell'Istituto fisico centrale di Pietroburgo, rimasto vacante per la morte del celebre professore Kuppfer; egli ebbe l'incarico di completare l'organizzazione dell'Istituto e del servizio meteorologico e magnetico del vasto impero russo. Nel 1876 fondò a Pawlowsk un Osservatorio meteorologico e magnetico, che si può considerare come un modello del genere e

diede a tutto l'impianto da lui immaginato uno sviluppo addirittura meraviglioso. Grazie alla grande sua attività ed ai mezzi fornitigli largamente dal governo russo, si può dire senza esagerazione, che la Russia, dopo l'Inghilterra, ha reso i più grandi servigi allo studio dei fenomeni meteorologici e magnetici del mondo.

Si deve a Wild la fondazione delle Conferenze meteorologiche internazionali e nel 1880 fu anche il presidente del comitato polare internazionale, incaricato di tracciare le norme per le indagini scientifiche nelle regioni polari. Nella sua carica di direttore del servizio meteorologico russo, egli fondò e diresse, finchè rimase in carica, il grande « *Repertorium für Meteorologie* ».

Ma l'opera del Wild non è stata soltanto quella di un grande organizzatore; anche come scienziato egli ha dato prova di un'attività e di un ingegno non comuni. Le istruzioni meteorologiche da lui compilate, la pubblicazione di rapporti annuali sui risultati ottenuti nelle numerosissime stazioni da lui dipendenti, i confronti eseguiti per fornire alle diverse stazioni strumenti strettamente paragonabili fra di loro, i suoi studi sulla miglior forma ed ubicazione degli Osservatori, costituirebbero già da sè un insieme di meriti non comune. Ma si può dire che le sue ricerche speciali ed i numerosissimi perfezionamenti arrecati agli strumenti ed ai metodi di misura, fanno poi di lui un cultore esimio di questo ramo della fisica. Le grandi sue memorie sulla ricerca della temperatura dell'aria e del suolo, della pressione, dell'umidità, della velocità del vento, della evaporazione e delle precipitazioni, come pure quelle sulle misure magnetiche e di fotometria, costituiscono una vera biblioteca necessaria a chiunque si occupi di questi studi.

Finalmente bisogna ancora tenere conto delle sue ricerche in fatto di climatologia; la grande sua memoria sul clima della Siberia, e poi ancora il classico suo studio sulla distribuzione della temperatura nell'Impero russo e parecchie altre rimarranno sempre un modello del genere.

In pari tempo Wild è stato uno dei membri più anziani e più autorevoli nel Comitato internazionale di pesi e misure, ove ha potentemente contribuito al grandioso sviluppo di quella istituzione.

Nel 1895 egli si ritirò a Zurigo per la sua malferma salute, ed anche per l'indirizzo panslavista, che si faceva sentire sempre più in tutti gli atti dell'amministrazione russa; si diede tranquillamente a ricerche private di meteorologia, e morì nel 5 settembre 1902. Fu membro ordinario dell'Accademia Imperiale di Pietroburgo fin dal 1870 e Socio straniero della nostra Accademia dal 1895 ».

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci stranieri C. KLEIN e M. NOETHER, una Relazione

della Società sismologica italiana sul: *Primo Congresso ed Esposizione di istrumenti sismici in Brescia nel settembre 1902*, e il fasc. 6° dell'Atlante fotografico della Luna, pubblicato dall'Osservatorio di Parigi.

Il Socio CAPELLINI fa omaggio, a nome dell'autore, di una raccolta di pubblicazioni del Socio straniero LEPSIUS, e parla delle più importanti.

## CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Accademia delle scienze di Amsterdam; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società Reale di Londra; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la Società di scienze naturali di Braunschweig; la Società geodetica di Washington; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; il Museo Britannico di Londra; l'Istituto Teyler di Harlem; l'Osservatorio astronomico di Praga.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 1° marzo 1903.*

*Amodeo Federico.* — Dai fratelli Di Martino a Vito Caravelli. Memoria letta all'Accademia Pontaniana nelle tornate del 2 novembre e 7 dicembre 1902. Napoli, 1902. 8°.

*Angelitti Filippo.* — Osservazioni di distanze zenitali fatte al Circolo Meridiano di Repsold nel R. Osservatorio di Capodimonte durante gli anni 1893-94. Palermo, 1902. 4°.

*Berlese Ant.* — Nuove Relazioni intorno ai lavori della R. Stazione d'Entomologia agraria di Firenze per cura della Direzione. Serie I, n. 4, 1902. Portici, 8°.

Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de Allmänna läroverken den 26 maj 1899 i näder Tillsatta Kommitté. Bd. 3. Stokholm, 1902. 4°.

Буриборфа В. — Основы учения о красномъ отрубевидномъ лишаѣ Py-tiriasis rubra. Казань, 1902, 4°.

Congresso (Primo) ed esposizione di istrumenti sismici in Brescia nel settembre 1902. Modena, 1902. 8°.

- Өаворскій А. — Матеріалы къ вопросу о патолого-анатомическомъ измѣненіи спинного мозга при сдавленіи его. Казань, 1901. 8°.
- Janet Ch.* — Essai sur la constitution morphologique de la tête de l'insecte. Paris, 1899. 8°.
- Les habitations à bon marchè dans les villes de moyenne importance. Limoges, 1900. 8°.
- L'esthétique dans les sciences de la nature. Paris, 1900. 8°.
- Notes sur les fourmis et les guêpes, fasc. 4°-10°. Limoges, 1894-97. 4°.
- Sur les nerfs céphaliques, les corpora allata et le tentorium de la fourmi. (*Myrmica rubra* L.). Paris, 1899. 8°.
- Klein C.* — Die Meteoritensammlung der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 5 Februar 1903. Berlin, 1903. 8°.
- Totalreflectometer mit Fernrohr-Mikroskop. Berlin, 1902. 8°.
- Lebon E.* — Sur un manuscrit d'un cours de J.-N. Delisle au Collège Royal. Paris, 1902. 8°.
- Lepsius G. R.* — Das Mainzer Becken geologisch beschrieben, Darmstadt, 1883. 4°.
- Das westliche Süd-Tirol geologisch dargestellt. Berlin, 1898. 4°.
- Festschrift zur Weihe des neuen Soolsprudels zu Bad Nauheim. Im Auftrag etc. Darmstadt, 1900. 4°.
- Geologie von Attika. Berlin, 1893. f°.
- Geologie von Deutschland und den angrenzenden Gebieten (Erster Teil: Das westliche und südliche Deutschland). Stuttgart, 1892. 8°.
- Geologische Karte des deutschen Reichs. s. l. e. a. f°.
- Geologische Karte von Attika auf Kosten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften begonnen von R. Lepsius und H. Bücking fortgeführt und herausgegeben von R. L. (Neun Blätter im Maass. 1:25,000). Berlin, 1891. fol. gr.
- Griechische Marmorstudien. Berlin, 1890. 4°.
- Halitherium Schinzi die fossile Sirene des Mainzer Beckens. I. Band. Darmstadt, 1882. 4°.
- Loewy M. et Quiteaux.* — Atlas photographique de la lune. Sixième fascicule. Paris, 1902. 4°.
- Гурія. — О роли чувствительныхъ нервовъ діафрагмы въ иннерваціи дыханія. Казань, 1902. 8°.
- Marson L.* — Neval di Circo e traccie carsiche e glaciali del Gruppo del Cavallo. Roma, 1903. 8°.
- Николаевъ В. В. — Фотографированіе глазного дна живыхъ. Казань, 1901. 8°.
- Noether M.* — Rationale Reduction der Abel'schen Integrale. Erlangen, s. a. 4°.
- Ueber die singulären Elemente der algebraischen Kurven. Leipzig, s. a. 8°.

- Oddone E.* — Esiste una periodicità nei fenomeni sismici? Modena, 1902. 8°.
- Su di un apparecchio per lo studio sperimentale delle onde meccaniche longitudinali nell'aria, nel suolo e nell'acqua. Modena, 1902, 8°.
- Sui deflettometri. Modena, 1902. 4°.
- Tommasina Th.* — Constatation d'un champ tournant électromagnétique produit per une modification hélicoidale des stratifications, dans un tube à air raréfié. Paris, 1903. 4°.
- Sur le mode de formation des rayons cathodiques et des rayons de Röntgen. Paris, 1902. 4°.
- Viola C.* — Lichtbruhungsverhältnisse des Turmalins. Leipzig, 1902. 8°.

V. C.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 15 marzo 1903.*

P. VILLARI, Presidente.

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito.* Nota II <sup>(1)</sup> di G. PICCIATI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

3. Riprendiamo ora a considerare le due funzioni  $P, Q$  ricordando le loro caratteristiche e riferendoci alle coordinate  $\varrho, \theta, z'$ ; essendo, per la loro regolarità, funzioni periodiche di  $\theta$  possiamo porre

$$P = P_0 + \sum_{1}^{\infty} (g_n \cos n\theta + h_n \sin n\theta),$$

$$Q = Q_0 + \sum_{1}^{\infty} (e_n \cos n\theta + l_n \sin n\theta),$$

con  $P_0, Q_0, g_n, h_n, e_n, l_n$  funzioni solo di  $\varrho, z'$  regolari ed annullantesi all'infinito e per  $z' = 0$ . Sostituendo queste espressioni di  $P, Q$  nelle equazioni (7) a cui esse devono soddisfare, e ponendo al solito  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}'_2 + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2}{d\theta^2}$  si ottiene, annullando separatamente i termini indipendenti da  $\theta$  ed i coef-

<sup>(1)</sup> V. pag. 159.

ficienti di ogni  $\cos n\theta$ ,  $\sin n\theta$ , le equazioni:

$$(12) \quad A'_2 P_0 - \frac{P_0}{\varrho^2} = 0, \quad A'_2 Q_0 - \frac{Q_0}{\varrho^2} = 0;$$

$$(13) \quad \begin{cases} A'_2 g_n - \left( \frac{n^2 + 1}{\varrho^2} - n^2 a^2 \right) g_n = \frac{2n}{\varrho^2} l_n, \\ A'_2 l_n - \left( \frac{n^2 + 1}{\varrho^2} - n^2 a^2 \right) l_n = \frac{2n}{\varrho^2} g_n; \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} A'_2 h_n - \left( \frac{n^2 + 1}{\varrho^2} - n^2 a^2 \right) h_n = -\frac{2n}{\varrho^2} e_n; \\ A'_2 e_n - \left( \frac{n^2 + 1}{\varrho^2} - n^2 a^2 \right) e_n = -\frac{2n}{\varrho^2} h_n. \end{cases}$$

Di queste equazioni le (12) rientrano senz'altro nel tipo più sopra considerato; quindi è  $P_0 = 0$ ,  $Q_0 = 0$ ; dalle (13) si hanno poi le altre equazioni

$$A'_2 (g_n + l_n) + \left[ n^2 a^2 - \frac{(n+1)^2}{\varrho^2} \right] (g_n + l_n) = 0,$$

$$A'_2 (g_n - l_n) + \left[ n^2 a^2 - \frac{(n-1)^2}{\varrho^2} \right] (g_n - l_n) = 0,$$

le quali, rientrando nel tipo considerato, danno  $g_n + l_n = 0$ ,  $g_n - l_n = 0$ , quindi  $g_n = 0$ ,  $l_n = 0$ . Analogamente dalle (14) si ha pure  $h_n = 0$ ,  $e_n = 0$ , e quindi in conclusione in tutto lo spazio  $S$  si ha  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , come si voleva dimostrare.

Riepilogando: essendo  $P = 0$ ,  $Q = 0$  in tutto lo spazio  $S$  si possono alle relazioni (5), valevoli per i punti del piano  $z' = 0$ , sostituire le due relazioni

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} - \frac{dF_1}{d\varrho} + a \frac{d\lambda_1}{d\theta} = \frac{dF'}{d\varrho} - a \frac{d\lambda'}{d\theta}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{d\mu_1}{d|z'|} - \frac{1}{\varrho} \frac{dF_1}{d\theta} + a \frac{d\mu_1}{d\theta} = \frac{1}{\varrho} \frac{dF'}{d\theta} - a \frac{d\mu'}{d\theta} \end{cases}$$

valevoli in tutto lo spazio; il nostro problema è ora ridotto alla determinazione delle funzioni  $F_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ . aventi il comportamento qualitativo indicato e soddisfacenti alle (15) ed alle altre

$$(1) \quad \square F_1 = A_2 F_1 - a^2 \frac{d^2 F_1}{d\theta^2} = 0,$$

$$(2) \quad \begin{cases} A_2 \lambda_1 - a^2 \frac{d^2 \lambda_1}{d\theta^2} - \frac{\lambda_1}{\varrho^2} = \frac{2}{\varrho^2} \frac{d\mu_1}{d\theta}, \\ A_2 \mu_1 - a^2 \frac{d^2 \mu_1}{d\theta^2} - \frac{\mu_1}{\varrho^2} = -\frac{2}{\varrho^2} \frac{d\lambda_1}{d\theta}, \end{cases}$$

$$(3) \quad -a \frac{dF_1}{d\theta} + \frac{d\lambda_1}{d\varrho} + \frac{\lambda_1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu_1}{d\theta} = 0.$$

*Determinazione di  $F_1$ .* — Derivando la prima delle (15) rispetto a  $\varrho$  e sommandola con l'equazione stessa divisa per  $\varrho$  e con la seconda delle (15) derivata rispetto a  $\theta$  e divisa per  $\varrho$  si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{k}{2\pi} \frac{d}{d|z'|} \left\{ \frac{d\lambda_1}{d\varrho} + \frac{\lambda_1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu_1}{d\theta} \right\} - \\ & - \left\{ \frac{d^2 F_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF_1}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 F_1}{d\theta^2} \right\} + a \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{d\lambda_1}{d\varrho} + \frac{\lambda_1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu_1}{d\theta} \right\} = \\ & = \left\{ \frac{d^2 F'}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF'}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 F'}{d\theta^2} \right\} - a \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{d\lambda'}{d\varrho} + \frac{\lambda'}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\mu'}{d\theta} \right\}, \end{aligned}$$

quindi avendo riguardo alla (3) si ha per  $F_1$

$$\begin{aligned} & \frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 F_1}{d|z'|d\theta} - \left\{ \frac{d^2 F_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF_1}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 F_1}{d\theta^2} - a^2 \frac{d^2 F_1}{d\theta^2} \right\} = \\ & = \frac{d^2 F'}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dF'}{d\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 F'}{d\theta^2} - a^2 \frac{d^2 F'}{d\theta^2}. \end{aligned}$$

Questa equazione, dovendo  $F_1$  ed analogamente  $F'$  soddisfare anche alla (1), diviene

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 F_1}{d|z'|d\theta} + \frac{d^2 F_1}{d|z'|^2} = - \frac{d^2 F'}{d|z'|^2}.$$

Integrando rispetto a  $|z'|$  da un valore qualunque sino all'infinito, annullandosi i due membri per  $|z'| = \infty$  si ha

$$(16) \quad \frac{ak}{2\pi} \frac{dF_1}{d\theta} + \frac{dF_1}{d|z'|} = - \frac{dF'}{d|z'|}.$$

Da questa equazione è facile dedurre l'espressione di  $F_1$ ; nota questa, le (15) danno allora  $\lambda_1$  e  $\mu_1$ .

Poniamo

$$r^{\alpha, \beta} = \sqrt{\varrho^2 + R^2 + \left[ |z'| + d + \alpha + \frac{k}{2\pi} \beta \right]^2 - 2R\varrho \cos \left( \theta + ar^{\alpha, \beta} + \frac{ak}{2\pi} \alpha + a\beta \right)}$$

essendo  $\alpha, \beta$  due indeterminate, ed inoltre poniamo

$$F^{\alpha, \beta} = \frac{m}{r^{\alpha, \beta} - aR\varrho \sin \left( \theta + ar^{\alpha, \beta} + \frac{ak}{2\pi} \alpha + a\beta \right)};$$

avremo intanto

$$\begin{aligned} F^{0,0} &= \frac{m}{r^{0,0} - aR\varrho \sin(\theta + ar^{0,0})} = \frac{m}{r - aR\varrho \sin(\theta + ar)} = F', \\ (F^{\alpha,0})_{\alpha=\infty} &= \left[ \frac{m}{r^{\alpha,0} - aR\varrho \sin \left( \theta + ar^{\alpha,0} + \frac{ak}{2\pi} \alpha \right)} \right]_{\alpha=\infty} = 0, \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\square F^{\alpha, \beta} = A_2 F^{\alpha, \beta} - a^2 \frac{d^2 F^{\alpha, \beta}}{d\theta^2} = 0,$$

ciò che si riconosce subito ricordando che  $F'$  soddisfa alla  $\square F' = 0$ . Si ha poi

$$\frac{dF^{\alpha, 0}}{d\alpha} = \frac{ak}{2\pi} \frac{dF^{\alpha, 0}}{d\theta} + \frac{dF^{\alpha, 0}}{d|z'|},$$

quindi potendosi la (16) scrivere anche

$$(16') \quad \frac{ak}{2\pi} \frac{d}{d\theta} (F_1 + F') + \frac{d}{d|z'|} (F_1 + F') = \frac{ak}{2\pi} \frac{dF'}{d\theta},$$

si riconosce subito che la funzione

$$(17) \quad F_1 + F' = -\frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dF^{\alpha, 0}}{d\theta} d\alpha$$

soddisfa alla (16)'. Essa soddisfa anche alla  $\square (F_1 + F') = 0$ , si annulla all'infinito, è regolare per tutti i valori di  $\varrho, \theta, z'$ , avendo solo una discontinuità normale per  $z' = 0$ ; ci dà quindi la funzione cercata  $F_1$ . Infatti dovendo  $F_1$  soddisfare alla (16), posto

$$G = -\frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dF^{\alpha, 0}}{d\theta} d\alpha,$$

si dovrà avere

$$\begin{aligned} \frac{ak}{2\pi} \frac{dF_1}{d\theta} + \frac{dF_1}{d|z'|} &= -\frac{dF'}{d|z'|}, \\ \frac{ak}{2\pi} \frac{dG}{d\theta} + \frac{dG}{d|z'|} &= \frac{ak}{2\pi} \frac{dF'}{d\theta}, \end{aligned}$$

e quindi anche

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d}{d\theta} (F_1 + F' - G) + \frac{d}{d|z'|} (F_1 + F' - G) = 0$$

e perciò dovrà essere  $F_1 + F' - G$  una funzione arbitraria di  $\theta - \frac{ak}{2\pi}|z'|$ , che dovendo però soddisfare alla  $\square f = 0$  ed annullarsi all'infinito sarà quindi identicamente nulla; e ciò dimostra l'unicità della soluzione data dalla (17).

*Determinazione di  $\lambda_1$  e  $\mu_1$ .* — Noto  $F_1$  le (15) danno le funzioni  $\lambda_1$  e  $\mu_1$ ; si ha infatti per  $\lambda_1$

$$(18) \quad a \frac{d\lambda_1}{d\theta} + \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} = \frac{d}{d\varrho} (F_1 + F') - a \frac{d\lambda'}{d\theta},$$

della quale, posto

$$\lambda^\beta = a R F^{\alpha, \beta} \sin(\theta + a r^{\alpha, \beta} + a\beta),$$

essendo quindi

$$\begin{aligned} (\lambda^\beta)_{\beta=\infty} &= 0, \quad (\lambda^\beta)_{\beta=0} = \lambda', \\ \frac{d}{d\beta} &= a \frac{d}{d\theta} + \frac{k}{2\pi} \frac{d}{d|z'|}, \end{aligned}$$

si ha un integrale dato da

$$(19) \quad \lambda_1 = \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{d^2 F^{\alpha, \beta}}{d\varrho d\theta} d\beta + a \int_0^\infty \frac{d\lambda^\beta}{d\theta} d\beta$$

essendo  $F^{\alpha, \beta}$  l'espressione precedentemente definita. Infatti si ha

$$\begin{aligned} a \frac{d\lambda_1}{d\theta} + \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} &= \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left( a \frac{dF^{\alpha, \beta}}{d\theta} + \frac{k}{2\pi} \frac{dF^{\alpha, \beta}}{d|z'|} \right) d\beta + \\ + a \int_0^\infty \frac{d}{d\theta} \left( a \frac{d\lambda^\beta}{d\theta} + \frac{k}{2\pi} \frac{d\lambda^\beta}{d|z'|} \right) d\beta &= \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left( \frac{dF^{\alpha, \beta}}{d\beta} \right) d\beta + \\ + a \int_0^\infty \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\lambda^\beta}{d\beta} \right) d\beta &= \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} (-F^{\alpha, 0}) d\alpha + a \frac{d}{d\theta} (-\lambda^0) = \\ &= \frac{d}{d\varrho} (F_1 + F') - a \frac{d\lambda'}{d\theta}. \end{aligned}$$

Analogamente avendosi per  $\mu_1$  l'equazione

$$(20) \quad a \frac{d\mu_1}{d\theta} + \frac{k}{2\pi} \frac{d\mu_1}{d|z'|} = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\theta} (F_1 + F') - a \frac{d\mu'}{d\theta},$$

posto

$$\mu^\beta = a R F^{0, \beta} \cos(\theta + a r^{0, \beta} + a \beta),$$

essendo

$$(\mu^\beta)_{\beta=-\infty} = 0, \quad (\mu^\beta)_{\beta=0} = \mu',$$

si ha un integrale della (20) dato da

$$(21) \quad \mu_1 = \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{1}{\varrho} \frac{d^2 F^{\alpha, \beta}}{d\theta^2} d\beta + a \int_0^\infty \frac{d\mu^\beta}{d\theta} d\beta,$$

verificandosi questo nel modo sopra indicato per  $\lambda_1$ .

Le espressioni (19) e (21) determinate per  $\lambda_1, \mu_1$  soddisfanno, oltre che alle (15), anche a tutte le altre condizioni stabilite per esse; sono regolari per tutti i valori di  $\varrho, \theta, z'$ , avendo solo una discontinuità normale per  $z'=0$ ; si annullano all'infinito e soddisfanno al sistema di equazioni (2), ed inoltre, insieme ad  $F_1$ , alla (3), come si può facilmente verificare. Infatti, per rendere soddisfatta la prima delle (2), si dovrà avere

$$\begin{aligned} \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \left[ \mathcal{A}_2 \left( \frac{d^2 F^{\alpha, \beta}}{d\varrho d\theta} \right) - a^2 \frac{d^4 F^{\alpha, \beta}}{d\varrho d\theta^3} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 F^{\alpha, \beta}}{d\varrho d\theta} - \frac{2}{\varrho^2} \frac{d^3 F^{\alpha, \beta}}{d\theta^3} \right] d\beta + \\ + a \int_0^\infty \left[ \mathcal{A}_2 \left( \frac{d\lambda^\beta}{d\theta} \right) - a^2 \frac{d^3 \lambda^\beta}{d\theta^3} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{d\lambda^\beta}{d\theta} - \frac{2}{\varrho^2} \frac{d^2 \mu^\beta}{d\theta^2} \right] d\beta = 0 \end{aligned}$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left[ \mathcal{A}_2 F^{\alpha, \beta} - a^2 \frac{d^2 F^{\alpha, \beta}}{d\theta^2} \right] d\beta + \\ + a \int_0^\infty \frac{d}{d\theta} \left[ \mathcal{A}_2 \lambda^\beta - a^2 \frac{d^2 \lambda^\beta}{d\theta^2} - \frac{\lambda^\beta}{\varrho^2} - \frac{2}{\varrho^2} \frac{d\mu^\beta}{d\theta} \right] d\beta = 0, \end{aligned}$$

il che si riconosce, osservando che  $F^{\alpha,\beta}$ ,  $\lambda^\beta$ ,  $\mu^\beta$  soddisfanno alle stesse equazioni a cui soddisfanno  $F'$ ,  $\lambda'$ ,  $\mu'$  cioè alle (1), (2), (3).

Come alla prima delle (2), si riconosce in modo simile che le espressioni trovate per  $F_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  soddisfanno anche alla seconda delle (2) ed alla (3). Esse sono inoltre le uniche soddisfacenti a tutte le condizioni del problema. Infatti procedendo come si è fatto per la  $F_1$ , si riconosce che le espressioni di  $\lambda_1$  e  $\mu_1$  non possono differire dalle (19) e (21) che per funzioni arbitrarie di  $\frac{k}{2\pi}\theta - \alpha|z'|$ ; queste, dovendo soddisfare al sistema (2) ed annullarsi all'infinito, sono perciò identicamente nulle.

Determinati così completamente i potenziali  $F_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ , le componenti delle forze elettromagnetiche del campo che si considera sono:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} (H) &= -\frac{dF}{d\rho} + a\frac{d\lambda}{d\theta} - \frac{dF_1}{d\rho} + a\frac{d\lambda_1}{d\theta} = H + H_1, \\ (K) &= -\frac{1}{\rho}\frac{dF}{d\theta} + a\frac{d\mu}{d\theta} - \frac{1}{\rho}\frac{dF_1}{d\theta} + a\frac{d\mu_1}{d\theta} = K + K_1, \\ (Z') &= -\frac{dF}{dz'} - \frac{dF_1}{dz'} = Z' + Z'_1; \end{aligned} \right.$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} (E) &= \frac{d\mu}{dz'} + \frac{d\mu_1}{dz'} = E + E_1, \\ (G) &= -\frac{d\lambda}{dz'} - \frac{d\lambda_1}{dz'} = G + G_1, \\ (N') &= \frac{1}{\rho}\frac{d\lambda}{d\theta} - \frac{d\mu}{d\rho} - \frac{\mu}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{d\mu_1}{d\rho} - \frac{\mu_1}{\rho} = N' + N'_1, \end{aligned} \right.$$

essendo  $H, K, \dots N'$  le componenti delle forze elettromagnetiche del campo generato dalla carica quando non si ha il piano conduttore.

4. Le espressioni determinate per  $F_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  mostrano facilmente che, finchè è  $k > 0$ , esse sono funzioni che si comportano regolarmente anche per valori di  $\alpha$  piccolissimi; d'altra parte l'ipotesi  $k > 0$  è quella che si verifica sempre nelle condizioni sperimentali ordinarie, essendo  $k$  un trentesimo della resistenza dell'unità di superficie del piano conduttore espressa in ohm, quindi un numero generalmente piccolo ma diverso da zero.

Le funzioni  $F_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  si possono quindi sviluppare secondo le potenze di  $\alpha$ , per  $\alpha$  assai piccolo; consideriamo il caso che della  $\alpha = A\omega$  si possano trascurare le potenze superiori alla prima. Comparendo in  $F_1 + F'$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  come fattore la  $\alpha$ , si può porre allora  $\alpha = 0$  nell'espressione che comparisce come fattore della  $\alpha$ . Si ottiene allora

$$r^{\alpha,\beta} = \sqrt{\rho^2 + R^2 + \left[|z'| + d + \alpha + \frac{k}{2\pi}\beta\right]^2 - 2R\rho \cos \theta},$$

$$F^{\alpha,\beta} = \frac{m}{r^{\alpha,\beta}},$$

$$\lambda^\beta = 0, \quad \mu^\beta = 0$$

quindi si ha più semplicemente

$$(24) \begin{cases} F_1 + F' = -\frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dF^{\alpha,0}}{d\theta} d\alpha, \\ \lambda_1 = \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{d^2 F^{\alpha,\beta}}{d\varrho d\theta} d\beta; \mu_1 = \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{1}{\varrho} \frac{d^2 F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2} d\beta \end{cases}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} B &= \varrho^2 + R^2 - 2R\varrho \cos \theta + [z' + d]^2, \\ D &= |z'| + d, \end{aligned}$$

si ricava

$$F_1 + F' = -\frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d}{d\theta} \left( \frac{m}{1/B + 2D\alpha + \alpha^2} \right) d\alpha = \frac{mak}{2\pi} \cdot \frac{R\varrho \sin \theta}{1/B(1/B + D)},$$

il che ci permette di determinare senz'altro le componenti delle forze elettriche, giacchè nelle (22) devono essere trascurati i termini  $a \frac{d\lambda}{d\theta} + a \frac{d\lambda_1}{d\theta}$ ,  $a \frac{d\mu}{d\theta} + a \frac{d\mu_1}{d\theta}$  che sono di secondo grado in  $a$ . Per avere anche le componenti delle forze magnetiche è conveniente procedere al calcolo diretto di  $\frac{d\lambda_1}{d|z'|}$ ,  $\frac{d\mu_1}{d|z'|}$ ,  $\frac{1}{\varrho} \frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{d\mu_1}{d\varrho} - \frac{\mu_1}{\varrho}$  in luogo delle  $\lambda_1$  e  $\mu_1$ .

Si ha intanto, per le (24),

$$\frac{d\lambda_1}{d|z'|} = \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left( \frac{dF^{\alpha,\beta}}{d|z'|} \right) d\alpha,$$

ma essendo  $\frac{d}{d|z'|} = \frac{d}{d\alpha}$ , sarà anche

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{d|z'|} &= \frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left[ \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{r^{\alpha,\beta}} \right) \right] d\alpha = -\frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left( \frac{1}{r^{\alpha,\beta}} \right) d\beta \\ &= -\frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left( \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2R\varrho \cos \theta + [z' + d + \frac{k}{2\pi} \beta]^2}} \right) d\beta \\ &= -\frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d^2}{d\varrho d\theta} \left( \frac{1}{\sqrt{B + 2D \cdot \frac{k}{2\pi} \beta + \left( \frac{k}{2\pi} \beta \right)^2}} \right) d\beta \end{aligned}$$

avendo B e D le precedenti espressioni. Si ottiene allora

$$(25) \quad \frac{d\lambda_1}{d|z'|} = ma \frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{R\varrho \sin \theta}{1/B(1/B + D)} \right].$$

Analogamente, avendosi

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_1}{d|z'|} &= \frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty \frac{1}{\varrho} \frac{d^2}{d\theta^2} \left[ \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{r^{\alpha,\beta}} \right) \right] d\alpha = - \frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\varrho} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r^{0,\beta}} \right) d\beta \\ &= - \frac{mak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\varrho} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{\sqrt{B + 2D \frac{k}{2\pi} \beta + \left( \frac{k}{2\pi} \beta \right)^2}} \right) d\beta, \end{aligned}$$

si ottiene

$$(26) \quad \frac{d\mu_1}{d|z'|} = ma \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{R\varrho \sin \theta}{\sqrt{B}(\sqrt{B} + D)} \right].$$

Si ha poi finalmente

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varrho} \frac{d\lambda_1}{d\theta} - \frac{d\mu_1}{d\varrho} - \frac{\mu_1}{\varrho} = \\ &= \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{d^3 F^{\alpha,\beta}}{d\varrho d\theta^2} - \frac{d}{d\varrho} \left( \frac{1}{\varrho} \frac{d^2 F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2} \right) - \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 F^{\alpha,\beta}}{d\theta^2} \right] d\beta = 0, \end{aligned}$$

quindi, osservando che è  $\frac{d}{dz'} = \pm \frac{d}{d|z'|}$  secondochè  $z' \geq 0$ , le componenti delle forze elettromagnetiche dovute all'induzione sul piano conduttore  $\sigma$  sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = - \frac{dF_1}{d\varrho}, \\ K_1 = - \frac{1}{\varrho} \frac{dF_1}{d\theta}, \\ Z'_1 = - \frac{dF_1}{dz'}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = ma \frac{1}{\varrho} \frac{d\chi}{d\theta}, \\ G_1 = - ma \frac{d\chi}{d\varrho}, \\ N'_1 = 0, \end{array} \right.$$

per  $z' > 0$ , avendo posto

$$\chi = \frac{R\varrho \sin \theta}{\sqrt{B}(\sqrt{B} + D)}, \quad F_1 = - \frac{m}{\sqrt{B}} + \frac{mak}{2\pi} \chi;$$

e per  $z' < 0$  sono invece

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = - \frac{dF_1}{d\varrho}, \\ K_1 = - \frac{1}{\varrho} \frac{dF_1}{d\theta}, \\ Z'_1 = - \frac{dF_1}{dz'}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = - ma \frac{1}{\varrho} \frac{d\chi}{d\theta}, \\ G_1 = ma \frac{d\chi}{d\varrho}, \\ Z'_1 = 0. \end{array} \right.$$

Riferiamoci ora agli assi mobili  $O'x'y'z'$  ed alle variabili  $x', y', z'$ : indicando le componenti delle forze elettromagnetiche totali relative a questi assi con  $(X'), (Y'), (Z'); (L'), (M'), (N')$ , e ricordando che si ha

$$\left\{ \begin{array}{ll} (X') = (H) \cos \theta - (K) \sin \theta, & (L') = (E) \cos \theta - (G) \sin \theta, \\ (Y') = (H) \sin \theta + (K) \cos \theta, & (M') = (E) \sin \theta + (G) \cos \theta, \\ (Z') = (Z); & (N') = (N), \end{array} \right.$$

ed inoltre

$$\frac{d}{dx'} = \cos \theta \frac{d}{d\rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{d}{d\theta}; \quad \frac{d}{dy'} = \sin \theta \frac{d}{d\rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{d}{d\theta},$$

si ottengono per le forze elettromagnetiche le espressioni seguenti:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X') = -\frac{d}{dx'} \{ F + F_1 \}, \\ (Y') = -\frac{d}{dy'} \{ F + F_1 \}, \\ (Z') = -\frac{d}{dz'} \{ F + F_1 \}; \end{array} \right. \quad (28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (L') = L' \pm ma \frac{d\chi}{dy'}, \\ (M') = \mp ma \frac{d\chi}{dx'}, \\ (N') = N', \end{array} \right.$$

secondo che è  $z' \geq 0$ . In queste formole si ha, ricordando le espressioni di  $F, L', N'$  date nella Nota precedente

$$F = \frac{m}{\sqrt{(x' - R)^2 + y'^2 + (z' - d)^2}},$$

$$L' = aR \frac{dF}{dz'}, \quad N' = -aR \frac{dF}{dx'},$$

ed inoltre

$$\chi = \frac{Ry'}{\sqrt{B}(\sqrt{B} + D)}, \quad F_1 = -\frac{m}{\sqrt{B}} + \frac{mak}{2\pi} \chi$$

essendo

$$\sqrt{B} = \sqrt{(x' - R)^2 + y'^2 + [z' + d]^2},$$

$$D = |z'| + d.$$

Consideriamo in particolare i punti al di là del piano conduttore e per i quali è  $z' < 0$ . Avendosi allora  $F = \frac{m}{\sqrt{B}}$  le componenti della forza elet-

trica totale derivano dal potenziale  $\frac{mak}{2\pi} \chi$ ; la forza magnetica di induzione

avendo per componenti  $-ma \frac{d\chi}{dy'}$ ,  $ma \frac{d\chi}{dx'}$ , 0 è, come sempre, parallela al piano conduttore ed inoltre normale alla proiezione della forza elettrica sul piano conduttore  $z' = 0$ . Per i punti M situati sulla normale al piano conduttore  $\sigma$ , condotta dalla posizione  $m$  della carica  $m$  ed al disotto del piano stesso, si ha:

$$(X') = 0, \quad (Y') = -\frac{mak}{2\pi} \cdot \frac{R}{2(z' - d)^2}, \quad (Z') = 0$$

$$(L') = L' - \frac{maR}{2[|z'| + d]^2}, \quad (M') = 0, \quad (N') = N'$$

quindi essendo

$$\frac{1}{(z' - d)^2} = \frac{1}{[|z'| + d]^2} = \frac{1}{Mm^2}$$

ed inoltre

$$L' = \frac{amR}{Mm^2}, \quad N' = 0,$$

per i punti M le componenti delle forze elettromagnetiche divengono

$$(X') = 0, \quad (Y') = -\frac{mak}{4\pi} \cdot \frac{1}{Mm^2}, \quad (Z') = 0,$$

$$(L') = \frac{maR}{2} \cdot \frac{1}{Mm^2}, \quad (M') = 0, \quad (N') = 0.$$

Quando invece non si ha il piano conduttore, le componenti delle forze elettromagnetiche sono:

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = -\frac{m}{Mm^2},$$

$$L' = maR \frac{1}{Mm^2}, \quad M' = 0, \quad N' = 0.$$

Si può quindi concludere che per i punti M, al di sotto del piano conduttore  $\sigma$ , si ha: « La forza elettrica è inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $Mm$  ed opposta direttamente alla convezione.

La forza magnetica è pure inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $Mm$ , e diretta, rispetto alla traiettoria della carica  $m$ , secondo la regola di Ampère. Il suo rapporto con la forza magnetica che si ha nei punti M, quando manca il piano conduttore (con l'approssimazione considerata), è uguale ad  $\frac{1}{2}$  ».

A risultati analoghi è pervenuto il prof. Levi-Civita<sup>(1)</sup> nel caso del campo elettromagnetico generato dalla carica in moto di traslazione uniforme.

**Matematica.** — *Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti.* Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

**Matematica.** — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* Nota di MICHELE DE FRANCHIS, presentata dal Corrispondente E. CASTELNUOVO.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) Vedi mem. cit. pag. 42. Si avverta che io ho qui tenuto conto soltanto dei termini in  $a$ , riguardando  $k$  come un parametro finito. In quest'ordine di approssimazione sono evidentemente trascurabili i termini in  $\frac{a^2}{k^2}$ . Per fare il confronto colle espressioni, assegnate dal Levi-Civita nel caso del moto traslatorio, conviene porre nelle sue formule  $k = 0$ . Il fattore di riduzione per la forza magnetica risulta allora eguale ad  $\frac{1}{2}$ , come nel caso presente.

**Matematica.** — *Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una Nota. dello stesso titolo di questa (Rendiconti Lincei, 1900) il prof. Bianchi costruisce una funzione armonica in tutto lo spazio iperbolico, quando ne siano prefissi i valori all'infinito. Egli usa a tal uopo di rappresentazioni conformi di spazi non euclidei. Non sarà forse privo d'interesse il vedere che lo stesso problema si può risolvere con mezzi assai più elementari: tanto più che così si vedrà meglio perchè il singolare metodo del prof. Bianchi conduca effettivamente alla risoluzione del problema. Indichiamo con  $x, y, z$  coordinate cartesiane ortogonali; e siano  $R, a$  due costanti; poniamo l'elemento lineare uguale a

$$(1) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\{R^2 - [(x-a)^2 + y^2 + z^2]\}^2}$$

Esso è l'elemento lineare della metrica iperbolica, di cui la sfera  $S$  di centro  $(a, 0, 0)$  e di raggio  $R$  rappresenta l'assoluto. Facciamo ora l'inversione per raggi vettori reciproci

$$x = \frac{x'}{\rho'^2} \quad y = \frac{y'}{\rho'^2} \quad z = \frac{z'}{\rho'^2} \quad \text{dove } \rho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Avremo, (sostituendo in (1))

$$ds^2 = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{[(R^2 - a^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2ax' - 1]^2}$$

dove, come facilmente si verifica, il denominatore rappresenta appunto il quadrato dell'equazione della sfera trasformata di  $S$ . Da ciò si deduce in particolare:

*Una inversione per raggi vettori reciproci trasforma le funzioni armoniche della metrica definita considerando una sfera  $S$  come assoluto nelle funzioni armoniche della metrica definita considerando come assoluto la trasformata di  $S$ .*

E allora un metodo ben noto permette di risolvere subito il nostro problema. Sia data su  $S$  una catena di valori  $U$  e sia  $P$  un punto interno alla

sfera in cui si voglia calcolare il valore di una funzione armonica entro  $S$  (nella metrica definita da  $S$ ) e che al contorno di  $S$  prenda i valori  $U$ . Presa come origine degli assi il centro  $O$  di  $S$  sia  $\rho$  il raggio vettore  $OP$  e sia  $\gamma$  l'angolo che un raggio  $OA$  forma con  $OP$ . Se noi facciamo un'inversione per raggi vettori reciproci col polo nel punto  $Q$  immagine di  $P$ , il trasformato  $P'$  di  $P$  sarà il centro della sfera  $S'$  trasformata di  $S$ . Siano  $A, A'$  due punti corrispondenti generici di  $S, S'$ ;  $d\sigma, d\sigma'$  gli elementi di area (euclidea) di due elementi corrispondenti di  $S, S'$ ; sia  $\gamma'$  l'angolo che  $P'A'$  forma con  $P'P$  scelto in modo di essere crescente con  $\gamma$ ; sia  $R'$  il raggio di  $S'$ . Immaginiamo una catena di valori  $U'$  su  $S'$  definita dalla  $U'(A') = U(A)$ . Per il teorema precedente il valore della funzione incognita in  $P$  è uguale al valore in  $P'$  di una funzione armonica in  $S'$  nella metrica definita da  $S'$  come assoluto e che al contorno di  $S'$  prende i valori  $U'$ . Essa per teoremi noti sarà la media (euclidea) dei valori  $U'$ ; il valore cercato è perciò:

$$(\alpha) \quad \frac{1}{4\pi R'^2} \int U' d\sigma' = \frac{1}{4\pi R'^2} \int U \frac{d\sigma'}{d\sigma} d\sigma$$

Ora evidentemente:

$$\frac{R^2}{R'^2} \frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{d(\cos \gamma')}{d(\cos \gamma)}$$

Perciò  $(\alpha)$  diventa:

$$(\beta) \quad \frac{1}{4\pi R^2} \int U \frac{d(\cos \gamma')}{d(\cos \gamma)} d\sigma$$

Nel triangolo  $APQ$  è:

$$A(P)Q = \pi - \gamma'$$

donde:

$$(\gamma) \quad PQ^2 = AP^2 + AQ^2 + 2AP \cdot AQ \cos \gamma'$$

Poichè  $\frac{AP}{AQ} = \frac{\rho}{R}$ ;  $PQ = OQ - OP$ ;  $AP^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma$ ;  $OP = \rho$ .

$OP \cdot OQ = R^2$  la  $(\gamma)$  diventa:

$$\frac{(R^2 - \rho^2)^2}{\rho^2} = \left[ 1 + 2 \frac{\rho}{R} \cos \gamma' + \frac{\rho^2}{R^2} \right] \left[ R^2 + \frac{R^4}{\rho^2} - 2 \frac{R^3}{\rho} \cos \gamma \right]$$

donde:

$$\frac{d(\cos \gamma')}{d(\cos \gamma)} = \frac{(R^2 - \rho^2)^2}{[R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \gamma]^2}$$

e quindi ( $\beta$ ) diventa:

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma} U \frac{(R^2 - \varrho^2)^2}{[R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho \cos \gamma]^2} d\sigma$$

che ci dà il valore cercato nel punto P e che è appunto la formula stessa del prof. Bianchi. Il teorema della media usato in questa ricerca si deduce facilmente dal teorema di Gauss per una sfera dello spazio iperbolico, quando questa sfera tende all'assoluto.

Infatti noi sappiamo che anche nello spazio iperbolico il valore di una funzione  $u$  armonica in un punto  $O_1$  è dato da:

$$u(O_1) = \frac{1}{4\pi} \int u d\sigma$$

dove  $u$  rappresenta la catena dei valori di detta funzione su una sfera qualunque di centro  $O_1$ , e  $d\sigma$  indica l'angolo solido, sotto cui è visto da  $O_1$  l'elemento corrispondente della sfera stessa. Se noi passiamo ora a una rappresentazione conforme dello spazio iperbolico su uno spazio euclideo, in modo che il punto O immagine di  $O_1$  divenga centro della sfera S immagine dell'assoluto, la formula corrispondente continua a valere, perchè le sfere col centro in  $O_1$  sono mutate in sfere col centro in O, e gli angoli solidi col centro in  $O_1$  restano mutati in angoli solidi equivalenti di vertice O. Basta ora far tendere la sfera, su cui si considerano i valori  $u$ , alla sfera G immagine dell'assoluto, per avere il nostro risultato. Di più si vede che la usata inversione per raggi vettori reciproci corrisponde, nello spazio iperbolico, a considerare l'assoluto come limite delle sfere che hanno per centro l'immagine di P anzichè di quelle che hanno per centro il punto  $O_1$  immagine di O. Ecco la intima ragione su cui riposa il successo del nostro metodo, e di quello del prof. Bianchi, che, com'è ora ben chiaro, si riduce nella sua intima essenza al precedente. E di più se ne ricava un altro mezzo per risolvere il nostro problema anche senza uscire dallo spazio iperbolico.

**Fisica.** — *Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica.* Nota di ALESSANDRO ARTOM, presentata dal Corrispondente GUIDO GRASSI.

1. I metodi attualmente conosciuti per produrre raggi di forza elettrica a polarizzazione rotatoria si basano sulle analoghe esperienze di ottica, cioè sui fenomeni di riflessione metallica, di riflessione totale, di rifrazione doppia.

Il prof. Righi <sup>(1)</sup> ottenne per primo nel 1893 raggi a polarizzazione ellittica mediante riflessione da lastre metalliche di raggi di forza elettrica

<sup>(1)</sup> A. Righi, *L'ottica delle oscillazioni elettriche*.

e più tardi Zehnder <sup>(1)</sup> li ottenne servendosi di reticoli metallici incrociati. Così pure tali fenomeni furono constatati quando raggi di forza elettrica attraversavano grosse tavole di legno, o cristalli, od un fascio di fibre di juta, dal Righi, dal Garbasso, dal Bose.

2. Le oscillazioni elettriche essendo ormai entrate nel campo delle applicazioni, mi parve utile il cercare una disposizione sperimentale che permettesse la produzione diretta di raggi di forza elettrica a polarizzazione ellittica o circolare.

I metodi a cui ho sommariamente accennato, male si adattano invero per oscillazioni a grande lunghezza d'onda. Per ottenere vibrazioni ellittiche coi fenomeni della rifrazione doppia, occorre ad esempio <sup>(2)</sup> che i raggi a vibrazioni rettilinee di lunghezza d'onda di circa cm. 10,7 attraversassero tavole di abete dello spessore di cm. 13,7.

In queste condizioni l'energia elettrica e la magnetica delle vibrazioni emergenti riesce così diminuita, da non potere generalmente constatare tutte le proprietà fisiche che la teoria prevede per tali onde, così gli effetti dei campi ruotanti ad un tempo elettrici e magnetici.

3. Il metodo che forma oggetto della presente Nota, si basa sulla composizione di due oscillazioni elettriche ortogonali, di uguale ampiezza, di ugual frequenza, e spostate fra di loro di un quarto di periodo.

Il prof. Righi <sup>(3)</sup> ha infatti analiticamente dimostrato che la composizione di due oscillazioni elettriche, le quali soddisfacciano alle condizioni sovra esposte, deve dar luogo alla produzione di oscillazioni a polarizzazione rotatoria, e più precisamente, quando le condizioni teoriche sono perfettamente raggiunte, devono aversi raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare nella direzione dell'asse di simmetria normale al piano in cui si compiono le oscillazioni elettriche.

Basandomi sopra tale teorema di analisi, mi sono proposto di produrre direttamente le onde a polarizzazione rotatoria, il che finora non era stato ottenuto.

Ho perciò applicato a questa ricerca una delle proprietà dei circuiti percorsi da corrente alternativa che serve per la produzione dei campi magnetici rotanti: dimostrerò in seguito che tale proprietà può con sufficiente approssimazione estendersi al caso dei circuiti percorsi dalle correnti oscillatorie.

Si abbiano due tratti MN, NP (fig. 1) di uno stesso circuito percorso da corrente alternativa. Si può fare in modo che i due tratti MN ed NP

<sup>(1)</sup> L. Zehnder, Wied. Annalen, 1894.

<sup>(2)</sup> A. Righi, loc. cit.

<sup>(3)</sup> A. Righi, loc. cit.

siano percorsi da correnti di stessa intensità efficace  $I_a = I_b$ , ma spostate di fase di  $\frac{\pi}{2}$  col disporre in parallelo colla seconda spirale NP un condensatore C il cui valore dipende dagli elementi elettrici del circuito.

Sono notorie le condizioni analitiche perchè tale risultato sia conseguito <sup>(1)</sup>. Indichiamo infatti con  $I_a, I_b, I_c$  le intensità efficaci delle correnti

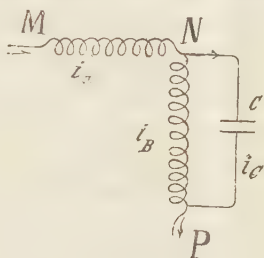


FIG. 1.

nei tratti MN, NP, NCP, con V la differenza di potenziale agli estremi di NP e costruiamo la rappresentazione vettoriale (fig. 2). Se con OV si

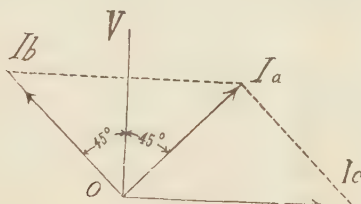


FIG. 2.

rappresenta la differenza di potenziale efficace V, la  $I_c$  dovrà essere rappresentata con un segmento  $I_c$  condotto in precedenza di  $90^\circ$  e di valore  $2\pi nCV$ . Avremo:

$$I_b = \frac{V}{\sqrt{r_2^2 + 4\pi^2 n^2 L_2^2}}$$

se  $r_2, L_2$  sono la resistenza ohmica e l'autoinduzione competente al tratto NP. La  $I_b$  sarà inoltre in ritardo per effetto dell'autoinduzione rispetto a V del-

<sup>(1)</sup> L. Lombardi, *Lezioni di elettrotecnica*.

l'angolo:

$$\operatorname{arctg} \frac{2\pi n L_2}{r_2}.$$

Se

$$(1) \quad 2\pi n L_2 = r_2$$

quest'angolo è di  $45^\circ$ .

Dalla figura si vede ancora che la  $I_a$  risultante di  $I_b, I_c$ , diventerà in valore efficace eguale alla  $I_b$  e sarà spostata di  $90^\circ$  rispetto ad essa quando:

$$I_c = 2I_b \cos 45^\circ$$

ossia allorchè:

$$2\pi n C V = \frac{2V}{\sqrt{r_2^2 + 4\pi^2 n^2 L_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

od anche per la (1) quando:

$$(2) \quad 4\pi^2 n^2 L_2 C = 1$$

Per la (2) il circuito NCP deve soddisfare alle condizioni di sincronismo o di risonanza. Soddisfacendo alle (1) e (2), il campo prodotto dalle  $I_a$  ed  $I_b$  è un campo rotante se i flussi da esse prodotti sono ortogonalmente disposti.

4. Siano ora M, N, P tre conduttori di scarica disposti sopra i vertici di un triangolo rettangolo a cateti uguali ed appartenenti ad uno stesso circuito di scarica di un rocchetto di induzione o di una macchina elettrostatica (fig. 3).

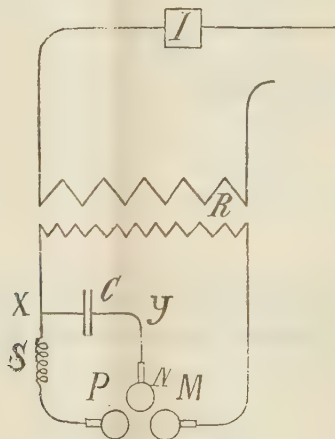


FIG. 3.

Se ammettiamo, come generalmente si ritiene per semplificazione di calcolo, che la scarica possa essere rappresentata da legge sinusoidale, noi potremo per analogia con quanto sopra si disse, far in modo che le oscillazioni

che si compiono fra MN, NP abbiano ugual ampiezza e siano spostate di fase di  $90^\circ$  soddisfacendo alle sopraccennate condizioni (1) e (2), le quali, come si dimostrerà, possono estendersi al caso delle correnti di scarica.

Si disponga infatti anche qui in parallelo colla NP una capacità C ed in serie una autoinduzione S. La relazione (2) è quella stessa che serve per le scariche oscillatorie, quindi può legittimamente ad esse applicarsi.

La condizione rappresentata dalla (1), se ha grande importanza nel caso di correnti alternative industriali, qui deve ridursi ad avere minima importanza, soprattutto perchè la scarica fra i conduttori N e P si mantenga oscillatoria. Infatti conviene qui far in modo che il valore di  $r_2$  sia per la maggior parte rappresentato dalla resistenza ohmica della scintilla, la quale nelle condizioni ordinarie si mantiene sui 0,80 ohm (1). Il valore di  $L_2 = \frac{r_2}{2\pi n}$  per frequenze altissime risulterà pure piccolissimo.

L'impiego della (1) può quindi farsi con buona approssimazione anche se la legge della scarica differisce dalla sinusoidale.

Soddisfacendo quindi alle (1) e (2) le quali ci aiutano nel porre in proporzione gli elementi del circuito, noi veniamo a porre in presenza, e quindi a trovarci nelle condizioni richieste dalla teoria, due scariche di uguale ampiezza (se si adattano bene gli elementi del circuito ritenendo che C ed  $L_2$  risultano generalmente di piccolo valore) delle quali l'una MN può considerarsi dovuta ad un circuito primario di oscillatore, l'altra NP può considerarsi provenire da un risonatore perfettamente accordato (2).

5. Mi proposi di verificare se il campo prodotto da queste due oscillazioni elettriche possedeva le proprietà che la teoria gli attribuisce e fondai le ricerche sui due criterî seguenti procurando di riconoscere:

1°) se in questo campo si manifestavano gli effetti dei campi magnetici od elettrici rotanti previsti dalla teoria del prof. Righi;

2°) se le scintille di risonatori rettilinei mantenevano le intensità secondo le leggi delle vibrazioni ellittiche o circolari facendo rotare i risonatori nei diversi azimut.

Entrambe le verifiche sperimentali furono eseguite con risultato assai netto e positivo. Sugli effetti dovuti a campi magnetici rotanti limitai per ora i tentativi di verifica all'osservare le correnti indotte in questo campo sopra dei solenoidi in esso sospesi in varie direzioni.

Non estesi per ora le mie ricerche a constatare effetti meccanici rotatori sopra piccoli cilindri metallici, perchè notoriamente gli effetti della isteresi magnetica si annullano per altissime frequenze.

(1) A. Battelli e L. Magri, *Sulle scariche oscillatorie*.

(2) Le condizioni sperimentali possono essere anche meglio raggiunte aggiungendo due sfere ausiliarie collegate cogli estremi del secondario del rocchetto: i conduttori M, N, P rimangono così isolati dai detti estremi.

Furono invece nettamente riconosciuti gli effetti dei campi elettrici rotanti. Disposte nelle vicinanze, anzi con campi abbastanza alti prodotti da un buon rocchetto alimentato ad 80 volt e 5 ampère circa e con interruttore Wehnelt o di altro tipo, anche a distanza di venti o trenta cm. dall'oscillatore, delle leggere campanelle di vetro appoggiate sopra finissime punte pure di vetro, esse prendono a rotare. Per veder meglio il fenomeno può convenire scegliere forme particolari di conduttori di scarica, così orientati da evitare che avvengano scariche parassite fra i conduttori estremi M, P.

Se si invertono le comunicazioni in modo da avere il circuito risonatore fra MN invece che fra NP, le campanelle assumono rotazione in senso contrario. Questa proprietà dell'invertirsi del senso di rotazione, nettamente distingue i fenomeni dovuti a questa particolare disposizione di circuito da altri fenomeni rotatori di carattere non ben definito prodotti dalle scintille.

La rotazione delle campanelle si rende pure evidente quando esse vengono coperte o racchiuse entro recipienti di vetro o di sostanza isolante.

La rotazione era pure avvertita con piccoli cilindri costituiti di una miscela di paraffina e limatura di ferro al 10 % circa.

L'esperienza riesce assai netta, come prova dell'esistenza di un campo elettrico rotante<sup>(1)</sup>, scegliendo per piano delle scintille il piano orizzontale ed osservando la rotazione delle campanelle, che preferibilmente possono essere collocate in piani più bassi di quello dell'oscillatore, attorno ad assi verticali. Con questa disposizione quindi possono essere constatate le rotazioni elettrostatiche dei dielettrici sotto l'azione di campi rotanti di alta frequenza.

6. Se si fanno rotare risonatori rettilinei attorno ai diversi assi, si nota la persistenza delle scintille. La verifica fu particolarmente eseguita facendo rotare i risonatori attorno all'asse di simmetria condotto normalmente al piano delle scintille. Anzi, coll'aiuto di reticoli analizzatori e di risonatori, si riesce a paragonare le ampiezze delle due oscillazioni.

7. Il fenomeno fu verificato nelle sue linee generali in un lunghissimo periodo di esperienze.

Tenendo conto dello spegnimento delle oscillazioni, è naturale il ritenere che il campo elettromagnetico prodotto da questa particolare disposizione di oscillatore risulti assai complesso.

Però coll'aggiunta di antenne o conduttori aerei può essere conferita al campo maggior regolarità pel fatto che è possibile coll'adottare due antenne di ugual lunghezza di produrre onde sensibilmente di ugual lunghezza.

Di più la disposizione è di grande importanza nelle segnalazioni elettromagnetiche attraverso allo spazio<sup>(2)</sup>.

(1) R. Arnò, R. Acc. dei Lincei, 1892.

(2) Questa disposizione è protetta da brevetti di privativa in Italia 1° ottobre 1902 e presso le principali nazioni.

Si congiungano o direttamente, oppure coll'intermediario di rocchetti di mutua induzione, rispettivamente le sfere M ed N con due conduttori o meglio con due sistemi di conduttori aerei di ugual lunghezza le cui direzioni stiano fra loro a  $90^\circ$ . Con questa posizione rispettiva, non sono anzi tutto a temersi sensibilmente gli effetti di annullamento delle azioni a distanza per induzione mutua fra i due conduttori.

Per le condizioni sovra esposte i due conduttori aerei ortogonali fra loro diventano sede di oscillazioni di ugual ampiezza e spostate di  $\frac{\pi}{2}$ .

La composizione di queste due oscillazioni darà quindi luogo alla generazione di onde elettromagnetiche a polarizzazione rotatoria, od ancora in altri termini, alla produzione di campi rotanti ad un tempo elettrici e magnetici, fra i quali saranno circolari quelli che si propagano nella direzione dell'asse di simmetria passante pel punto di concorso delle due antenne e normale al piano di esse.

Questa disposizione di circuito oscillatore è suscettibile di maggior generalità, perchè come è noto si potrebbero ottenere campi rotanti anche, pur essendo uguali le ampiezze, se la differenza di fase fosse  $\varphi$  invece di  $\frac{\pi}{2}$ .

Basterà disporre le antenne in modo che fra loro facciano angolo di  $\pi - \varphi$  per produrre ancora oscillazioni a polarizzazione rotatoria.

8. La disposizione di circuito oscillatore descritta in questa Nota parmi potrà pure essere di utile contributo nella soluzione del problema della costruzione di apparecchi sintonici. È infatti possibile scegliere per ciascuna stazione le quantità caratteristiche C ed  $L_2$ . Anzi con queste disposizioni due altri elementi fisici potrebbero essere assunti:

1°) la differenza di fase fra le due oscillazioni col variare il valore di  $L_2$ ;

2°) la differenza di lunghezza d'onda entro certi limiti delle due oscillazioni col fare le aste di lunghezza diversa.

Quest'applicazione del principio del campo rotante ai circuiti percorsi da oscillazioni elettriche, parmi pure potrebbe utilmente servire per esperimenti didattici e possa essere feconda di applicazioni pratiche <sup>(1)</sup>.

Mi reco a dovere di porgere al prof. Guido Grassi, Direttore della Scuola elettrotecnica Galileo Ferraris, i più sentiti ringraziamenti per i sapienti consigli di cui mi ha così cortesemente onorato nel corso di queste ricerche.

(1) Questa disposizione, completata da particolari costruttivi che la pratica ha suggerito, fu sperimentata nel Golfo di Spezia con esito conforme alle previsioni.

**Fisica.** — *Intorno ad un nuovo apparecchio per la determinazione dell'equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatometro, del termometro e del psicrometro.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In una Nota precedente (Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 2° sem. 1902) ho descritto un modo semplice per rimescolare un liquido contenuto in un recipiente chiuso ermeticamente da tutte le parti. Fissando nell'interno di questo, prima di chiuderlo, un numero conveniente di palette opportunamente disposte, e poscia dopo che è pieno di liquido e chiuso imprimendogli un movimento alternativo di rotazione in sensi opposti, attorno ad un asse qualsiasi ma preferibilmente attorno a quello di figura, le palette vanno ad urtare contro il liquido ancora immobile o moventesi in senso contrario e vi producono all'incirca lo stesso effetto come se il recipiente fosse immobile e nel suo interno si facesse ruotare nel modo solito una ruota a palette.

Nella stessa Nota ho descritto l'applicazione di questo modo d'agitare il liquido al calorimetro di Favre e Silbermann ed ho indicato l'utilità della medesima; molte esperienze che dimostrano questa utilità e l'esattezza dei risultati che si ottengono coll'apparecchio così modificato non poterono trovar posto nella Nota suddetta per mancanza di spazio e, per la stessa ragione, non potranno trovare posto nella presente.

In questa Nota descrivo altre applicazioni facili ed utili di questo modo d'agitare sebbene le esperienze in proposito non siano terminate, perchè la loro utilità mi pare evidente, ed inoltre dovendo attendere anche ad altri lavori, non so quando mi sarà possibile ultimare queste esperienze che saranno oggetto d'una Nota speciale.

*Determinazione dell'equivalente meccanico della caloria.* — Il calorimetro di Favre e Silbermann modificato nel modo suddetto si presta facilmente e vantaggiosamente a questa determinazione in grazia della sua grandissima sensibilità. Nella Nota suddetta accennai al fatto, presentatosi nelle mie esperienze, che il calorimetro perdeva lentamente calore quando era in riposo, mentre invece ne guadagnava, pure lentamente, quando veniva fatto ruotare vivamente ed alternativamente in sensi opposti per agitare il liquido. Giudicando per analogia con ciò che avviene nei calorimetri delle mescolanze, ritenni che la quantità di energia meccanica trasformata in calore per effetto dell'agitazione del liquido fosse insufficiente a produrre un effetto termico sensibile, ed infatti anche nel calorimetro di Joule per la de-

terminazione dell'equivalente suddetto mediante l'agitazione dell'acqua, occorre la caduta reiterata di pesi di molti chilogrammi per produrre un riscaldamento molto piccolo. L'effetto tuttavia mi pareva inesplicabile e prima lo attribuii a casuali variazioni della temperatura ambiente, ma in seguito mi persuasi che esso era dovuto realmente alla trasformazione di energia meccanica in calore.

Difatti in queste esperienze la rotazione del calorimetro in un senso era prodotto da uno spago avvolto attorno ad un tamburo e sollecitato da un peso di 200 gr. che cadeva per un tratto di 90 cm. una volta ogni 6 secondi, all'incirca. È certo che l'energia di questa caduta non era interamente trasformata in calore nell'interno del calorimetro, sia perchè il peso non cadeva liberamente ma era sostenuto in parte dalla mano che teneva l'altra estremità dello spago, sia perchè il peso acquistava una certa velocità che si perdeva nei sostegni, sia finalmente per l'attrito notevole dell'asse sui cuscinetti molto grossolani. Tuttavia credo di poter ammettere senza sbagliar di molto che circa  $\frac{1}{4}$  della suddetta energia fosse trasformata in calore nell'interno del calorimetro, e che un uguale quantità ne fosse trasformata nella rotazione in senso inverso. Quindi in ogni minuto la quantità di calore prodotto nel calorimetro sarebbe di circa 50. 0,90. 20 : 425 ossia 2 piccole calorie che producono nel termocalorimetro con benzina di petrolio la dilatazione facilmente osservabile di 6 mm<sup>3</sup>. La grande differenza di sensibilità in questo apparecchio ed in quello di Joule deriva, come già accennai, da ciò che nel primo tutto il calore che si vuol misurare e nel secondo solo una parte molto piccola di esso (quello cioè acquistato dal termometro) sono impiegati a produrre l'effetto che serve di misura, cioè rispettivamente la dilatazione di tutto il liquido del calorimetro e quella sola del mercurio del termometro.

Non ho ancora eseguito esperienze di misura con questo apparecchio, mi pare però che il produrre la rotazione del calorimetro mediante la caduta di pesi che agiscono su una funicella avvolta su di un tamburo (metodo che non differisce da quello di Joule) dia luogo ad errori nella misura dell'energia trasformata in calore nell'interno del calorimetro, i quali difficilmente si potrebbero evitare o correggere completamente. Questi errori derivano evidentemente dalla imperfetta flessibilità della funicella, dall'attrito della medesima sul tamburo, dalla velocità acquistata dal peso e comunicata ai sostegni, tutte cause che assorbono energia fuori del calorimetro. Mi pare perciò preferibile di produrre la rotazione suddetta mediante due forti molle a spirale (sul genere di quelle usate per gli orologi) le quali producano rotazioni opposte e possano alternativamente, prima esser tese indipendentemente dal calorimetro; e poi per mezzo d'apposito nottolino esser fatta agire sul calorimetro stesso, appare più semplicemente mediante la torsione di un

filo d'acciaio verticale convenientemente spesso (1 a 2 mm.), al quale sia sospeso e solidamente fissato il calorimetro.

*Calorimetro solare.* — Il calorimetro di Favre e Silbermann modificato si presta inoltre, quasi senza altre modificazioni, alla misura del calore dei raggi solari. Occorre bensì che il tubo ricevitore del calore (contenuto interamente dentro il calorimetro) abbia un diametro piuttosto grande affinché possa ricevere un fascio di raggi solari non troppo ristretto, ed inoltre che esso tubo sia vuoto ed abbia le pareti annerite. Occorre ancora che il calorimetro sia inclinato in modo che i raggi possano arrivare fino in fondo del tubo suddetto, che la rotazione avvenga attorno all'asse di questo e che uno o più schermi limitino il fascio dei raggi solari in modo che essi cadano solo dentro il tubo stesso. Il tubo graduato sul quale si osserva la dilatazione del liquido, si colloca comodamente dalla parte opposta a quella dell'apertura del tubo ricevitore, e col suo asse parallelo o meglio coincidente con quello di rotazione.

Anche in questo caso l'agitazione del liquido facilita la penetrazione del calore che si vuol misurare, e diminuendo la durata della medesima, diminuisce la correzione necessaria per l'effetto della temperatura ambiente.

Inoltre in questo calorimetro si evita un inconveniente che s'incontra in altri pireliometri, quello cioè che se lo strato di nero fumo è troppo spesso, esso, riscaldandosi, emette raggi verso l'esterno che vanno perduti e dei quali non si può determinare la intensità perchè cessano quasi istantaneamente quando cessa l'azione dei raggi solari, e non è possibile quindi separare le due azioni; mentre se lo strato di nero fumo fosse troppo sottile, una parte dei raggi incidenti potrebbe arrivare fino al metallo, riflettersi ed andare similmente perduta. Invece nel calorimetro suddetto i raggi emessi o riflessi dal fondo del tubo troppo o troppo poco annerito, cadono sulle pareti laterali del tubo stesso e vi sono quasi completamente assorbiti.

Lo stesso risultato s'otterrebbe ancor meglio se il fondo del tubo ricevitore dei raggi fosse formato da una sottile lamina di vetro un po' inclinata sulla direzione dei medesimi, cosicchè questi penetrerebbero in gran parte nell'interno del calorimetro e potrebbero esser ricevuti su una lamina annerita sospesa in mezzo al liquido, mentre i raggi riflessi cadrebbero sulle pareti laterali e vi sarebbero assorbiti, e quelli assorbiti dal vetro produrrebbero un riscaldamento che si trasmetterebbe al liquido per conduzione.

Un grande aumento di sensibilità ed un maggiore impedimento alla uscita dal calorimetro del calore portato dai raggi solari, si potrebbe ottenere concentrando i raggi con una lente di sal gemma avente il foco principale in un piccolo foro praticato nel coperchio del tubo ricevitore. In tal modo questo coperchio potrebbe lasciar penetrare una grande quantità di raggi solari, mentre tratterrebbe o riflettere verso l'interno i raggi diretti verso l'esterno.

Sebbene le esperienze su questo calorimetro solare non siano ancora ultimate e non possano trovar posto in questa Nota, credo conveniente descrivere la forma del calorimetro da me usato. Esso è formato da una scatola cilindrica di latta alta circa 10 cm., di 5,5 cm. di diametro (una scatola da cacao, di 125 gr.) che aveva saldato sulla base superiore il tubo ricevitore del calore; questo aveva 4 cm. di diametro, penetrava dentro il calorimetro fino a pochi millimetri dalla base inferiore, era chiuso in fondo da una calotta sferica, era annerito internamente (cioè nella parte rivolta verso l'esterno del calorimetro) ed era chiuso superiormente da un coperchio di latta, non annerito, avente un foro centrale di 2 o 3 cm. Nel mezzo della base inferiore era saldato esternamente il tubetto in cui con sovero e gommalacca era fissato il tubo graduato che serviva per misurare la dilatazione del liquido (benzina di petrolio) che riempiva il calorimetro e che serviva inoltre come asse di rotazione, per produrre l'agitazione del liquido.

Invece delle palette, usai una lunga striscia di latta larga 3 o 4 mm., fissata sulla faccia convessa della parete cilindrica del tubo ricevitore, in modo che formasse due spire d'un elica generata da una retta perpendicolare all'asse; era mia intenzione di fissare una elica simile ma diretta in senso contrario sulla parete cilindrica interna del calorimetro, ma ritenni che non fosse indispensabile e ne feci a meno. Inoltre sotto il fondo del tubo ricevitore, ossia sulla sua faccia convessa, fissai 4 piccole palette piane, in croce, per agitare il liquido adiacente ad esso fondo e maggiormente riscaldato dai raggi solari; in tal modo questa parte del liquido viene messa in moto per l'azione delle palette e per l'azione della forza centrifuga viene poi spinta verso le pareti laterali ove risente l'azione dell'elica, e viene spinta prima verso la sommità del calorimetro e poscia indietro.

Il liquido usato per riempire questo calorimetro era la benzina di petrolio che per la sua piccola densità, per la piccola capacità calorifica e per la sua grande dilatabilità termica, mi parve, fra i liquidi comuni, uno dei più adatti.

Il tubo graduato sul quale osservavo e misuravo la dilatazione del liquido prodotto dal calore de' raggi solari nelle mie prime esperienze, era fissato entro un tubetto d'ottone saldato al fondo del calorimetro mediante un tappo di sovero ricoperto da uno strato spesso ed omogeneo di gomma lacca. Siccome però questo tubo (il cui asse coincideva con quello del calorimetro) funzionava anche da asse di rotazione, avveniva spesso che l'aderenza fra la gomma lacca ed il tubetto d'ottone era distrutta e la benzina usciva dalla fessura che s'era così formata e che era difficile chiudere nuovamente. In seguito il tubo di vetro era fissato mediante gomma lacca ad un'armatura, ossia un tubo d'ottone che s'avvitava entro il tubo saldato al calorimetro, e la chiusura era resa perfetta nel modo solito mediante una rotella di cuoio che avevo imbevuto di glicerina o colla.

Per far ruotare questo calorimetro attorno al suo asse di figura, il tubo graduato era infilato in due corti tubi o anelli d'ottone di diametro tale che esso potesse ruotarvi senza tentennare troppo, i quali erano fissati entro due tappi di sovero tenuti da due collarini fissati alle estremità d'una lista di legno. Affinchè il calorimetro potesse esser diretto verso il sole e potesse seguirne il movimento, questa lista era tenuta da una pinza snodata (di quelle usate nei comuni sostegni da laboratorio per sostenere i grossi tubi e i frigoriferanti) serrata entro una doppia morsetta a rotazione, la quale dall'altro lato era serrata sull'asta del sostegno, che poi dev'essere inclinata nel piano del meridiano astronomico in modo da essere perpendicolare all'asse terrestre. In tal modo l'asse di rotazione della morsetta può funzionare da asse polare, attorno al quale il calorimetro può ruotare seguendo il moto del sole, e si ottiene la declinazione costante dell'asse del calorimetro, uguale a quella del sole, per mezzo della pinza snodata che può essere fissata con un angolo qualsiasi rispetto al proprio gambo.

Differisco ad un'altra Nota la descrizione delle esperienze, ancora in corso, eseguite con questo apparecchio.

*Dilatometro a palette.* — L'utilità di agitare il liquido dei dilatometri per ottenere più rapidamente l'equilibrio di temperatura col bagno, è stata riconosciuta già da parecchi anni dal Forch (Wied. Ann. 1895, t. 55, p. 105), il quale usò a tale scopo un apparecchio elettromagnetico certamente efficace sebbene alquanto complicato. Alcuni anni prima io avevo riconosciuto similmente la necessità di agitare un liquido di cui si vuol determinare la tensione di vapore, specialmente se esso contiene disciolto un solido o un altro liquido, ed avevo fatto uso a tal uopo d'un apparecchio magnetico pure efficace, ma molto semplice e molto più facilmente applicabile.

L'attuale disposizione per agitare il liquido per mezzo di palette interne e della rotazione del dilatometro attorno al suo asse di figura non richiede l'uso nè di calamite, nè di correnti, è efficacissima, sicura e non complica quasi affatto nè la costruzione nè l'uso del dilatometro; basta, quando il bulbo del dilatometro è ancora aperto in fondo ma già saldato al tubo graduato con imbuto, introdurvi un sistema di palette disposte opportunamente, chiudere nel modo solito il bulbo avendo cura di non riscaldar le palette tanto da sciuparle, e finalmente saldare il sostegno delle palette alle pareti del bulbo.

Ho fatto uso in alcuni dilatometri d'una astina di vetro cui erano saldati, a varie altezze, corti bracci laterali disposti simmetricamente rispetto all'astina e terminanti con laminette piane (formate di solito con pezzi di vetrini coprioggetti da microscopio) non parallele all'asse, ma fatte ruotare di 45° tutte nello stesso senso, attorno ai bracci. Questi dilatometri hanno veramente un aspetto alquanto fragile, e sebbene durante molti mesi abbiano resistito a molte vicende, mi pare probabile che presto o tardi l'unica sal-

datura dell'astina sul fondo del bulbo in seguito a un urto brusco o una vibrazione si spezzi, oppure che le laminette si dissaldino dai bracci. Tuttavia anche con questa disposizione, forse troppo efficace, non sarebbe difficile ad un costruttore di ottenere maggiore solidità, saldando p. es. l'astina centrale ad entrambi i capi, ed usando laminette più spesse e più resistenti.

Invece dell'astina suddetta con palette, si può più semplicemente introdurre e saldare entro il bulbo un'astina diritta, collocata parallelamente all'asse, all'incirca a metà distanza fra esso e la parete, o meglio due astine parallele collocate ai due lati dell'asse, oppure un'astina unica ma ripiegata in forma di U o di ovale allungata. Questa disposizione è specialmente opportuna se il bulbo ha un diametro piuttosto piccolo, tale che sarebbe difficile farvi entrare un'asta con palette anche piccole. L'agitazione, sebbene meno efficace di quella ottenuta colle palette, è tuttavia sufficiente. L'astina potrebbe anche essere ripiegata in forma di elica e collocata coll'asse coincidente con quello del bulbo, così il liquido per effetto della rotazione dell'elica riceverebbe anche un movimento parallelo all'asse suddetto.

È opportuno notare che l'agitazione non deve essere troppo vivace, per evitare che si abbia una produzione di calore che tenderebbe a distruggere l'equilibrio di temperatura coll'esterno, che invece si vuole raggiungere.

Per ottenere prontamente questo equilibrio è anche utile d'infilare il dilatometro in una piccola ruota a palette inclinate fissata al disopra del bulbo, la quale per effetto della rotazione impressa al dilatometro e quindi alla ruota stessa, spinge il liquido del bagno lungo le pareti del dilatometro, che così assumono la temperatura del liquido; questa agitazione però non esclude quella generale del liquido prodotta da agitatori più grandi e che esercitano la loro azione in tutte le parti del liquido. La ruota a palette si può costruire molto facilmente con un disco di lamina d'ottone con un foro centrale, e con sei o più tagli secondo i raggi equidistanti, ma che non arrivino fino al foro centrale. Storcendo alquanto attorno al raggio mediano i settori così formati, si hanno le palette inclinate.

*Termometro a palette.* — Le suddette disposizioni per agitare il liquido sia nell'interno che all'esterno del dilatometro mi paiono certamente utili anche pei termometri, specialmente se questi hanno il bulbo grosso e se sono molto sensibili, e specialmente se il liquido interno fosse diverso dal mercurio e quindi cattivo conduttore del calore. Sarebbe difficile e non necessario introdurre nel bulbo del termometro un'asta con palette, sarà più opportuno collocarvi un'astina diritta o ripiegata nel modo indicato per il dilatometro.

La ruota a palette esterna sarebbe utile tanto se il termometro fosse immerso in un liquido, quanto e forse più se esso si trovasse nell'aria. Per ottenere rapidamente la temperatura dell'aria, si usa talvolta di legare il termometro ad una funicella e farlo ruotare a modo di fionda; questo metodo

non solo è incomodo e lento e non scevro di pericolo sia per il termometro stesso, sia per gli strumenti e le persone circostanti, ma inoltre da risultati d'esattezza dubbia perchè il termometro ruota nell'atmosfera dell'operatore ed è esposto al calore irradiato del medesimo. Mi pare perciò preferibile di far arrivare l'aria sul bulbo per mezzo della ruota esterna a palette (agitando allo stesso tempo il liquido interno per mezzo delle palette o astine interne), ciò che si può ottenere stando lontani dal termometro protetto da uno schermo.

*Psicrometro con ventilatore a palette inclinate.* — L'utilità delle palette interne e dell'agitazione del mercurio nel termometro asciutto è evidente; in quanto al termometro bagnato, occorrerebbe assicurarsi coll'esperienza che la rotazione attorno al suo asse, che bisognerebbe imprimergli per agitare il mercurio (rotazione che potrebbe facilmente esser diversa a seconda dell'operatore e delle circostanze) non favorisca l'evaporazione e produca un abbassamento irregolare della sua temperatura.

Mi pare invece senz'alcun dubbio utile, che nei psicrometri a ventilatore, la ruota a palette di questo abbia le palette girate tutte d'uno stesso angolo e nello stesso senso attorno ai raggi rispettivi, e che essa ruota sia collocata al disotto dei termometri in modo che il prolungamento del suo asse sia parallelo ai termometri e approssimativamente equidistante da entrambi. In tal modo all'agitazione irregolare prodotta dall'attuale ruota coll'asse verticale e palette normali alla direzione del moto, agitazione che credo impossibile sottoporre a calcolo, si sostituirebbe un movimento nell'aria rotatorio e ascendente molto meglio determinabile. Se la ruota suddetta e i termometri fossero collocati entro un largo tubo verticale aperto ai due capi, di diametro poco maggiore di quello della ruota, il modo di funzionare di questo psicrometro si avvicinerebbe molto a quello del psicrometro ad aspirazione.

Finalmente il metodo usato per agitare un liquido in un recipiente chiuso, può servire altresì per agitare invece un gaz, ciò che può essere utile in vari casi, come p. es. nella determinazione della tensione di vapore di un liquido in un gaz, per facilitare l'azione chimica di un gaz su di un altro corpo, per facilitare la convezione del calore, effettuata dallo stesso gaz.

Chimica. — *Nuova sintesi della anidride nitrica*. Nota di DEMETRIO HELBIG, presentata dal Socio S. CANNIZZARO.

Come ebbi ad annunciare in una Nota preliminare <sup>(1)</sup>, l'ozono reagisce sulla ipoazotide e dà una sostanza bianca, volatile: questa sostanza è la *anidride nitrica* o pentossido d'azoto, ottenuta già da Sainte-Claire Deville <sup>(2)</sup> per azione del cloro sul nitrato d'argento, e da Weber <sup>(3)</sup> disidratando l'acido nitrico concentratissimo con anidride fosforica.

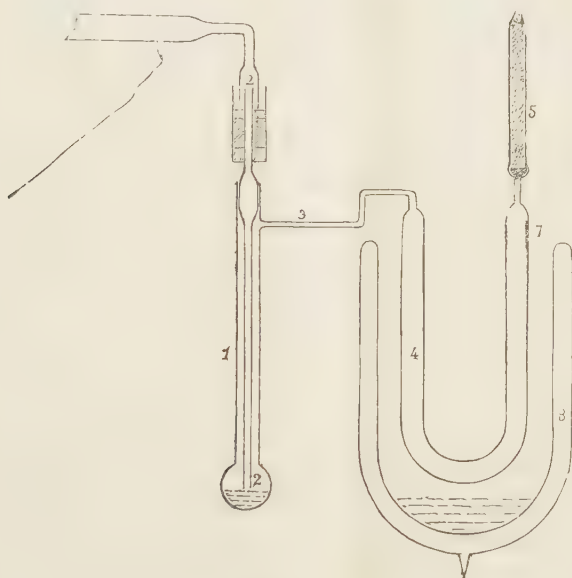


FIG. 1.

L'apparecchio da me impiegato per la reazione suddetta (fig. 1) si compone di una provetta (1) munita in fondo d'un piccolo rigonfiamento destinato ad accogliere la ipoazotide. L'ozono vi penetra da un tubo (2), lungo tanto da sfiorare appena il livello della ipoazotide. Dalla parte superiore della provetta (1) si distacca un tubo (3) il quale comunica con un tubo ad U (4) chiuso da un tubo a cloruro di calcio (5), destinato a prevenire la rientrata d'umidità atmosferica. A causa del fortissimo potere corrosivo esercitato tanto dall'ozono quanto dalla ipoazotide e dall'anidride nitrica sulle

(1) Questi Rendiconti, vol. XI, fasc. 11.

(2) Ann. de physique et de chimie S. III, 28, 241.

(3) Journ. für praktische Chemie N. F. 6, 342.

sostanze organiche, in tutto l'apparecchio è evitato l'impiego di gomma o sughero; tanto il tubo adduttore dell'ozono (2) quanto il tubo a cloruro di calcio (5) sono collegati coll'apparecchio mediante chiusura a smeriglio.

Per la produzione dell'ozono mi servii d'un apparecchio ozonizzatore di Siemens e Babo: dovendo esso funzionare per qualche tempo, se ne impediva il riscaldamento per mezzo di un serpentino di piombo avvolto intorno al manicotto esterno e percorso da una corrente d'acqua fredda. La tensione elettrica necessaria per il funzionamento dell'ozonizzatore era fornita da un rocchetto di Ruhmkorff (lunghezza 32 cm.) il cui primario, munito d'interuttore Wehnelt, era alimentato da una corrente di 7 ampère (60 volt).

L'ossigeno da ozonizzare era stato preparato per elettrolisi d'acqua: allo scopo di eliminare la piccola quantità d'idrogeno contenutavi, lo facevo passare su una spirale di platino arroventata elettricamente, e poi lo seccavo rigorosamente su cloruro di calcio ed anidride fosforica.

La ipoazotide impiegata era stata ottenuta da nitrato di piombo sechissimo.

La provetta era immersa in un miscuglio di ghiaccio e sale di cucina: la condensazione dell'anidride nitrica nel tubo a U (4) richiede una temperatura assai più bassa di quella ottenibile con i soliti miscugli frigoriferi, perchè il vapore dell'anidride è diluito in un eccesso d'ossigeno che tende a trascinarlo via. Ottenni il raffreddamento necessario immergendo il tubo (4) in un ampio cilindro Dewar (8) contenente in fondo un po' d'aria liquida, il cui livello si manteneva a circa 2-3 cm. al di sotto del tubo (4).

Dopo pochi istanti di funzionamento dell'apparecchio, il gas che esce dalla provetta (1) e che si rende nel tubo (4) è quasi completamente incolore: e nella parte fredda del tubo (4) si condensa il prodotto sotto forma di cristallini lucenti, bianchissimi. L'ipoazotide assorbe l'ozono con grande attività: tanto che l'ossigeno che esce dal tubo (5) non ha neppure il più leggero odore d'ozono finchè nella provetta (1) esista ancora una traccia di ipoazotide non trasformata: ed è la comparsa d'ozono all'uscita del tubo (5) che indica la fine della reazione.

Per ossidare le piccole quantità di ipoazotide eventualmente trascinate dall'ossigeno e trattenute nel prodotto condensato in (4), si seguì il passaggio di ozono per l'apparecchio ancora per un quarto d'ora, dopo avere lasciato risalire un po' la temperatura a cui si trovava la sostanza con l'allontanarne l'aria liquida contenuta nel cilindro Dewar. Se la corrente di ossigeno ozonizzato è stata assai lenta alla fine dell'operazione, nella provetta (1) si trova un po' di anidride nitrica rimasta indietro.

La preparazione di 1 gr. di sostanza richiede appena una ventina di minuti.

L'anidride nitrica ottenuta a questo modo è perfettamente bianca e sufficientemente stabile se conservata ad una luce non troppo forte. Il suo punto

di fusione è a  $30^{\circ}$ - $30.5^{\circ}$ : questa cifra concorda perfettamente con quella data dagli autori sopranominati.

Per l'analisi operai nel modo seguente (fig. 2): il tubo (4) contenente l'anidride formata si staccò dalla provetta (1) chiudendolo alla lampada: poi lo si pesò, tenendo l'apertura (7) chiusa da un piccolo tubo essiccatore

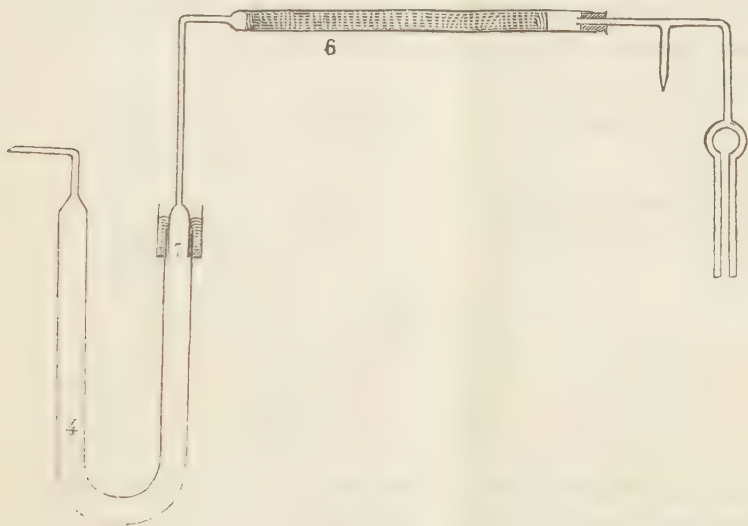


FIG. 2.

pieno di anidride fosforica. Una volta pesato, si immerse subito in aria liquida la parte del tubo contenente la sostanza da analizzare, sì da impedire assolutamente qualunque perdita di materia per volatilizzazione o scomposizione. Un tubo di vetro di Jena infusibile (6) contenente rame metallico (reticella avvolta a spirale) ed anch'esso esattamente pesato, si adattava a smeriglio all'apertura (7) del tubo (4): la congiunzione fra (6) e (7) era resa perfetta da una chiusura a mercurio applicata su (7). L'estremità libera del tubo (6) era congiunta mediante tappo di gomma con una pompa a mercurio di Sprengel disposta in modo da raccogliere in un cilindro graduato l'azoto sviluppato. Dopo praticato con questa pompa il vuoto perfetto per quanto possibile, si arroventò il tubo (6) mediante una fila di fiamme a gas e poi si tolse l'aria liquida circondante il tubo (4). Allora l'anidride nitrica in esso contenuta svaporava lentamente: passando sul rame rovente gli cedeva il suo ossigeno, mentre l'azoto veniva continuamente evacuato dalla pompa e raccolto nel cilindro graduato.

Alla fine della operazione, si riscaldò fortemente la parte inferiore del tubo (4) onde decomporre le ultime quantità di sostanza che ancora potevano esservi contenute: poi si spinse il vuoto al limite massimo raggiungibile, e

dopo aver lasciato raffreddare il tubo (6) si permise all'aria di rientrare nell'apparecchio, spezzando la punta di una diramazione laterale del tubo che metteva in comunicazione il tubo (6) con la pompa di Sprengel. Si ripesò allora il tubo (4) nelle condizioni medesime come la prima volta: la diminuzione di peso fornì la quantità di sostanza impiegata, come dall'aumento di peso nel tubo (6) si dedusse l'ossigeno in essa contenuto: l'azoto raccolto nel cilindro graduato, misurato su acqua, permise di determinare il peso di questo elemento. Ottenni così i risultati seguenti:

I. Sostanza gr. 1,3514.

|      |            |                          |
|------|------------|--------------------------|
| 8°,2 | 764,65 mm. | N = cc. 291 = gr. 0,3531 |
|      |            | O = gr. 1,0062           |

II. Sostanza gr. 0,2732.

|    |            |                           |
|----|------------|---------------------------|
| 9° | 766,65 mm. | N = cc. 56,5 = gr. 0,0685 |
|    |            | O = gr. 0,2005            |

| Calcolato per N <sup>2</sup> O <sup>5</sup> |       | Trovato |       |
|---------------------------------------------|-------|---------|-------|
|                                             |       | I       | II    |
| N %                                         | 25,93 | 26,60   | 25,60 |
| O %                                         | 74,07 | 74,55   | 73,41 |

Come accennai nella mia Nota preliminare, mi riservo di studiare l'azione dell'ozono anche sugli altri ossidi dell'azoto.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio CERRUTI presenta, a nome dell'autore, un opuscolo di ETTORE BORTOLOTTI dell'Università di Modena dal titolo: *Influenza dell'opera matematica di Paolo Ruffini sullo svolgimento delle teorie algebriche*, dove è lumeggiata con diligente esattezza la priorità del Ruffini in risultati fondamentali relativi alla dottrina delle equazioni algebriche, risultati che furono accolti con inesplicabile indifferenza da matematici sommi del suo tempo, e de' quali anche oggi non si rende sempre al loro primo scopritore la dovuta giustizia.

V. C.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 5 aprile 1903.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

**Matematica.** — *Sulle quadriche coniugate in deformazione.*

Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. In una Nota inserita l'anno scorso in questi Rendiconti (Volume XI, 1° semestre, 6 aprile 1902) mi sono occupato del seguente problema, relativo alla teoria della deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili:

*Trovare tutte le coppie di superficie  $S$ ,  $S'$  (non omotetiche), rappresentabili punto per punto l'una sull'altra, in guisa che si corrispondano le loro linee assintotiche attuali, ed inoltre a qualsiasi sistema di assintotiche virtuali dell'una corrisponda un sistema della stessa specie sull'altra.*

Col nome di assintotiche *virtuali* di una superficie  $S$  si indica un qualunque sistema di linee suscettibile di diventare linee assintotiche dopo una conveniente deformazione di  $S$ ; si ricordi inoltre che la nuova configurazione di  $S$  è perfettamente determinata dal sistema delle assintotiche virtuali.

Due superficie  $S$ ,  $S'$  nella relazione sopra descritta si diranno *coniugate in deformazione*, volendo significare che ad ogni deformazione dell'una corrisponde una determinata deformazione dell'altra, per modo che i due problemi di trovare le superficie applicabili sopra  $S$ , o quelle applicabili sopra  $S'$ , si equivalgono perfettamente.

Nella Nota citata ho stabilito la proposizione fondamentale: *Affinchè due superficie  $S$ ,  $S'$  siano coniugate in deformazione è necessario e suffi-*

*ciente che si corrispondano punto per punto, con conservazione dei sistemi coniugati e delle linee geodetiche.*

Ho poi dato la soluzione del problema nell'ipotesi che  $S, S'$  siano applicabili sopra superficie di rotazione, rilevando il caso particolare più notevole di quadriche reali di rotazione, una delle quali è un ellissoide allungato, l'altra un iperboloide a due falde. Le deformazioni coniugate di queste due quadriche si collegano coi teoremi di Guichard e colla trasformazione di Hazzidakis delle superficie a curvatura costante positiva o, ciò che è lo stesso, delle superficie a curvatura media costante.

Nella presente Nota riprendo la questione indicata per applicarla alle quadriche generali, esponendo alcuni teoremi che, sebbene discendano molto facilmente da notissime proprietà, non sembra siano stati osservati fino ad ora.

Comincio dunque dal dimostrare il teorema:

A) *Ogni quadrica a centro si può trasformare, per mezzo di una proiettività, distinta da una similitudine, in un'altra quadrica in guisa che alle geodetiche dell'una corrispondano le geodetiche dell'altra; le due quadriche si possono inserire in un medesimo sistema confocale.*

Poichè le trasformazioni proiettive conservano altresì i sistemi coniugati, segue che ad ogni quadrica generale è coniugata in deformazione un'altra quadrica, distinta in generale di forma dalla primitiva, e più precisamente:

B) *Ad ogni ellissoide ad assi ineguali è coniugata in deformazione un iperboloide a due falde dello stesso sistema confocale, ad un iperboloide ad una falda un altro iperboloide ad una falda nella medesima famiglia. Solo quando l'iperboloide ad una falda è ortogonale, è identico al proprio coniugato; le superficie applicabili su questa quadrica si presentano quindi a coppie di superficie distinte, come per la sfera nella trasformazione di Hazzidakis.*

Così il problema di cercare tutte le superficie applicabili sull'ellissoide equivale all'analogo per l'iperboloide coniugato a due falde; così pure gli iperboloidi a due falde si distribuiscono in coppie corrispondenti al medesimo problema d'applicabilità.

Se si ricordano le recenti ricerche di Darboux (Comptes Rendus 1899) che hanno stabilito una relazione fra le deformate delle quadriche e certe classi di superficie a linee di curvatura isoterme, è facile indurne che alle deformazioni coniugate di due quadriche generali deve corrispondere per quelle superficie isoterme, una trasformazione generalizzata della trasformazione di Hazzidakis per le superficie a curvatura media costante, che deve a questa ridursi quando le quadriche diventano di rotazione.

2. Dimostrerò dapprima geometricamente i teoremi sopra enunciati, deducendoli dalla nota proposizione di Chasles: *Le tangenti comuni a due quadriche confocali  $Q, Q'$  formano una congruenza normale.* Ne segue

che le linee inviluppate sopra  $Q$  (o sopra  $Q'$ ) da quelle tangenti sono geodetiche; e se, tenendo fissa  $Q$ , si fa variare  $Q'$ , nel sistema confocale, si hanno così tutte le geodetiche di  $Q$ .

Ora se eseguiamo una trasformazione proiettiva che cangi il sistema di quadriche confocali ( $Q$ ) in un altro sistema confocale ( $Q_1$ ), su due quadriche corrispondenti  $Q$ ,  $Q_1$  si corrisponderanno ad un tempo i sistemi coniugati e le linee geodetiche (pel teorema di Chasles); le due quadriche saranno quindi coniugate in deformazione. Per ottenere una delle volute proiettività basta ricordare che un sistema confocale ( $Q$ ) di quadriche non è altro che una schiera inserita in una sviluppabile del 4° ordine isotropa (circoscritta cioè al circolo immaginario all'infinito); la proiettività deve dunque trasformare quella sviluppabile isotropa in un'altra isotropa, per la qual cosa basta che cangi una delle tre coniche focali nel circolo all'infinito (1).

Inversamente è noto che in qualunque generale proiettività  $T$  vi è uno, ed in generale un solo sistema confocale di quadriche, che si muta in un altro tale sistema. Invero se per la trasformazione inversa  $T^{-1}$  il circolo all'infinito  $C$  si cangia nella conica  $\Gamma$ , la sviluppabile  $\Sigma$  del 4° ordine circoscritta a  $C$  e a  $\Gamma$  si cangia per la  $T$  in un'altra sviluppabile isotropa  $\Sigma_1$ , e quindi il sistema confocale inserito in  $\Sigma$  nell'altro inserito in  $\Sigma_1$ .

Così adunque: *In qualunque proiettività dello spazio si ha un sistema di superficie (quadriche confocali) per ciascuna delle quali le geodetiche si cangiano in geodetiche sulla superficie trasformata.*

È naturale ora di domandare se possono esistere altre coppie di superficie  $S$ ,  $S'$  proiettive, sulle quali si corrispondano le geodetiche. La risposta negativa si desume subito dalle considerazioni seguenti. Ogni geodetica  $g$  di  $S$  dovendo cangiarsi in una geodetica  $g'$  di  $S'$ , il piano osculatore di  $g$  si muterà in quello di  $g'$  (nel punto corrispondente). Dunque se  $P$ ,  $P'$  sono due punti corrispondenti di  $S$ ,  $S'$ , e  $\pi$ ,  $\pi'$  i rispettivi piani tangenti, ad ogni piano normale in  $P$  a  $\pi$  dovrà corrispondere un piano normale in  $P'$  a  $\pi'$ , indi alla normale  $S$  in  $P$  la normale alla  $S'$  in  $P'$ . Queste due normali sono dunque *direzioni principali* in  $P$ ,  $P'$  della corrispondenza, cioè tali che ad ogni direzione normale all'una in  $P$  corrisponde una direzione normale all'altra in  $P'$ . Nel caso attuale di una proiettività la terna (ortogonale) delle direzioni principali in ogni punto è quella delle normali alle tre quadriche del sistema confocale che vi passano; e per ciò  $S$ ,  $S'$  coincidono necessariamente con due quadriche corrispondenti. Queste ultime considerazioni dimostrano del resto direttamente (senza far uso della proposizione di Chasles) la proprietà della conservazione delle geodetiche.

(1) Escludiamo quelle che lasciano fisso il circolo all'infinito, perchè non sono altro che movimenti ed omotetie.

3. Passiamo ora a dare una conferma analitica ai risultati precedenti, ciò che servirà anche a determinare di ogni quadrica a centro la coniugata in deformazione.

Prendiamo l'equazione di un sistema confocale di quadriche a centro sotto la solita forma

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2 + \varrho} + \frac{y^2}{b^2 + \varrho} + \frac{z^2}{c^2 + \varrho} = 1,$$

indicando  $\varrho$  il parametro variabile da quadrica a quadrica, e supposto, come di consueto

$$a^2 > b^2 > c^2.$$

Le quattro quadriche singolari nella schiera (come involuppi di 2<sup>a</sup> classe) sono il circolo immaginario all'infinito, e le tre coniche focali

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \text{ ellisse reale nel piano } z = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \text{ iperbola nel piano } y = 0$$

$$\frac{y^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} + 1 = 0, \text{ ellisse immaginaria nel piano } x = 0.$$

Vogliamo ora eseguire una tale trasformazione proiettiva  $T$ , che non sia nè un movimento nè un'omotetia, e cangi il sistema confocale in un altro confocale, onde la  $T$  dovrà cangiare una delle coniche focali nel circolo all'infinito. Noi vogliamo una proiettività  $T$  reale, e perciò la terza conica focale immaginaria dovrà cangiarsi in questo circolo; quindi il piano  $x = 0$  nel piano all'infinito. Dopo ciò, se indichiamo  $x_1, y_1, z_1$  le coordinate del punto in cui la  $T$  trasporta il punto  $(x, y, z)$ , le formole cercate avranno la forma

$$x_1 = \frac{U}{x}, \quad y_1 = \frac{V}{x}, \quad z_1 = \frac{W}{x},$$

dove inoltre  $U, V, W$  dovranno essere tali polinomii lineari in  $x, y, z$  che l'equazione

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 0$$

del circolo all'infinito equivalga a quella

$$(a^2 - c^2) y^2 + (a^2 - b^2) z^2 + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = 0$$

della terza conica focale. Trascurando un fattore costante d'omotetia, dovremo dunque avere

$$U^2 + V^2 + W^2 = (a^2 - c^2) y^2 + (a^2 - b^2) z^2 + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = 0.$$

Ne segue che  $U, V, W$  non contengono  $x$  ed applicando ad  $U, V, W$  una sostituzione ortogonale, si potrà assumere senz'altro, a meno di un movimento:

$$U = \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad V = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot z, \quad W = \sqrt{a^2 - c^2} \cdot y.$$

Dunque abbiamo:

*Le trasformazioni proiettive reali che cangiano il sistema di quadriche confocali (1) in un secondo sistema di quadriche confocali sono date, a meno di un movimento e di un'omotetia, dalle formole:*

$$(2) \quad x_1 = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{x}, \quad y_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{z}{x}, \quad z_1 = \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \frac{y}{x}.$$

Queste rappresentano un'omografia biassiale armonica avente per assi le due rette

$$x = \pm \sqrt[4]{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad y \sqrt[4]{a^2 - b^2} \mp z \sqrt[4]{a^2 - c^2} = 0.$$

L'omografia biassiale (2) cangia effettivamente il sistema confocale (1) nell'altro

$$(3) \quad \frac{x_1^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{y_1^2}{(a^2 - b^2)(c^2 + \varrho)} + \frac{z_1^2}{(a^2 - c^2)(b^2 + \varrho)} = 1,$$

$$\frac{a^2 + \varrho}{a^2 + \varrho}$$

che è pure un sistema confocale, anzi coincide col sistema stesso, come si vede osservando che, posto

$$(4) \quad \varrho_1 = \frac{b^2 c^2 - a^2 (b^2 + c^2 + \varrho)}{a^2 + \varrho},$$

la (3) si scrive

$$(3^*) \quad \frac{x_1^2}{a^2 + \varrho_1} + \frac{y_1^2}{b^2 + \varrho_1} + \frac{z_1^2}{c^2 + \varrho_1} = 1.$$

Ai valori singolari di  $\varrho$ :

$$\varrho = -a^2, -b^2, -c^2, \infty$$

corrispondono ordinatamente i valori

$$\varrho_1 = \infty, -c^2, -b^2, -a^2;$$

l'omografia (2) scambia quindi fra loro le due coniche focali reali e l'immaginaria col circolo all'infinito (1).

(1) Un sistema confocale di quadriche ammette del resto (come un fascio) un gruppo di 32 collineazioni in sè; ma quelle reali, utili al nostro scopo, si riducono essenzialmente alla (2).

Su due quadriche corrispondenti per la (2) nel sistema confocale si corrisponderanno i sistemi coniugati e le linee geodetiche (n. 2); esse saranno cioè quadriche coniugate in deformazione. Dalle formole effettive (3) o (3\*) deduciamo poi:

*All' ellissoide a tre assi inequali*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*è coniugato in deformazione l'iperboloide confocale a due falde*

$$\frac{\frac{x_1^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{a^2} - \frac{\frac{y_1^2}{(a^2 - b^2)c^2}}{a^2} - \frac{\frac{z_1^2}{(a^2 - c^2)b^2}}{a^2} = 1;$$

*all' iperboloide ad una falda*

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1 \quad (A^2 > B^2)$$

*è coniugato l'iperboloide della stessa famiglia*

$$\frac{\frac{x_1^2}{(A^2 - B^2)(A^2 + C^2)}}{A^2} + \frac{\frac{y_1^2}{(A^2 - B^2)C^2}}{A^2} - \frac{\frac{z_1^2}{(A^2 + C^2)B^2}}{A^2} = 1.$$

Si osserverà di più che, se l'ellissoide diventa di rotazione attorno all'asse maggiore diventando  $b = c$ , anche l'iperboloide coniugato diventa di rotazione e se, sostituendo a questo un iperboloide omotetico, si rendono eguali i due assi primari delle due quadriche, quelli secondari  $2b$ ,  $2b_1$  risultano legati dall'identità:

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b_1^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Questa, come già rilevai nella Nota sopra citata, è appunto la relazione che intercede fra le due quadriche di rotazione coniugate, nello sviluppo dei teoremi di Guichard.

Notevole è ancora il caso in cui l'iperboloide ad una falda è *ortogonale* <sup>(1)</sup>, il che ha luogo quando

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{C^2} = \frac{1}{B^2}.$$

Allora soltanto l'iperboloide coniugato in deformazione coincide con esso e l'omografia biassiale (2), o

$$x_1 = \frac{\sqrt{(A^2 - B^2)(A^2 + C^2)}}{x}, \quad y_1 = \sqrt{A^2 - B^2} \frac{z}{x}, \quad z_1 = \sqrt{A^2 + C^2} \frac{y}{x},$$

<sup>(1)</sup> Per la definizione e le proprietà delle quadriche ortogonali. Cf. D'Ovidio, *Geometria analitica* (pag. 458 della terza edizione).

trasforma l'iperboloide in sè, conservandone le linee geodetiche. Ne segue: *Ogni deformazione dell'iperboloide ortogonale ad una falda ne individua una seconda, sicchè le superficie applicabili su questa quadrica si presentano a coppie di superficie coniugate (distinte di forma).*

4. I teoremi enunciati al n. 1 sono così dimostrati appoggiandosi, per quanto riguarda la conservazione delle linee geodetiche, alle osservazioni geometriche del n. 2. Vediamo ora come anche questa proposizione possa facilmente confermarsi per via analitica, ricorrendo alle condizioni caratteristiche trovate dal Dini per la rappresentazione geodetica di una superficie sopra un'altra <sup>(1)</sup>.

Basta per questo scrivere l'elemento lineare dello spazio in coordinate ellittiche  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ , riferite al sistema confocale (1), designando  $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$  rispettivamente i valori del parametro  $\varrho$  per l'ellissoide, iperboloide ad una o a due falde del sistema (1) che passano pel punto  $(x, y, z)$ .

Si ha allora:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \varrho_1)(a^2 + \varrho_2)(a^2 + \varrho_3)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad y^2 = \frac{(b^2 + \varrho_1)(b^2 + \varrho_2)(b^2 + \varrho_3)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \varrho_1)(c^2 + \varrho_2)(c^2 + \varrho_3)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

e corrispondentemente pel

$$(5) \quad ds^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_3)}{(a^2 + \varrho_1)(b^2 + \varrho_1)(c^2 + \varrho_1)} d\varrho_1^2 + \frac{(\varrho_2 - \varrho_3)(\varrho_2 - \varrho_1)}{(a^2 + \varrho_2)(b^2 + \varrho_2)(c^2 + \varrho_2)} d\varrho_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(\varrho_3 - \varrho_1)(\varrho_3 - \varrho_2)}{(a^2 + \varrho_3)(b^2 + \varrho_3)(c^2 + \varrho_3)} d\varrho_3^2 \right\},$$

che scriviamo anche

$$(5^*) \quad ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2.$$

L'omologia biassiale (2) applicata al sistema confocale (1) dà

$$x_1^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 (a^2 - c^2)^2}{(a^2 + \varrho_1)(a^2 + \varrho_2)(a^2 + \varrho_3)}, \quad y_1^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 (c^2 + \varrho_1)(c^2 + \varrho_2)(c^2 + \varrho_3)}{b^2 - c^2 (a^2 + \varrho_1)(a^2 + \varrho_2)(a^2 + \varrho_3)},$$

$$z_1^2 = - \frac{(a^2 - c^2)^2 (b^2 + \varrho_1)(b^2 + \varrho_2)(b^2 + \varrho_3)}{b^2 - c^2 (a^2 + \varrho_1)(a^2 + \varrho_2)(a^2 + \varrho_3)}.$$

Calcolando di qui il  $ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2$ , si trova

$$(6) \quad ds_1^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 (a^2 - c^2)^2}{(a^2 + \varrho_1)(a^2 + \varrho_2)(a^2 + \varrho_3)} \left\{ \frac{H_1^2 d\varrho_1^2}{a^2 + \varrho_1} + \frac{H_2^2 d\varrho_2^2}{a^2 + \varrho_2} + \frac{H_3^2 d\varrho_3^2}{a^2 + \varrho_3} \right\}.$$

<sup>(1)</sup> *Sopra un problema della teoria generale delle rappresentazioni geografiche* (Annali di Matematica, tomo III, 1869). Cf. anche Darboux, *Leçons* etc. tomo III, pag. 47.

Confrontando gli elementi lineari (5), (6) per due quadriche corrispondenti, si vede subito che essi stanno fra loro nella relazione caratteristica che assicurano, secondo il Dini (l. c.), la corrispondenza delle linee geodetiche.

5. Dimostriamo ora che i risultati precedenti si estendono subito allo spazio ad  $n$  dimensioni  $S_n$  (euclideo) <sup>(1)</sup>, fornendo così un semplice esempio di spazi ad  $n - 1$  dimensioni (quadriche), immersi nell' $S_n$ , che vengono a rappresentarsi geodeticamente (e proiettivamente) gli uni sugli altri.

Consideriamo nello spazio  $S_n$  il sistema di quadriche confocali

$$(7) \quad \frac{x_1^2}{a_1 + q} + \frac{x_2^2}{a_2 + q} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n + q} = 1,$$

e diciamo  $q_1, q_2, \dots, q_n$  le corrispondenti coordinate ellittiche; abbiamo le formole

$$(8) \quad x_i^2 = \frac{(a_i + q_1)(a_i + q_2) \dots (a_i + q_n)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}$$

$$(8^*) \quad \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{x_i}{a_i + q_k},$$

e quindi pel  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$  la forma ortogonale

$$(9) \quad ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + \dots + H_n^2 dq_n^2,$$

con

$$(9^*) \quad H_i^2 = \frac{1}{4} \frac{(q_i - q_1)(q_i - q_2) \dots (q_i - q_{i-1})(q_i - q_{i+1}) \dots (q_i - q_n)}{(a_1 + q_i)(a_2 + q_i) \dots (a_n + q_i)}$$

Eseguiamo ora la trasformazione proiettiva data dalle formole

$$(10) \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{x_1}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{\sqrt{a_1 - a_i}} \frac{x_i}{x_1} \quad (i = 2, 3 \dots n)$$

dove le  $\bar{x}$  sono le coordinate del punto trasformato.

Questa cangia il sistema di quadriche confocali (7) nell'altro pure confocale:

$$(10^*) \quad \frac{\bar{x}_1^2}{\frac{1}{a_1 + q}} + \sum_i^{2 \dots n} \frac{\bar{x}_i^2}{\frac{a_i + q}{(a_1 - a_i)(a_1 + q)}} = 1.$$

Ora sussiste nell' $S_n$  la proposizione generalizzata di Chasles: Le tangenti comuni ad  $n - 1$  quadriche del sistema confocale formano le normali di un'ipersuperficie, e quindi inviluppano su ciascuna quadrica un sistema di

<sup>(1)</sup> I medesimi teoremi valgono del resto, più in generale, per gli spazi di curvatura costante.

linee geodetiche. Tenendo fissa una  $Q$  delle  $n - 1$  quadriche e facendo variare le altre  $n - 2$  si ottengono così tutte le geodetiche di  $Q$ . Di qui deduciamo: *Sopra due quadriche corrispondenti dei sistemi confocali proiettivi* (7), (10\*) *si corrispondono le linee geodetiche*. La medesima cosa segue anche da considerazioni geometriche analoghe a quelle svolte alla fine del n. 2. La conferma analitica risulta nuovamente dal calcolo dell'elemento lineare

$$\overline{ds}^2 = \sum_i d\bar{x}_i^2 = \sum_i^{1\dots n} a_{kl} dq_k dq_l$$

dello spazio trasformato.

Dallo (10) abbiamo

$$\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_k} = -\frac{1}{x_1^2} \frac{\partial x_1}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{x_1 \sqrt{a_1 - a_i}} \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \frac{x_i}{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} \right\},$$

e quindi, avendo riguardo alle (8\*):

$$a_{kl} = \sum_i^{1\dots n} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial q_l} = \frac{1}{4x_1^2} \left\{ \frac{1}{(a_1 + q_k)(a_1 + q_l)} + \sum_i^{2\dots n} \frac{(a_1 - a_i)x_i^2}{(a_1 + q_k)(a_1 + q_l)(a_i + q_k)(a_i + q_l)} \right\}.$$

Naturalmente quando  $k \neq l$  deve risultare  $a_{kl} = 0$ , perchè il sistema confocale (10\*) è un sistema  $n^{\text{plo}}$  ortogonale, la qual cosa del resto è facile verificare, sussistendo l'identità.

$$\sum_i^{2\dots n} \frac{(a_i - a_1)x_i^2}{(a_i + q_k)(a_i + q_l)} = 1, \text{ per } k \neq l.$$

Per  $l = k$  abbiamo poi

$$a_{kk} = \overline{H}_k^2 = \frac{1}{4x_1^2 (a_1 + q_k)^2} \left\{ 1 + \sum_i^{2\dots n} \frac{(a_1 - a_i)x_i^2}{(a_i + q_k)^2} \right\},$$

ossia per la (8)

$$(11) \overline{H}_k^2 = \frac{1}{4x_1^2 (a_1 + q_k)^2} \left\{ 1 - \sum_i^{2\dots n} \frac{(a_i + q_1)(a_i + q_2) \dots (a_i + q_n)}{(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)} \frac{1}{(a_i + q_k)^2} \right\}$$

Ora la quantità fra parentesi } ' nel secondo membro eguaglia la frazione

$$\frac{(q_k - q_1)(q_k - q_2) \dots (q_k - q_{k-1})(q_k - q_{k+1}) \dots (q_k - q_n)}{(a_2 + q_k)(a_3 + q_k) \dots (a_n + q_k)},$$

come si vede decomponendo quest'ultima in frazioni semplici rispetto a  $q_k$ . Sostituendo poi nella (11) per  $x_1^2$  il suo valore dato dalla (8) per  $i = 1$ , ne viene

$$\overline{H}_k^2 = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}{(a_1 + q_1)(a_1 + q_2) \dots (a_1 + q_n)} \cdot \frac{H_k^2}{a_1 + q_k}.$$

Pel quadrato dell'elemento lineare

$$\overline{ds^2} = \sum_i d\bar{x}_i^2$$

abbiamo in fine

$$\overline{ds^2} = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}{(a_1 + q_1)(a_1 + q_2) \dots (a_1 + q_n)} \left\{ \frac{H_1^2 dq_1^2}{a_1 + q_1} + \frac{H_2^2 dq_2^2}{a_1 + q_2} + \dots + \frac{H_n^2 dq_n^2}{a_1 + q_n} \right\}.$$

Da questa formola, che per  $n = 3$  si riduce alla (6), si trae la conferma che su due quadriche corrispondenti nei sistemi confocali (7), (10\*) si corrispondono le linee geodetiche.

**Matematica.** — *Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni  $\mathfrak{A}$  di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota II del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Nel primo § di questa Nota, prosecuzione immediata della Nota precedente di cui si sono conservate tutte le notazioni, viene ulteriormente discussa e semplificata, nel supposto delle caratteristiche intere, una formola generale già in quella stabilita per caratteristiche reali o complesse quali si vogliano. Il secondo § è dedicato alla determinazione di tutte quelle espressioni, di tipo analogo a quello che si presenta nella formola fondamentale di Jacobi, che godono delle proprietà di essere *invarianti* rispetto alla sostituzione ortogonale jacobiana. Dimostro come esse sieno tutte racchiuse nell'unica espressione generale:

$$[\gamma, g] + (-1)^{\varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g) + \eta\gamma_1} [\gamma + \varepsilon, g + \eta].$$

Queste ricerche si applicano poi, nel terzo §, all'ulteriore semplificazione della formola generale di addizione delle funzioni  $\mathfrak{A}$  con caratteristiche intere. Questa formola generale, che presentava finora l'inconveniente di essere di forma *quadrinomia*, viene ridotta a forma *binomia*, pur mantenendo la completa generalità delle caratteristiche.

I.

1. Nel supposto che le caratteristiche  $g$  e  $\gamma$  (e quindi anche le  $g'$  e  $\gamma'$ ) siano dei numeri razionali interi soddisfacenti alle condizioni:

$$\Sigma \gamma \equiv \Sigma g \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

si è stabilita (Nota I, § II) la formola

$$(1) \quad 2[\gamma, g] = [\gamma', g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma' + 1, g' + 1] + \\ + [\gamma' + 1, g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma', g' + 1].$$

Se si dà a  $\gamma$  l'incremento di 2, cosicchè le  $g'_1, g'_2, g'_3, g'_4$  riceveranno l'incremento di 1, troviamo, tenendo presenti le formole generali:

$$\mathfrak{D}_{\gamma+2, g}(u) = e^{2\pi i g} \mathfrak{D}_{\gamma, g}(u), \quad \mathfrak{D}_{\gamma, g+2}(u) = e^{3\pi i \gamma} \mathfrak{D}_{\gamma, g}(u),$$

la relazione:

$$2e^{3\pi i \gamma_1} [\gamma, g] = [\gamma', g' + 1] + e^{-2\pi i g_1} [\gamma' + 1, g' + 1] + \\ + e^{-3\pi i \gamma_1 + 6\pi i \gamma_1} [\gamma', g'] + e^{-\pi i (3\gamma_1 - 6\gamma_1 + 2g_1)} [\gamma' + 1, g']$$

che è la stessa (1) moltiplicata per  $e^{-3\pi i \gamma_1}$ . Similmente si riconoscerebbe che la (1) ricade in sè medesima, se si dà l'incremento di 2 a  $\gamma_1$ .

Diamo ora l'incremento di 2 ad una delle  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , p. es. alla  $\gamma_2$ , cosicchè le  $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$  si cangieranno risp. in  $\gamma'_1 + 1, \gamma'_2 + 1, \gamma'_3 - 1, \gamma'_4 - 1$ . La (1) diviene così:

$$2e^{\pi i g_2} [\gamma, g] = e^{2\pi i (-g'_2 - g'_4)} [\gamma' + 1, g'] + e^{-2\pi i g_1 + 2\pi i (g'_1 + g'_2)} [\gamma', g'] \\ + e^{-3\pi i \gamma_1 - 2\pi i (g'_3 + g'_4)} [\gamma' + 1, g' + 1] + e^{-\pi i (3\gamma_1 + 2g_1) + 2\pi i (g'_1 + g'_2)} [\gamma', g' + 1]$$

che è ancora la stessa (1) moltiplicata per

$$e^{-2\pi i g_2} = e^{-\pi i (g'_1 + g'_2 - g'_3 - g'_4)}.$$

Affatto similmente si riconoscerebbe che la formola (1) ritorna in sè stessa, se si dà l'incremento di 2 ad una delle  $g_2, g_3, g_4$ .

Di qui segue evidentemente che *per avere tutte le relazioni distinte contenute nella formola generale (1), basterà dare alle  $\gamma$  e  $g$  i soli valori 0 ed 1.*

2. Se inoltre facciamo astrazione da una sostituzione qualunque fra le caratteristiche  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , la quale avrebbe per sola conseguenza una sostituzione ad essa simile fra le corrispondenti caratteristiche trasformate  $\gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$ ,

vediamo che basterà soltanto considerare per le  $\gamma$  i quattro casi seguenti:

$$(a) \begin{cases} \gamma_1 = 0 & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 0 & \gamma_4 = 0 & ; & \gamma'_1 = 0 & \gamma'_2 = 0 & \gamma'_3 = 0 & \gamma'_4 = 0 \\ \gamma_1 = 1 & \gamma_2 = 1 & \gamma_3 = 0 & \gamma_4 = 0 & ; & \gamma'_1 = 1 & \gamma'_2 = 1 & \gamma'_3 = 0 & \gamma'_4 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \gamma_1 = 0 & \gamma_2 = 0 & \gamma_3 = 1 & \gamma_4 = 1 & ; & \gamma'_1 = 1 & \gamma'_2 = -1 & \gamma'_3 = 0 & \gamma'_4 = 0 \\ \gamma_1 = 1 & \gamma_2 = 1 & \gamma_3 = 1 & \gamma_4 = 1 & ; & \gamma'_1 = 2 & \gamma'_2 = 0 & \gamma'_3 = 0 & \gamma'_4 = 0 \end{cases}.$$

Nei due casi (a), essendo  $\gamma'_i = \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), la formola (1) ci dà:

$$(1)' \quad 2[\gamma, g] = [\gamma', g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g' + 1]' + \\ + [\gamma + 1, g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g' + 1]'$$

e nei due casi (b), essendo  $\gamma'_i \equiv \gamma_i + 1 \pmod{2}$ :

$$2[\gamma, g] = [\gamma + 1, g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g' + 1]' + \\ + [\gamma, g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g' + 1]'$$

che è la stessa relazione precedente. La formola (1) equivale dunque assolutamente alla formola più semplice (1)'.

In quest'ultima formola basterà ora similmente di considerare per le  $g$  i due casi analoghi ad (a) e i due casi analoghi a (b). Nei casi analoghi ad (a), essendo  $g'_i = g_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), la formola (1)' ci dà:

$$(1)'_{\alpha} \quad 2[\gamma, g] = [\gamma, g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g + 1]' + \\ + [\gamma + 1, g] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]'$$

Nei casi analoghi a (b) la formola (1)' ci dà invece, poichè  $g'_1 = g + 1$ ,  $g'_i = g_i - 1$  ( $i = 2, 3, 4$ ):

$$2[\gamma, g] = (-1)^{\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} [\gamma, g + 1]' - [\gamma + 1, g]' - \\ - (-1)^{\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} [\gamma + 1, g + 1]' + [\gamma, g]'$$

o anche, poichè  $\Sigma g \equiv 0 \pmod{2}$ :

$$(1)'_{\beta} \quad 2[\gamma, g] = (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]' - [\gamma + 1, g]' - \\ - (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g + 1]' + [\gamma, g]'$$

Le due formole così ottenute (1)' $_{\alpha}$  ed (1)' $_{\beta}$  si possono però, evidentemente, sintetizzare nell'unica formola:

$$2[\gamma, g] = [\gamma, g'] + (-1)^{g'_1 - g_1} (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g + 1]' + \\ + (-1)^{g'_1 - g_1} [\gamma + 1, g'] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]'$$

o meglio:

$$2[\gamma, g] = [\gamma, g] + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]' + \\ + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g]' + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]'$$

o anche più compendiosamente:

$$(I) \quad 2[\gamma, g] = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=1} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} (-1)^{\gamma\gamma_1 + \varepsilon(g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g)} [\gamma + \varepsilon, g + \gamma_1]'.$$

II.

1. Se nella formola stabilita sopra:

$$(I) \quad 2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]' + \\ + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g]' + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]'$$

che sussiste qualunque siano i numeri interi  $\gamma$  e  $g$ , purchè soddisfacenti alle condizioni:

$$\Sigma g \equiv \Sigma \gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2),$$

diamo a tutte le  $\gamma$  l'incremento di 1, ne deduciamo:

$$2[\gamma + 1, g] = [\gamma + 1, g]' - (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma, g + 1]' + \\ + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma, g]' - (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g + 1]'$$

e dal paragone delle due formole segue facilmente:

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} [\gamma, g] + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g] &= [\gamma, g]' + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g]' \\ [\gamma, g] - (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g] &= (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]' + \\ &+ (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]'. \end{aligned} \right.$$

Se invece nella (I) cangiamo le  $g$  in  $g + 1$ , otteniamo:

$$2[\gamma, g + 1] = [\gamma, g + 1]' - (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g]' - \\ - (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]' - (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g]'$$

e dal paragone di questa formola colla (I) segue:

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} [\gamma, g] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1] &= [\gamma, g]' + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]' \\ [\gamma, g] - (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1] &= (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g]' + \\ &+ (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]'. \end{aligned} \right.$$

Finalmente, se nella (I) cambiamo le  $\gamma$  in  $\gamma + 1$  e le  $g$  in  $g + 1$ , otteniamo:

$$2[\gamma + 1, g + 1] = [\gamma + 1, g + 1]' + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma, g]' - \\ - (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma, g + 1]' - (-1)^{\gamma_1} [\gamma + 1, g]'$$

e paragonando questa formola colla (I):

$$(C) \quad \begin{cases} [\gamma, g] + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1] = [\gamma, g]' + \\ + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]' \\ [\gamma, g] - (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1] = \\ = (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g]' + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]'. \end{cases}$$

2. Le formole (A), (B), (C) ci fanno conoscere tre espressioni generali, funzioni delle quattro variabili  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , le quali godono della proprietà di essere *invarianti assoluti* rispetto alla sostituzione ortogonale:

$$z'_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \\ z'_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \\ z'_3 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \\ z'_4 = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_3 + z_4).$$

È importante di dimostrare, come ora faremo, che non esistono altre espressioni, di tipo analogo, che godano della proprietà invariantiva, oltre le tre già trovate:

$$(D) \quad \begin{cases} [\gamma, g] + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g] \\ [\gamma, g] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1] \\ [\gamma, g] + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1]. \end{cases}, \quad \Sigma_\gamma \equiv \Sigma_g \equiv 0 \pmod{2}$$

3. Supponiamo che l'espressione

$$(1) \quad A \cdot [\gamma, g] + B \cdot [\mu, m]$$

in cui A e B sono due costanti, goda della proprietà invariantiva; anzi supponiamo, più generalmente, che si abbia una relazione, identica nelle  $z$ ,

della forma:

$$(1') \quad A \cdot [\gamma, g] + B \cdot [\mu, m] = A_1 [\gamma, g]' + B_1 \cdot [\mu, m]'$$

essendo  $A_1$  e  $B_1$  del pari costanti.

Poichè

$$2[\gamma, g]' = [\gamma, g] + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1] + \\ + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1]$$

e similmente

$$2[\mu, m]' = [\mu, m] + (-1)^{\mu_1 + m_1 + \frac{1}{2}\Sigma m} [\mu + 1, m + 1] + \\ + (-1)^{m_1 + \frac{1}{2}\Sigma m} [\mu + 1, m] + (-1)^{\mu_1} [\mu, m + 1],$$

dovrà essere identicamente:

$$0 = (A_1 - 2A) [\gamma, g] + (B_1 - 2B) [\mu, m] + \\ + A_1 \{ (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1] + \\ + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1] \} + \\ + B_1 \{ (-1)^{\mu_1 + m_1 + \frac{1}{2}\Sigma m} [\mu + 1, m + 1] + \\ + (-1)^{\mu_1 + \frac{1}{2}\Sigma m} [\mu + 1, m] + (-1)^{\mu_1} [\mu, m + 1] \}.$$

Di qui si scorge facilmente, dovendosi ritenere le  $A$  e  $B$  entrambe diverse da zero ed essendo le  $z_1, z_2, z_3, z_4$  e quindi anche le  $\mathcal{P}_{\gamma g}(z_1), \mathcal{P}_{\gamma g}(z_2), \mathcal{P}_{\gamma g}(z_3), \mathcal{P}_{\gamma g}(z_4)$  fra loro indipendenti, e poichè inoltre, come è ben noto, le quattro funzioni  $\mathcal{P}_{00}(z), \mathcal{P}_{01}(z), \mathcal{P}_{10}(z), \mathcal{P}_{11}(z)$  sono fra loro linearmente indipendenti, che uno dei quattro prodotti  $[\mu, m], [\mu + 1, m + 1], [\mu + 1, m], [\mu, m + 1]$  deve coincidere, a meno di un coefficiente costante, col prodotto  $[\gamma, g]$ . Possiamo dunque ritenere, mediante una scelta opportuna della costante  $B$ , che si abbia precisamente:

$$\mu_i = \gamma_i + \varepsilon, \quad m_i = g_i + \eta \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

essendo  $\varepsilon$  ed  $\eta$  uguali a zero ovvero all'unità; cosicchè l'identità precedente prende la forma:

$$(A_1 - 2A) \cdot [\gamma, g] + \\ + A_1 \{ (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g + 1] + \\ + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + 1, g] + (-1)^{\gamma_1} [\gamma, g + 1] \} \\ = - (B_1 - 2B) \cdot [\gamma + \varepsilon, g + \eta] - \\ - B_1 \{ (-1)^{\varepsilon + \eta + \gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + \varepsilon + 1, g + \eta + 1] + \\ + (-1)^{\eta + g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g} [\gamma + \varepsilon + 1, g + \eta] + (-1)^{\varepsilon + \gamma_1} [\gamma + \varepsilon, g + \eta + 1] \}.$$

Eguagliamo nei due membri i coefficienti di  $[\gamma + i, g + j]$ , essendo  $i, j$  una coppia di numeri, aventi il valore 0 oppure il valore 1, la quale non coincida nè colla coppia 0, 0, nè colla coppia  $\varepsilon, \eta$ . Se, essendo  $a$  un intero qualunque, indichiamo in generale con  $\bar{a}$  quello dei due numeri 0 ed 1 pel quale si ha  $\bar{a} \equiv a \pmod{2}$ , dovremo cercare nel secondo membro il coefficiente di

$$[\gamma + \varepsilon + \overline{\varepsilon + i}, g + \eta + \overline{\eta + j}].$$

Esso è dato, per l'ipotesi fatta che non sia simultaneamente  $\varepsilon + i \equiv 0$  ed  $\eta + j \equiv 0$ , da

$$-B_1 (-1)^{(\varepsilon+i)(\eta+g_1+\frac{1}{2}\Sigma g) + (\eta+j)(\gamma_1+\varepsilon)}.$$

Abbiamo dunque l'uguaglianza:

$$-A_1 \cdot (-1)^{i(g_1+\frac{1}{2}\Sigma g)+j\gamma_1} = B_1 (-1)^{(\varepsilon+i)(\eta+g_1+\frac{1}{2}\Sigma g) + (\eta+j)(\gamma_1+\varepsilon)}$$

d'onde

$$-A_1 = (-1)^{\varepsilon(g_1+\frac{1}{2}\Sigma g)+\eta\gamma_1+i\eta+j\varepsilon} B_1$$

e anche, più semplicemente:

$$A_1 = (-1)^{\varepsilon(g_1+\frac{1}{2}\Sigma g)+\eta\gamma_1} B_1,$$

poichè dall'ipotesi fatta che la coppia  $i, j$  sia diversa dalla coppia 0, 0 e dalla coppia  $\varepsilon, \eta$ , segue facilmente che

$$i\eta + j\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$$

Se poi si riflette che le relazioni fra le  $z$  e le  $z'$  non sono alterate dallo scambio fra le  $z$  e le corrispondenti  $z'$ , si vede facilmente che, a quello stesso modo con cui dall'identità (1) si è dedotta la relazione (2), si deve poter anche dedurre la relazione consimile

$$(3) \quad A = (-1)^{\varepsilon(g_1+\frac{1}{2}\Sigma g)+\eta\gamma_1} B$$

Le uguaglianze (2) e (3) ci dicono che, fatta astrazione da un semplice coefficiente costante, l'espressione invariante cercata è necessariamente della forma:

$$(II) \quad [\gamma, g] + (-1)^{\varepsilon(g_1+\frac{1}{2}\Sigma g)+\eta\gamma_1} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]$$

dove  $\varepsilon$  ed  $\eta$  possono assumere a piacere i valori 0 ed 1, eccettuata soltanto la coppia di valori  $\varepsilon = 0, \eta = 0$ .

In effetto la forma (II) così limitata coincide precisamente coll'insieme delle tre forme (D) da noi già prima ottenute.

4. L'espressione generale degli invarianti da noi così determinata dà luogo alla relazione

$$\prod_{i=1}^{i=4} \mathcal{P}_{\gamma_i g_i}(z_i) + (-1)^{\varepsilon(g_i + \frac{1}{2} \Sigma g) + n \gamma_1} \prod_{i=1}^{i=4} \mathcal{P}_{\gamma_i + \varepsilon, g_i + n}(z_i) = \\ = \prod_{i=1}^{i=4} \mathcal{P}_{\gamma_i g_i}(z'_i) + (-1)^{\varepsilon(g_i + \frac{1}{2} \Sigma g) + n \gamma_1} \prod_{i=1}^{i=4} \mathcal{P}_{\gamma_i + \varepsilon, g_i + n}(z'_i)$$

la quale resta sempre vera comunque si scambino fra loro le  $z_2, z_3, z_4$ , purchè si eseguisca al tempo stesso l'analoga sostituzione fra le  $z'_2, z'_3, z'_4$ , come chiaramente appare dalle relazioni che legano le  $z$  alle  $z'$ . Si vede di qui che, ad abbreviare il calcolo di tutti gli invarianti contenuti nel nostro tipo generale, gioverà di non riguardare come distinti quelli che differiscono per una semplice permutazione fra le tre coppie di caratteristiche  $\gamma_2, g_2; \gamma_3, g_3; \gamma_4, g_4$ .

Se inoltre introduciamo, come spesso si usa, in luogo dei simboli

$$\mathcal{P}_{01}, \quad \mathcal{P}_{11}, \quad \mathcal{P}_{10}, \quad \mathcal{P}_{00}$$

risp. i simboli più semplici:

$$\mathcal{P}_0, \quad \mathcal{P}_1, \quad \mathcal{P}_2, \quad \mathcal{P}_3,$$

e poniamo anche per brevità:

$$\mathcal{P}_a(z_1) \cdot \mathcal{P}_b(z_2) \cdot \mathcal{P}_c(z_3) \cdot \mathcal{P}_d(z_4) = [a \ b \ c \ d],$$

troveremo che la nostra formola generale dà luogo ai 30 invarianti che qui riportiamo:

$$\begin{array}{lll} \{ [3333] + [2222] & [3333] + [0000] & [3333] + [1111] \\ \{ [0000] - [1111] & [1111] - [2222] & [2222] - [0000] \\ \{ [0033] + [3300] & [0033] + [1122] & [0033] + [2211] \\ \{ [1122] - [2211] & [2211] - [3300] & [3300] - [1122] \\ \{ [3322] + [2233] & [3322] + [0011] & [3322] + [1100] \\ \{ [0011] - [1100] & [1100] - [2233] & [2233] - [0011] \\ \{ [0022] + [2200] & [0022] + [1133] & [0022] + [3311] \\ \{ [1133] - [3311] & [3311] - [2200] & [2200] - [1133] \\ \{ [1302] + [2031] & [1302] + [3120] & [1302] + [0213] \\ \{ [3120] - [0213] & [0213] - [2031] & [2031] - [3120] \end{array}$$

5. La dimostrazione, da noi data all'art. 3, che i soli invarianti del tipo

$$[\gamma, g] + B \cdot [\mu, m]$$

sono quelli compresi nella formola (II), presupponeva implicitamente, in quanto

ci siamo serviti della formola (I), che le caratteristiche  $\gamma, g, \mu, m$  soddisfacessero alle condizioni:

$$\Sigma\gamma \equiv \Sigma g \equiv \Sigma\mu \equiv \Sigma m \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

Sarebbe quindi necessario, a complemento della dimostrazione data, di accertare che effettivamente non possono esistere invarianti con caratteristiche intere le quali non soddisfacciano a queste condizioni. A quest'oggetto basterà applicare alla relazione presunta (1)', in luogo della formola (I), la formola (IV) della Nota prima, e si riconoscerà senza difficoltà che la relazione (1)' non non potrebbe sussistere per valori non tutti interi delle caratteristiche trasformate  $\gamma', g', \mu', m'$  (ossia appunto per valori delle  $\gamma, g, \mu, m$  non soddisfacenti le dette condizioni), se si tenga presente che fra le funzioni  $\mathfrak{A}\gamma g(z)$ , in cui le  $\gamma, g$  possano assumere i valori  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ , non può intercedere alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti costanti.

### III.

1. Se nella formola (I) poniamo (come nel § III della prima Nota):

$$z_1 = u + v, \quad z_2 = u - v, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0,$$

cosicchè

$$z'_1 = u, \quad z'_2 = u, \quad z'_3 = v, \quad z'_4 = v,$$

essa ci dà la relazione:

$$\begin{aligned} & 2 \mathfrak{A}_{\gamma_1 g_1}(u+v) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_2 g_2}(u-v) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_3 g_3}(0) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_4 g_4}(0) = \\ & = \mathfrak{A}_{\gamma_1 g_1}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_2 g_2}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_3 g_3}(v) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_4 g_4}(v) + \\ & + (-1)^{\gamma_1 + g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g} \mathfrak{A}_{\gamma_1 + 1, g_1 + 1}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_2 + 1, g_2 + 1}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_3 + 1, g_3 + 1}(v) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_4 + 1, g_4 + 1}(v) + \\ & + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g} \mathfrak{A}_{\gamma_1 + 1, g_1}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_2 + 1, g_2}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_3 + 1, g_3}(v) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_4 + 1, g_4}(v) + \\ & + (-1)^{\gamma_1} \mathfrak{A}_{\gamma_1, g_1 + 1}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_2, g_2 + 1}(u) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_3, g_3 + 1}(v) \cdot \mathfrak{A}_{\gamma_4, g_4 + 1}(v) \end{aligned}$$

in cui le caratteristiche  $\gamma$  e  $g$  sono degli interi qualsivogliano soddisfacenti alle sole condizioni:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2)$$

A questa formola che già ci fornisce il teorema di addizione sotto una forma generale più semplice di quella ottenuta nella prima Nota, è però possibile, come ora vedremo, di sostituirla un'altra ancora più semplice, in quanto, cioè, pur mantenendo la generalità delle caratteristiche, ci permet-

terà di esprimere la formola di addizione direttamente sotto forma *binomia*, come si sa potersi fare effettivamente nei singoli casi particolari, anzichè sotto la forma *quadrinomia* che sin quì si aveva.

2. A quest'oggetto poniamo dapprima nella formola generale degli invarianti trovata sopra:

$$[\gamma, g] + (-1)^{\varepsilon(g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g) + \eta \gamma_1} [\gamma + \varepsilon, g + \eta] = \\ = [\gamma, g]' + (-1)^{\varepsilon(g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g) + \eta \gamma_1'} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

per la variabile  $z_4$  il valore zero; e poniamo inoltre

$$\varepsilon = \overline{\gamma_4 + 1} \quad , \quad \eta = \overline{g_4 + 1}$$

intendendo, come sopra, con  $\overline{a}$  il resto (uguale a zero od all'unità) della divisione di  $a$  per 2.

Poichè:

$$\mathfrak{P}_{\gamma_4 + \overline{\gamma_4 + 1}, g_4 + \overline{g_4 + 1}}(0) = \mathfrak{P}_{11}(0) = 0,$$

la formola ora riportata ci dà:

$$\mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(z_1) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(z_2) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(z_3) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_4 g_4}(0) = \prod_{i=1}^4 \mathfrak{P}_{\gamma_i g_i}(z'_i) + \\ + (-1)^{(\gamma_4 + 1)(g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g) + (g_4 + 1)\gamma_1} \prod_{i=1}^4 \mathfrak{P}_{\gamma_i + \overline{\gamma_4 + 1}, g_i + \overline{g_4 + 1}}(z'_i).$$

Ma, se si tiene presente che

$$\mathfrak{P}_{\gamma_i + \overline{\gamma_4 + 1}, g_i + \overline{g_4 + 1}}(z'_i) = (-1)^{\mu_i(\gamma_i + \gamma_4 + 1)} \mathfrak{P}_{\gamma_i + \gamma_4 + 1, g_i + g_4 + 1}(z'_i),$$

essendo  $\mu_i$  il numero intero che soddisfa l'uguaglianza:

$$\overline{g_i + 1} = g_i + 1 + 2\mu_i,$$

si riconosce facilmente che:

$$\prod_{i=1}^4 \mathfrak{P}_{\gamma_i + \overline{\gamma_4 + 1}, g_i + \overline{g_4 + 1}}(z'_i) = \prod_{i=1}^4 \mathfrak{P}_{\gamma_i + \gamma_4 + 1, g_i + g_4 + 1}(z'_i),$$

onde si può scrivere anche:

$$\mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(z_1) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(z_2) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(z_3) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_4 g_4}(0) = \prod_{i=1}^4 \mathfrak{P}_{\gamma_i g_i}(z'_i) + \\ + (-1)^{(\gamma_4 + 1)(g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g) + (g_4 + 1)\gamma_1} \prod_{i=1}^4 \mathfrak{P}_{\gamma_i + \gamma_4 + 1, g_i + g_4 + 1}(z'_i)$$

Se ora in questa formola poniamo  $z_1 = u + v$ ,  $z_2 = u - v$ ,  $z_3 = 0$ , otteniamo appunto una formola generale di addizione sotto forma *binomia*,

cioè:

$$[III] \left\{ \begin{aligned} & \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u+v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u-v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(0) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_4 g_4}(0) = \\ & = \mathfrak{P}_{\gamma_1 g_1}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 g_2}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 g_3}(v) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_4 g_4}(v) + \\ & + \alpha \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_1 + \gamma'_4 + 1, g_1 + g_4 + 1}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2 + \gamma'_4 + 1, g_2 + g_4 + 1}(u) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3 + \gamma'_4 + 1, g_3 + g_4 + 1}(v) \cdot \mathfrak{P}_{11}(v) \end{aligned} \right.$$

dove:

$$\alpha = (-1)^{(\gamma_4 + 1)(g_1 + \frac{1}{2} \Sigma g) + (g_4 + 1)\gamma_1 + g_4}$$

In questa formola le caratteristiche  $g$  e  $\gamma$  sono numeri interi assoggettati alle sole condizioni:

$$\Sigma \gamma \equiv \Sigma g \equiv 0 \pmod{2}.$$

3. Al secondo membro della formola (III) si potrebbero sostituire anche altre espressioni le quali si potrebbero ottenere procedendo sulle seconde formole dei tre gruppi (A), (B), (C) del secondo § in modo analogo a quello con cui ci siamo serviti delle prime. Ciò è del resto in corrispondenza al fatto ben noto che le formole di addizione ammettono, in ogni singolo caso particolare, espressioni diverse deducibili le une dalle altre mediante le relazioni quadratiche che intercedono fra le funzioni  $\mathfrak{P}$  fondamentali.

Mi riservo pertanto di ritornare in altra occasione su questi particolari, anche in riguardo di altre formole notevoli relative alla rappresentazione generica dei vari tipi di relazioni che intercedono fra le funzioni  $\mathfrak{P}$  di una variabile.

**Astronomia.** — *La stella nuova (variabile?) in Gemini. Le ultime posizioni della cometa 1903 a.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

La nuova stella in Gemini, scoperta da Turner ad Oxford, fu osservata da me all'equatoriale di 39 cm. come segue:

|        |                  |                                                   |
|--------|------------------|---------------------------------------------------|
| 1903 o | Ascensione retta | 6 <sup>h</sup> 38 <sup>m</sup> 0 <sup>s</sup> .51 |
|        | "                | + 30° 2'16".0                                     |

Io stimai l'astro fra 7.3 e 7.5 e di colore giallo il 26 marzo.

Dal carattere spettrale l'astro dovrebbe essere una stella nuova, od anche una variabile del tipo di Mira Ceti. Probabilmente decresce di splendore.

Le ultime posizioni della cometa 1903 *a* sono le seguenti:

|               |                                                |          |                                                        |
|---------------|------------------------------------------------|----------|--------------------------------------------------------|
| 1903 marzo 6  | 7 <sup>h</sup> 2 <sup>m</sup> 6 <sup>s</sup>   | R. C. R. |                                                        |
| α apparente   | 0 11 12. 20                                    | (9.659)  |                                                        |
| δ " +         | 16° 51' 17". 6                                 | (0.737)  |                                                        |
| 1903 marzo 10 | 6 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup> 29 <sup>s</sup> | R. C. R. |                                                        |
| α apparente   | 0 18 32. 36                                    | (9.660)  |                                                        |
| δ " +         | 17° 24' 42". 2                                 | (0.734)  |                                                        |
| 1903 marzo 11 | 7 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup> 3 <sup>s</sup>   | R. C. R. |                                                        |
| α apparente   | 0 20 9. 14                                     | (9.661)  |                                                        |
| δ " +         | 17° 23' 31". 3                                 | (0.742)  |                                                        |
| 1903 marzo 13 | 6 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup> 25 <sup>s</sup> | R. C. R. | 7 <sup>h</sup> 1 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup> R. C. R. |
| α apparente   | 0 22 56. 73                                    | (9.660)  | 0 22 57. 51 (9.660)                                    |
| δ " +         | 17° 5' 20". 8                                  | (0.738)  | + 17° 5' 12". 9 (0.747)                                |
| 1903 marzo 14 | 7 <sup>h</sup> 6 <sup>m</sup> 51 <sup>s</sup>  | R. C. R. |                                                        |
| α apparente   | 0 24 7. 43                                     | (9.659)  |                                                        |
| δ " +         | 16° 46' 34". 7                                 | (0.753)  |                                                        |
| 1903 marzo 18 | 7 <sup>h</sup> 8 <sup>m</sup> 41 <sup>s</sup>  | R. C. R. |                                                        |
| α apparente   | 0 26 51. 66                                    | (9.652)  |                                                        |
| δ " +         | 14° 13' 16". 5                                 | (0.760)  |                                                        |

Le osservazioni dell'11, 13 (II) e 14 marzo furono fatte dal dott. Emilio Bianchi, nuovo assistente dell'Osservatorio.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce*. Nota V del Socio G. CIAMICIAN e di P. SILBER.

Dopo la nostra prima comunicazione <sup>(1)</sup> intorno a questo argomento, abbiamo avuto più volte occasione di fare diverse esperienze intorno all'azione della luce sull'aldeide benzoica, sul benzofenone e su qualche altro composto chetonico in presenza di alcoli o di altri solventi, e queste osservazioni possono però servire di complemento a quanto abbiamo esposto nel suindicato lavoro. Questa quinta Nota viene ad essere in tal modo la diretta continuazione della prima.

#### *Aldeide benzoica.*

Sul contegno di questa sostanza in soluzione alcoolica non abbiamo nulla da aggiungere a quanto abbiamo esposto a suo tempo; come allora fu dimostrato, l'aldeide benzoica si trasforma nel miscuglio dei due idrobenzoini, ma dà contemporaneamente una ragguardevole quantità di resina. Era perciò

<sup>(1)</sup> Questi Rendiconti, vol. X, I, pag. 92 (1901).

necessario, onde avere un quadro completo della reazione, vedere quale fosse il comportamento dell'aldeide benzoica alla luce senza l'intervento di un altro corpo.

A tale scopo abbiamo lasciato esposti per tutto il periodo estivo autunnale 35 gr. di aldeide in un tubo chiuso. Si ottiene una massa giallo-bruna con qualche accenno di cristallizzazioni d'acido benzoico. Trattando con etere e distillando con vapore acqueo passano piccole quantità d'aldeide inalterata, la parte maggiore (26 gr.) resta indietro in forma d'una massa resinosa solida e fragile. Per purificarla, venne sciolta in etere e la soluzione lavata con carbonato sodico, svaporato l'etere e ripreso il residuo con benzolo. Con etere petrolico si ottiene un precipitato bianco e polverulento. Il prodotto seccato a 80°, fonde fra 125 e 130° ed ha la stessa composizione dell'aldeide impiegata. Il peso molecolare, determinato in benzolo, condurrebbe alla formola:



Si tratta dunque di un semplice *processo di polimerizzazione*.

La resina che si forma in soluzione alcoolica sembra avere un'altra composizione, corrispondente alla formola:



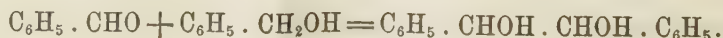
trattandosi però di sostanze amorfe è difficile poter accertare piccole differenze nell'analisi, e però è possibile che in entrambi i casi si formi lo stesso prodotto.

*Aldeide benzoica ed alcool benzilico.*

Ci parve interessante studiare il contegno alla luce di questa coppia di sostanze per vedere se l'alcool benzilico fosse in grado di reagire come l'etilico. Così è diffatti. Noi abbiamo lasciata esposta alla luce durante il periodo estivo autunnale una soluzione di 5 gr. di aldeide in 5 gr. di alcool. Si ebbe un liquido giallo pieno di cristalli senza colore. Questi ultimi, separati dalla parte liquida e purificati dal benzolo, non sono altro che l'idrobenzoïno, dal punto di fusione 136°.

La parte oleosa venne distillata con vapore acqueo, per cui passano piccole tracce di aldeide e l'alcool benzilico rimasto inalterato. Il residuo è formato in gran parte (4,4 gr.) dalla solita resina. Nell'acqua, con cui venne bollita, si trovano disciolti il predetto idrobenzoïno e l'*isoidrobenzoïno* dal punto di fusione 121°.

Se si fa astrazione della resina, il processo può essere rappresentato nel seguente modo:



*Benzofenone ed alcool benzilico.*

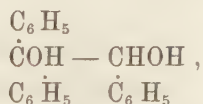
Come era da prevedersi, l'alcool benzilico per azione della luce può ridurre anche il benzofenone, ma la reazione è più complicata che nel caso precedente, perchè si formano diversi prodotti. Noi abbiamo lasciato esposti alla luce durante l'intero periodo estivo autunnale, a più riprese, complessivamente 50 gr. di benzofenone sciolti in 100 gr. di alcool benzilico.

Dal liquido limpido si depongono da prima grossi cristalli di benzopinacone, a cui, più tardi, si aggiungono dei mammelloncini bianchi, formati da piccoli aghetti. Filtrando alla pompa, si separa la materia solida (circa 50 gr.) dall'olio.

La prima venne fatta cristallizzare anzitutto dall'alcool e si ebbe così, quale parte meno solubile, il *benzopinacone* con tutte le sue caratteristiche proprietà. Punto di fusione 186°. Questo è il prodotto principale. Dalla soluzione alcoolica si separano per concentrazione altre quantità di questo corpo, ma infine, svaporando l'alcool, resta indietro una massa sciropposa, che lentamente cristallizza; questa a sua volta può essere purificata dal benzolo, da cui si ottiene in aghi privi di colore che fondono a 168°. Il composto che accompagna il benzopinacone ha la formula:



ed è a quanto ci consta una nuova sostanza. Essa è insolubile nell'acqua, mentre si scioglie facilmente negli ordinari solventi organici. Si forma in quantità non molto rilevante (cca. 7 gr.); la sua costituzione potrebbe essere la seguente:



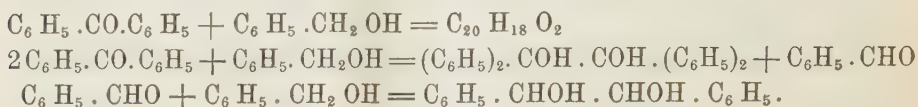
ma questa formola ha bisogno di ulteriori prove sperimentali per potere essere accettata. A differenza del benzopinacone, questo nuovo composto non si scinde, se viene scaldato per qualche tempo sopra il suo punto di fusione.

La parte oleosa del prodotto venne distillata in corrente di vapore acqueo per eliminare l'alcool benzilico rimasto inalterato; una prova fatta per accertare l'eventuale presenza d'aldeide benzoica dette risultato negativo. Nel pallone di distillazione resta indietro una resina (circa 14 gr.), mentre nel liquido acquoso passa una sostanza cristallina, estraibile con etere (circa 12 gr.); in questa venne dimostrata la presenza di *idrobenzoïno*, dal punto di fusione 138°, ma oltre ad esso si sarà di certo formato anche l'*isidrobenzoïno*.

La resina che rimane insolubile nell'acqua, contiene però ancora piccole quantità del suindicato composto  $C_{20} H_{18} O_2$ , che si possono ottenere per trat-

tamento con alcool metilico; in esso si scioglie la resina, mentre restano indietro i cristalli, che purificati dal benzolo fondono a 168°.

La reazione che, per influenza della luce, si impegna fra l'alcool benzoico ed il benzofenone può essere riassunta nel seguente modo: l'alcool reagendo sul chetone lo trasforma per la maggior parte in pinacone, mentre si produrrà aldeide benzoica; in via secondaria l'alcool si addiziona al chetone dando il composto  $C_{20}H_{18}O_2$ . L'aldeide benzoica non rimane però inalterata, in parte si polimerizza nella solita resina ed in parte coll'alcool benzoico produce gli idrobenzoini. Non tenendo conto della resina, la reazione potrebbe essere rappresentata col seguente schema:



*Benzofenone ed acido formico.*

Mentre il chinone viene ridotto assai facilmente dall'acido formico, tanto che la reazione lentamente si compie anche all'oscuro ed è poi assai accelerata dalla luce, il benzofenone rimane inalterato. Una soluzione di 4 gr. in 20 di acido formico anidro, restando esposta alla luce per tutta l'estate, ingiallì e fece un lieve deposito (1 gr.) di materia resinosa sulle pareti del tubo, ma tutto il resto del prodotto non subì alterazione alcuna e però non si formò benzopinacone.

*Benzofenone e cimolo.*

Vista la facilità con cui il chinone reagisce alla luce con gli idrocarburi e segnatamente con quelli parafinici, dando però prodotti che non abbiamo potuto determinare (si ottiene, come è noto, una sostanza nera), abbiamo voluto studiare in questo proposito il contegno del benzofenone. Quale seconda sostanza abbiamo scelto il cimolo, che scioglie bene a freddo il chetone, con la speranza di potere in questo caso scoprire eventualmente anche quale modificazione subisca l'idrocarburo.

La soluzione, esposta alla luce dal 13, III al 30, V, dette già dopo qualche settimana un'abbondante quantità di *benzopinacone*, ma per scoprire l'alterazione patita dal cimolo bisognerebbe ripetere l'esperienza su assai larga scala.

*Benzofenone e benzaldeide.*

Dalle belle ed interessanti esperienze di Klinger <sup>(1)</sup> è noto che il chinone si condensa alla luce con l'aldeide benzoica per dare, assieme ad altri

<sup>(1)</sup> Berichte 24, 1340, (1891).

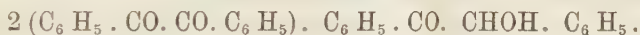
corpi, il p-dirossibenzofenone; per l'analogia di contegno che alla luce in molti casi il benzofenone presenta col chinone, abbiamo voluto vedere se anche qui si formasse un analogo prodotto.

L'esperienza non dette però risultati soddisfacenti. Esponendo alla luce un miscuglio di 5 gr. di benzofenone e 10 gr. d'aldeide benzoica dal 15, XI, 1901 al 15, II, 1902, si ebbe una massa sciropposa seminata di pochi cristalli bianchi. Trattando con acido acetico glaciale, questi rimasero indisciolti; purificati dallo stesso solvente si ottennero in forma di aghetti senza colore, dal punto di fusione 236-237°. La loro composizione corrisponderebbe alla formola  $C_{41}H_{34}O_5$ ; la quantità di questo prodotto è però così esigua da non incoraggiare a riprenderne lo studio.

La parte solubile nell'acido acetico glaciale è resinosa.

### *Benzile ed alcool etilico.*

È noto per le nostre esperienze di due anni fa, che il benzile in soluzione alcoolica si trasforma per azione della luce, nello stesso composto che Klinger ottenne in soluzione eterea, cioè nel cosiddetto benzilbenzoino



Se però la insolazione viene prolungata, questo prodotto, che da principio si separa dal liquido, va lentamente sciogliendosi in seguito ad una ulteriore trasformazione. Per studiare quest'ultima noi abbiamo in questi due anni fatte molte esperienze su larga scala, ma il risultato fu scarso assai. Anzi tutto è da notarsi che non sempre il benzilbenzoino si ridiscioglie completamente, massime se si impiegano dei matracci in luogo di tubi. Noi abbiamo p. es. lasciata esposta alla luce una soluzione di 30 gr. di benzile in 600 c.c. di alcool in un matraccio chiuso alla lampada per un anno intero senza ottenere soluzione completa. Il liquido diventa giallo rossastro e contiene ancora 6 gr. di benzilbenzoino inalterato.

Distillando la soluzione alcoolica, spesso non si hanno che piccole tracce di aldeide acetica nel distillato. Il residuo è una massa sciropposa che accenna a cristallizzare; venne bollita con etere petrolico il quale scioglie tutta la parte oleosa e cristallina e lascia indietro una resina, che costituisce pur troppo la quantità maggiore del prodotto.

L'estratto petrolico è semisolido, sciolto in etere e trattato con una soluzione di carbonato sodico cede a questa notevole quantità d'acido benzoico. La parte neutra, che resta sciolta nell'etere, venne distillata in corrente di vapore acqueo; passa così un olio, da cui per mezzo del bisolfito sodico si può estrarre l'aldeide benzoica, mentre la parte che non si combina ha i caratteri dell'etere benzoico. Dopo la resina suaccennata, il prodotto prin-

cipale della reazione è quello che rimane indietro nella distillazione con vapore acqueo.

Da questo, che è formato esso pure in gran parte da sostanze resinose, non abbiamo potuto ottenere, oltre ad una piccola ed insufficiente quantità d'una sostanza fusibile a 212°, che *benzoïno* e benzile inalterato.

La trasformazione del benzile in soluzione alcoolica per una prolungata esposizione alla luce, consiste in gran parte in un processo di resinificazione. Oltre alla riduzione a *benzoïno* avviene assai limitatamente una scissione in aldeide benzoica ed etere benzoico, prodotta forse dall'alcool, ed inoltre più abbondantemente quella che conduce all'acido benzoico.

### *Benzile e paraldeide.*

Anche questa esperienza venne eseguita per vedere se il contegno di questi due corpi fosse analogo a quello osservato da Klinger <sup>(1)</sup> per il fenantrenchinone. Egli ottenne coll'aldeide acetica, l'acetilfenantrenidrochinone.

Col benzile invece le cose vanno diversamente, come già Klinger stesso lo aveva accennato, ma in modo poco soddisfacente.

Da principio per effetto dell'insolazione si separa il benzilbenzoïno, il quale, a poco a poco, va scomparendo, mentre il liquido si colora in giallo rossastro. Come nella precedente esperienza (benzile ed alcool) i prodotti sono una materia resinosa, in quantità predominante, e *benzoïno*. In un caso, dopo una insolazione di un intero anno (dal 22, IX, 1900 al 20, XI, 1901), abbiamo potuto accertare anche la formazione di *desossibenzoïno* in assai piccola quantità.

Questa riduzione



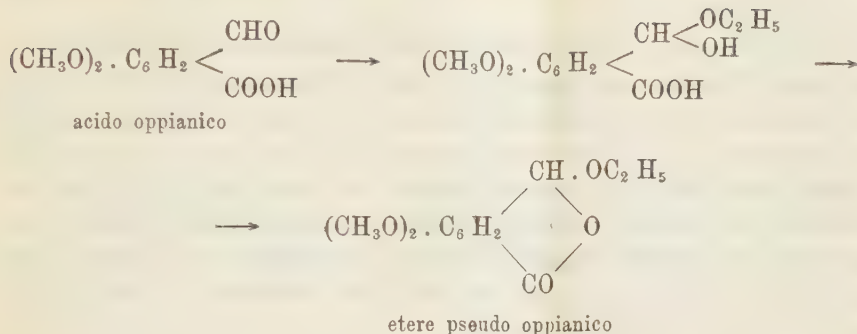
per opera della paraldeide è rimarchevole.

### *Acido oppianico ed alcool etilico.*

Per ragioni, che qui sarebbe inutile ricordare, abbiamo studiato l'azione della luce anche su questa coppia di sostanze. Già dopo pochi giorni d'insolazione l'acido si va sciogliendo nell'alcool, mentre si depositano aghi o prismi privi di colore. L'esposizione durò dal luglio al dicembre. Il prodotto è il cosiddetto *pseudoetere oppianico*, dal punto di fusione 92°. Questo è uno dei casi in cui la luce agevola enormemente l'eterificazione, perchè

<sup>(1)</sup> Liebig's Annalen 249, 137.

preceduta dalla formazione dell'alcoolato (1)



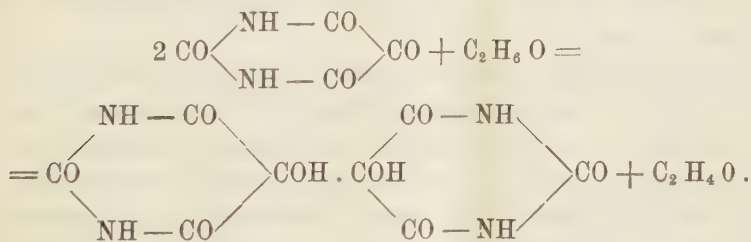
che, come in altra occasione abbiamo fatto notare, viene favorita dalle radiazioni luminose.

*Allossana ed alcool etilico.*

L'azione che la luce determina fra questi due corpi è quella tipica che avviene fra alcoli e chetoni. Si forma l'*allossantina* ed *aldeide acetica*. Venne esposta una soluzione di 5 gr. di allossana in 25 cc. d'alcool assoluto. Già dopo due settimane incomincia la separazione dei cristalli di allossantina; l'esperienza durò dal 15, XII, 1900 al 6, II, 1901. La quantità di prodotto ottenuto fu di 1,7 gr.; l'alcool conteneva aldeide.

Venne fatta la controprova con una soluzione alcoolica d'allossana tenuta all'oscuro per altrettanto tempo, che si mantenne inalterata.

Questa reazione illustra assai bene il fatto che l'allossantina è il pinacone corrispondente all'allossana:



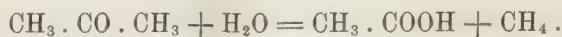
*Idrolisi dell'acetone.*

Il contegno dei chetoni della serie grassa alla luce è ancora completamente sconosciuto e però ci occupa già da qualche tempo. Le esperienze fatte finora sull'azione dell'alcool e dell'etere sull'acetone in presenza della luce

(1) Vedi Wegscheider, Monatshefte für Chemie 13, 702.

non ci hanno dato risultati ben sicuri e però le ricerche in proposito devono essere continuate.

Assai semplice e chiaro riuscì invece il risultato di una esperienza fatta allo scopo di vedere quale fosse il contegno dell'acetone con l'acqua. Una prova preliminare, su cui dovremo ritornare in seguito, ci aveva insegnato che esponendo al sole una soluzione acquosa di acetone in una bottiglia a tappo smerigliato, ma che non chiudevà in modo perfetto, avviene una ossidazione dell'acetone per cui si formano gli acidi acetico e formico. Ripetendo l'esperienza in un matraccio chiuso alla lampada si ebbe un risultato assai diverso: l'acqua, per influenza della luce, determina la scissione del chetone in *acido acetico e metano*:



L'esperienza venne fatta con una soluzione di 125 c.c. di acetone in 1250 c.c. di acqua bollita, in un matraccio sterilizzato col calore, chiuso alla lampada. L'esposizione durò dal 30, V al 29 XI; il liquido si mantenne limpido e privo di calore. Aprendo il matraccio si notò la presenza di un gaz compresso, infiammabile, che, per fortuna, rimase, in sufficiente quantità, disciolto in soluzione soprasatura nel liquido. Con una corrente d'anidride carbonica e scaldando a b. m. si potè scacciare il gaz dalla soluzione e raccoglierlo in un azotometro sulla potassa; se ne misurarono 76 c.c. che, naturalmente, non rappresentavano che una parte del gaz prodottosi nell'idrolisi. Esso venne trasportato negli apparecchi di Hempel ed in questi lavato successivamente con soluzione satura di bisolfito sodico, con acido solforico fumante, con potassa e finalmente con acqua. Non si ebbe assorbimento notevole (2 c.c.) che col bisolfito. All'analisi eudiometrica il gaz dette i numeri esatti richiesti dal *metano*.

Il liquido acquoso da cui fu estratto il metano, ha reazione acida; venne trattato con carbonato calcico e distillato per eliminare l'acetone rimasto inalterato. La soluzione, filtrata dall'eccesso di carbonato di calcio, dette per svaporamento 3,5 di sale calcico, che venne trasformato in sale argentario ed analizzato. Tanto la prima, che l'ultima porzione avevano la composizione dell'*acetato argentario*.

Questa elegante idrolisi dell'acetone invita naturalmente ad ulteriori prove e noi le faremo con altri chetoni della serie grassa, con chetoni aromatici e con chetoni ciclici; ma non solamente ai chetoni vanno limitate queste esperienze, esse devono comprendere gli acidi chetonici ed inoltre poi essere estese alle aldeidi di tutte le serie ed ai chinoni.

**Matematica.** — *Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti.* Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

La questione che mi propongo di trattare in questa Nota, riguarda il moto di un punto libero, quando le equazioni differenziali del movimento si possano scindere in due gruppi di cui uno si integri indipendentemente dall'altro.

Secondo il Volterra, questi moti si diranno « a caratteristiche indipendenti ». Io suppongo di più che le « caratteristiche » del Volterra coincidano con le componenti della velocità secondo un triedro trirettangolo.

Devono allora le componenti della velocità (caratteristiche) e quelle della forza (date) esser funzioni soltanto del tempo, e il triedro deve inviluppare una terna ortogonale a invarianti costanti.

Così le equazioni vengono appunto divise in due gruppi. Uno contiene le caratteristiche, le loro derivate rispetto al tempo, e le componenti della forza; l'altro contiene le variabili, le loro derivate e le caratteristiche.

In tal caso è agevole e comodo riferire il movimento ad una terna ortogonale rettilinea (*terna del Cattaneo*). Le caratteristiche rispetto a questa si hanno allora per quadrature dal primo gruppo delle equazioni ricordate. Le caratteristiche rispetto alla terna primitiva sono legate a queste da relazioni lineari.

Le equazioni del secondo gruppo, in coordinate cartesiane ortogonali danno poi per quadrature le equazioni del moto in termini finiti.

Quanto alle linee di forza si riconosce facilmente che esse costituiscono una congruenza appartenente ad una terna ortogonale a invarianti costanti.

Una tal congruenza si può sempre considerare generata da un'elica circolare di forma invariabile che si muova con moto di traslazione, ortogonalmente al proprio asse, in tutte le direzioni possibili.

È agevole inoltre dimostrare che le tangenti di una tal congruenza non possono appartenere a un complesso lineare. Se ne trae che il nostro caso in cui l'integrazione delle equazioni del moto si ottiene per quadrature, non ha attinenza con quello in cui la forza appartiene ad un complesso lineare, benchè sembri aver con esso talune analogie.

1. Suppongo noti gli elementi del calcolo differenziale assoluto, o almeno le poche formole fondamentali riportate nel § 1 della mia Nota *Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti* <sup>(1)</sup>.

Immaginiamo che le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  siano variabili col tempo, e

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Seduta del 1° marzo 1903.

si abbia

$$x_r = x_r(t) \quad (r = 1, 2, 3)$$

e poniamo

$$(1) \quad \frac{dx_r}{dt} = x'_r = \sum_1^3 \lambda_h^{(r)} p_h.$$

Le  $p_h$  costituiscono, secondo il Volterra (1), delle *caratteristiche* di un moto libero.

L'equazione dei lavori virtuali, che in coordinate cartesiane ortogonali si scrive

$$\sum_1^3 (X_r - m x''_r) \delta x_r = 0$$

( $X_1, X_2, X_3$  componenti della forza,  $m$  massa del punto), in coordinate generali si scriverà

$$\sum_1^3 [X^{(r)} - m(x''_r + \sum_{pq} \left\{ \begin{smallmatrix} p & q \\ r & \end{smallmatrix} \right\} x'_p x'_q)] a_{rs} \delta x_s = 0.$$

Sostituendo in questa a  $x'_r$  i valori dati dalla (1) e ad  $x''_r$  quelli che se ne ricavano per derivazione rispetto a  $t$ , avremo l'equazione dei lavori virtuali sotto la forma

$$(2) \quad \Sigma_h [P_h - m(p'_h - \Sigma_{kl} \gamma_{hkl} p_k p_l)] \delta \omega_h = 0$$

dove

$$P_h = \Sigma_r X^{(r)} \lambda_{h/r}$$

e

$$\delta \omega_h = \Sigma_r \delta x_r \lambda_{h/r}$$

rappresentano rispettivamente le componenti della forza e degli spostamenti virtuali, secondo le tangenti in ogni punto alle linee delle congruenze  $[\lambda_h]$ .

Le equazioni di un moto libero sono allora le (1) e quelle che si ricavano dalla (2) supposte le  $\delta \omega_h$  completamente arbitrarie.

Esse saranno adunque (2)

$$(I) \quad x'_r = \Sigma_h \lambda_h^{(r)} p_h$$

$$(II) \quad P_h = m(p'_h - \Sigma_{kl} \gamma_{hkl} p_k p_l).$$

2. Nel nostro caso le equazioni differenziali si devono dividere in due gruppi integrabili successivamente, e precisamente le equazioni (II) si de-

(1) V. Volterra, *Sopra una classe di equazioni dinamiche*. Atti della R. Accademia delle Scienze, Torino, vol. 33, 1898.

(2) Cfr. Volterra, Memoria citata.

vono integrare indipendentemente dalle (I): esse non devono quindi contenere le  $x_r$ .

Perciò è necessario e sufficiente che le  $p_h$ , le  $P_h$  e i coefficienti delle  $p_k p_l$  (cioè  $\gamma_{hkl} + \gamma_{hlk}$ ) siano indipendenti dalle  $x_r$ . Questi ultimi poi, quando immaginiamo (come facciamo in realtà) le  $[\lambda]$  indipendenti dal tempo, risulteranno costanti.

Il problema adunque dei moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti, ci conduce alla ricerca delle congruenze i cui invarianti soddisfanno alle condizioni

$$(3) \quad \gamma_{hkl} + \gamma_{hlk} = \text{cost.}$$

Si trae intanto da queste che i  $\gamma$  con due indici uguali sono tutti costanti. Inoltre fra i  $\gamma$  passano, come è noto, le relazioni

$$\begin{aligned} \gamma_{hk} &\equiv \frac{\partial \gamma_{h+1h+2k+1}}{\partial s_{k+2}} - \frac{\partial \gamma_{h+1h+2k+2}}{\partial s_{k+1}} - \sum_l \gamma_{h+1h+2l} (\gamma_{lk+1k+2} - \gamma_{k+2k+1}) - \\ &\quad - \gamma_{hh+1k+1} \gamma_{hh+2k+2} + \gamma_{hh+1k+2} \gamma_{hh+2k+1} = 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (3) le  $\gamma_{hh} = 0$  mostrano che tutti i  $\gamma_{hkl}$  sono costanti <sup>(1)</sup>. Dunque le  $[\lambda]$  costituiscono una terna a invarianti costanti.

3. Se poniamo

$$\begin{aligned} \mu_{h/r} &= \sum_k \alpha_{hk} \lambda_{k/r} \\ (\alpha_{hk} = \cos \mu_h \lambda_k = \text{cost.}) \text{ e} \\ q_h &= \sum_k \alpha_{hk} p_k \\ Q_h &= \sum_k \alpha_{hk} P_k \end{aligned}$$

potremo sostituire alle (I) (II) le

$$\begin{aligned} (I_1) \quad x'_r &= \sum_h \mu_h^{(r)} q_h \\ (II_1) \quad Q_h &= m(q'_h - \sum_{kl} g_{hkl} q_k q_l) \end{aligned}$$

dove vale ancora una relazione del tipo

$$(4) \quad Q_h = \sum_r X^{(r)} \mu_{h/r}.$$

<sup>(1)</sup> Cfr. la mia Nota citata: *Sulle terne ortogonali* ecc. Con le notazioni ivi usate, le (3) si scrivono

$$H_h = \text{cost.}, \quad V_h = \text{cost.}, \quad \tau_h - \tau_k = \text{cost.}$$

Le  $\gamma_{hh} = 0$ , annullandosi in esse la parte differenziale, equivalgono allora alle (2) della Nota stessa, e danno

$$\tau_{h+1} \tau_{h+2} = \text{cost.} \quad (h = 1, 2, 3)$$

da cui

$$\tau_h (\tau_{h+1} - \tau_{h+2}) = \text{cost.}$$

ossia anche

$$\tau_h = \text{cost.} \quad \text{c. d. d.}$$

Come ho fatto osservare nella Nota già ricordata, la  $[\mu]$  è ancora una terna a invarianti costanti, e se supponiamo che essa coincida con la terna del Cattaneo ( $g_{123} = -g_{213} = g$ ,  $g_{hkl} = 0$  in ogni altro caso), le (II<sub>1</sub>) assumono la forma

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{m} Q_1 = q'_1 - g q_2 q_3, \\ \frac{1}{m} Q_2 = q'_2 + g q_1 q_3, \\ \frac{1}{m} Q_3 = q'_3. \end{array} \right.$$

La terza dà intanto

$$(6) \quad q_3 = \frac{1}{m} \left[ \int Q_3 dt + c_3 \right]$$

e, posto

$$(7) \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt} = g q_3,$$

dove per la (6)  $\lambda'$  è nota, le due prime si scrivono

$$q'_1 - \lambda' q_2 = \frac{1}{m} Q_1, \quad q'_2 + \lambda' q_1 = \frac{1}{m} Q_2.$$

Integriamo le equazioni che si ottengono da queste uguagliando a zero i secondi membri, e applichiamo poi il metodo di Lagrange, della variazione delle costanti arbitrarie.

Le equazioni senza secondi membri sono

$$q'_1 - \lambda' q_2 = 0, \quad q'_2 + \lambda' q_1 = 0.$$

Il loro sistema integrale generale, come è noto, è

$$q_1 = a \cos \lambda + b \sin \lambda, \quad q_2 = b \cos \lambda - a \sin \lambda$$

dove  $a, b$  designano per ora due costanti arbitrarie, e  $\lambda$  è integrale della (7) <sup>(1)</sup>.

Il metodo di Lagrange dà

$$\begin{aligned} q'_1 - \lambda' q_2 &= \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} - \lambda' q_2 \right\} + \frac{\partial q_1}{\partial a} a' + \frac{\partial q_1}{\partial b} b' = \frac{1}{m} Q_1 \\ q'_2 + \lambda' q_1 &= \left\{ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \lambda' q_1 \right\} + \frac{\partial q_2}{\partial a} a' + \frac{\partial q_2}{\partial b} b' = \frac{1}{m} Q_2 \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> È opportuno notare che nelle formole seguenti  $\lambda$  introduce in realtà una sola costante (la  $c_3$  di  $q_3$ ): la costante additiva potrà ritenersi inclusa in  $a, b$ .

cioè (essendo nulle le quantità chiuse tra le parentesi)

$$a' = \frac{1}{m} (Q_1 \cos \lambda - Q_2 \sin \lambda)$$

$$b' = \frac{1}{m} (Q_2 \cos \lambda + Q_1 \sin \lambda).$$

Gli integrali generali delle (II<sub>1</sub>) sono allora, tenuto conto della (7) ,

$$q_1 = \frac{1}{m} \left[ \cos \lambda \left\{ \int (Q_1 \cos \lambda - Q_2 \sin \lambda) dt + c_1 \right\} + \right. \\ \left. + \sin \lambda \left\{ \int (Q_2 \cos \lambda + Q_1 \sin \lambda) dt + c_2 \right\} \right]$$

$$q_2 = \frac{1}{m} \left[ \cos \lambda \left\{ \int (Q_2 \cos \lambda + Q_1 \sin \lambda) dt + c_2 \right\} - \right. \\ \left. - \sin \lambda \left\{ \int (Q_1 \cos \lambda - Q_2 \sin \lambda) dt + c_1 \right\} \right]$$

$$q_3 = \frac{1}{m} \left[ \int Q_3 dt + c_3 \right]$$

4. Per integrare ora le (I<sub>1</sub>) converrà sostituire in esse alle  $\mu_h^{(r)}$  e  $q_h$  i valori trovati nella Nota citata e nel paragrafo precedente. In coordinate cartesiane ortogonali avremo

$$x' = a \cos (\lambda - gz - c) + b \sin (\lambda - gz - c)$$

$$y' = b \cos (\lambda - gz - c) - a \sin (\lambda - gz - c)$$

$$z' = q_3 = \frac{\lambda'}{g}.$$

La terza ci mostra che  $gz$  e  $\lambda$  differiscono per una costante. Indicando ancora con  $x, y, z$  un nuovo sistema di coordinate cartesiane, ottenuto dal precedente facendo ruotare gli assi  $x, y$  intorno all'asse  $z$  dell'angolo costante  $\lambda - gz - c$  avremo  $x' = a, y' = b$ , ed

$$x = \int a dt + C_1$$

$$y = \int b dt + C_2$$

$$z = \frac{\lambda}{g} + C_3$$

che dipendono dalle 6 costanti  $c_1, c_2, c_3; C_1, C_2, C_3$ .

Queste equazioni ci inducono facilmente a ritenere (ma ciò non era evidente a priori) che si possa dare alle equazioni differenziali del moto una forma ben semplice e immediatamente integrabile, quando le si riconducano ai differenziali secondi.

Infatti basterebbe derivarle due volte rispetto a  $t$ , per ridurle alla nota forma

$$(8) \quad \begin{cases} X = mx'' \\ Y = my'' \\ Z = mz'' \end{cases}$$

e dedurne l'integrabilità per quadrature.

Mostriamo però come anche si possano ricavare direttamente i primi membri di tali equazioni.

Tenendo conto della 3<sup>a</sup> equazioni dei due gruppi (I<sub>1</sub>) (II<sub>1</sub>), si ha il valore di  $z$ , da cui si ricava quello di  $gz + c$ . Indicandolo brevemente con  $\theta$ , le (4) danno, in coordinate cartesiane ortogonali

$$\begin{aligned} X &= X_1 = Q_1 \cos \theta - Q_2 \sin \theta \\ Y &= X_2 = Q_2 \cos \theta + Q_1 \sin \theta \\ Z &= X_3 = Q_3 \end{aligned}$$

Essendo  $X, Y, Z$  funzioni soltanto di  $t$ , nelle (8) restano separate le variabili, e l'integrazione si fa senz'altro per quadrature.

5. Restano ora da determinare le linee di forza.

Dalle (4) abbiamo

$$X_r = \sum_h Q_h \mu_{h/r}$$

e indicando con  $[\nu]$  la congruenza delle linee di forza, ne ricaviamo

$$\nu_r = \frac{X_r}{\sqrt{\sum_s X_s X^{(s)}}} = \frac{\sum_h Q_h \mu_{h/r}}{\sqrt{\sum_k Q_k^2}}$$

ossia, posto

$$Q_h = \cos \alpha_h \sqrt{\sum_k Q_k^2}$$

dove le  $\alpha_h$  risultano costanti,

$$\nu_r = \sum_h \cos \alpha_h \mu_{h/r}$$

cioè la  $[\nu]$  forma angoli costanti (rispetto alle coordinate) con le  $[\mu]$ : essa appartiene dunque ad una terna ortogonale a invarianti costanti.

Per ciò che ho dimostrato nella mia Nota più volte citata, le linee di forza sono allora eliche circolari congruenti, con gli assi paralleli all'asse  $z$ , e le cui normali principali nei punti di un medesimo piano  $z = \text{cost.}$  sono tutte parallele: il che equivale perfettamente a ciò che con linguaggio cinematico abbiamo detto nell'Introduzione.

È importante infine notare che il nostro caso in cui l'integrazione delle equazioni del moto si ottiene con quadrature, non si può in alcun modo ricondurre a quello in cui la forza che sollecita il punto appartenga a complessi lineari (nel qual caso le equazioni del moto ammettono, come ben si sa, integrali primi).

Possiamo infatti dimostrare che le tangenti ad una generica congruenza ad invarianti costanti non possono appartenere ad un complesso lineare. Perchè ciò fosse i loro coseni direttori

$$\begin{aligned} X &= \lambda_1 = \alpha_1 \cos(gz + c) - \alpha_2 \sin(gz + c) \\ Y &= \lambda_2 = \alpha_2 \cos(gz + c) + \alpha_1 \sin(gz + c) \\ Z &= \lambda_3 = \alpha_3 \end{aligned}$$

( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  cost.) dovrebbero soddisfare in ogni punto ad una equazione del tipo

$$\begin{aligned} aX + bY + cZ + p(yZ - zY) + q(zX - xZ) + r(xY - yX) &= 0 \\ (a, b, c, p, q, r, \text{cost.}): \text{ ossia} \\ x(rY - qZ) + y(pZ - rX) + z(qX - pY) + aX + bY + cZ &= 0 \end{aligned}$$

Perchè questa sia verificata per ogni valore di  $x, y, z$ , dovranno esser nulli i coefficienti di  $x, y$  per ogni valore di  $z$ , da cui (essendo  $Z = \text{cost.}$ ,  $X, Y$  variabili),  $r = 0$ , e conseguentemente  $p = q = 0$ .

L'equazione si riduce allora ad

$$aX + bY + cZ = 0$$

che non ammette soluzioni, essendo le  $X, Y$  linearmente indipendenti.

**Meccanica.** — *Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative.* Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sull'equilibrio d'un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota I di A. VITERBI, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

È ben nota l'importanza che ha l'ellissoide di rivoluzione come figura d'equilibrio d'una massa fluida uniformemente ruotante, le cui particelle si attraggono secondo la legge di Newton; un tale ellissoide è infatti forma possibile d'un corpo planetario allo stato di nebulosa. Mi parve interessante lo studio dell'equilibrio nel caso in cui il pianeta perduto ormai il carattere di massa fluida debba riguardarsi come un solido ruotante, in equilibrio elastico, quando le forze di massa, a cui è soggetto, sono la forza centrifuga e l'attrazione.

L'analogo problema fu, come è ben noto, risolto completamente per la sfera del Lamé <sup>(1)</sup>. Il Lecornu <sup>(2)</sup> trattò il problema dell'equilibrio elastico d'un ellissoide di rivoluzione supponendo però che la sola forza di massa agente fosse la forza centrifuga.

Trattandosi di un solido di rivoluzione ruotante intorno al proprio asse, l'equilibrio dovrà verificarsi in ciascun piano meridiano, avvenendo lo spostamento d'ogni singolo elemento sotto l'azione della gravità e della forza centrifuga in un dato piano meridiano, indipendentemente dall'orientamento di questo. Così la componente dello spostamento secondo la normale ai varî piani meridiani sarà identicamente nulla. Si tratta dunque di un problema a due coordinate. Come coordinate in ciascun piano meridiano si assumerà il sistema di coordinate rettilinee ortogonali  $x, y$  offerto dalle parallele rispettivamente ai raggi dei paralleli ed all'asse del solido in discorso. Tale sistema non è che quello delle coordinate cilindriche: infatti quest'ultimo si ottiene assumendo come terza coordinata necessaria e sufficiente ad individuare insieme con  $x, y$  i punti dello spazio l'angolo che ogni singolo piano meridiano forma con un piano meridiano fisso.

Nel problema studiato si hanno tre componenti normali della forza elastica, ed una componente tangenziale. Noi supporremo che la componente tangenziale sia nulla: il caso che allora si presenta offre particolare interesse. Invero il significato fisico di tale ipotesi è evidente in base ai fondamenti della teoria dell'elasticità: esso consiste in ciò che nella materia costituente l'ellissoide considerato non avvengono scorrimenti nelle direzioni  $x, y$ . In altri termini l'ipotesi posta esprime che nè un elemento d'area d'alcun piano meridiano può subire uno scorrimento nella direzione del raggio dei paralleli, situato nel piano stesso, nè un elemento d'area d'alcun parallelo può subire uno scorrimento nel senso dell'asse del solido. Allora poi il sistema triplo ortogonale di superficie costituito dai piani dei paralleli, dai piani meridiani e dalle superficie cilindriche coassiali aventi per generatrici le parallele all'asse  $y$  è *isostatico* <sup>(3)</sup>: vale a dire mercè esso si può suddividere l'ellissoide in discorso in prismi elementari sulle cui faccie non agiscono che tensioni (o pressioni) normali. Le formole che in tale ipotesi s'ottengono sono oltremodo semplici: in vero le componenti della forza elastica e le componenti dello spostamento, la cui determinazione costituisce il nocciolo della presente ricerca sono, le prime, funzioni di secondo grado, le seconde funzioni di terzo grado delle coordinate. Tale l'argomento della presente Nota. Le formole cui qui pervengo danno luogo ad alcune osservazioni

(1) v. Lamé, *Leçons sur l'Elasticité*, pag. 214 e seg. e *Leçons sur le Coordonnées curvilignes*.

(2) v. Lecornu, *Sur l'Equilibre d'Elasticité d'un corps tournant*. Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences, 1896, pagg. 96-99.

(3) Lamé, *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, pag. 351 e seg.

che mi permetterò di svolgere in una prossima Nota. Eccone brevemente il contenuto.

La circostanza che, trattandosi d'un ellissoide, le componenti della forza di massa sono funzioni lineari delle coordinate fa sì che s'ottenga immediatamente una speciale relazione fra l'eccentricità, la velocità angolare, la costante dell'attrazione ed il rapporto delle costanti d'isotropia. Questa relazione, oltre a rappresentare, per sè stessa, una condizione necessaria e sufficiente a che il corpo sia in equilibrio elastico permette di più d'assegnare per la velocità angolare un limite superiore, funzione soltanto dell'eccentricità e della costante dell'attrazione, che essa non può mai raggiungere se deve esistere l'equilibrio. Tale fatto trova perfetto riscontro in ciò che, come è ben noto, si verifica nello studio della figura d'equilibrio d'una massa fluida ruotante uniformemente <sup>(1)</sup>. E appunto la presente ricerca si chiude con un'applicazione di detta relazione alla determinazione del rapporto fra le costanti d'isotropia dell'ellissoide terrestre. Come si vedrà, tale ellissoide soddisfa pienamente alla condizione necessaria per trovarsi, nell'ipotesi posta, in equilibrio elastico: di più il limite superiore della velocità angolare, qualora l'ellissoide terrestre sia in equilibrio elastico è molto superiore all'analogo limite che si ottiene, considerando la terra allo stato di massa fluida. Si presenta spontanea un'interpretazione fisica di tale fatto nel senso che la terra, come ogni altro corpo, si trovi allo stato di solido elastico in condizioni molto più favorevoli a mantenersi in equilibrio di quel che non sia allo stato di massa fluida.

1. Sia un solido di rivoluzione E di forma ellissoidica; e sia esso animato di moto rotatorio uniforme attorno al suo asse. In ciascun piano meridiano si assuma, giusta quanto si disse, come sistema di coordinate, quello costituito rispettivamente dalle parallele  $y$  all'asse di rotazione e dai raggi  $x$  dei paralleli dell'ellissoide considerato. Di più si prenda come origine delle coordinate il centro di E. Detto allora  $a$  il semiasse equatoriale,  $b$  quello polare del solido in discorso, l'equazione della superficie che lo limita sarà:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2).$$

Si supponga, come s'è detto, che E si trovi nelle condizioni d'un solido planetario: vale a dire che le forze di massa a cui è soggetto siano l'attrazione e la forza centrifuga. Dovendo l'equilibrio elastico verificarsi in ciascun piano meridiano sarà, come si è osservato, nulla la componente dello sposta-

(1) V. per es. la recentissima opera del Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, 1902.

(2) In coordinate cartesiane evidentemente l'equazione della superficie in discorso sarebbe posto nel piano di ciascun parallelo,  $x_1 = x \cos \alpha$ ,  $x_2 = x \sin \alpha$ :  $\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

mento de' suoi punti, normale ai piani meridiani. Dette pertanto  $u, v$  le componenti dello spostamento rispettivamente nelle direzioni  $x, y$ : detto  $\vartheta$  il coefficiente di dilatazione cubica; dette  $N_1, N_2, N_3$  le componenti della forza elastica normale agenti rispettivamente nella direzione  $x$ , perpendicolarmente ai singoli piani meridiani e nella direzione  $y$  e dette finalmente  $\lambda + 2\mu, \mu$  le costanti d'isotropia di E sarà <sup>(1)</sup>:

$$(2) \quad \vartheta = \frac{u}{x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{u}{x} \\ N_3 = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right.$$

Una sola delle componenti tangenziali della forza elastica non sarebbe identicamente nulla; e questa è:

$$T = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Se non che, per l'ipotesi posta nell'introduzione, essa pure s'annulla: dovranno perciò  $u, v$  soddisfare all'equazione:

$$(B) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Sia ora  $\rho$  la densità (supposta costante) della materia costituente E,  $\omega$  la velocità angolare con cui esso ruota. Allora la forza centrifuga è data da  $\frac{\omega^2 \rho x^2}{2}$ .

Dette  $A'_1 x, A_2 y$  le componenti dell'attrazione unitaria di E su un punto interno, rispettivamente nelle direzioni  $x, y$ , pongasi brevemente:

$$(A'_1 + \omega^2) \rho = A_1.$$

Come è noto, detta  $f$  la costante dell'attrazione di E, sarà rispettivamente <sup>(2)</sup>:

<sup>(1)</sup> Lamè, *Leçons sur l'Élasticité*, pag. 184. Le relazioni fondamentali della presente ricerca s'ottengono infatti dalle formole fondamentali dell'elasticità in coordinate cilindriche date dal Lamè, quando si supponga nulla la componente dello spostamento normale a ciascun piano meridiano e tutto indipendente dall'orientamento di questo.

<sup>(2)</sup> v. Tisserand, *Traité de Mécanique celeste*, tome II, pagg. 62-64.

$$(3) \quad \begin{cases} A'_1 = -2\pi f \varrho \frac{1+l^2}{l^3} \left( \operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2} \right) \\ A_2 = -4\pi f \varrho \frac{1+l^2}{l^3} (l - \operatorname{arctg} l), \end{cases}$$

ove  $l = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b}}$ , oppure:

$$(3') \quad \begin{cases} A'_1 = -2\pi f \varrho \frac{1-h^2}{h^3} \left( \frac{h}{1-h^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1+h}{1-h} \right) \\ A_2 = -4\pi f \varrho \frac{1-h^2}{h^3} \left( \frac{1}{4} \log \frac{1+h}{1-h} - h \right), \end{cases}$$

ove  $h = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}$

a seconda che  $a > b$  oppure  $b < a$ , cioè a seconda che l'ellissoide E è schiacciato od allungato. Allora poi le equazioni d'equilibrio elastico saranno date (1) da

$$(C) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{N_1 - N_2}{x} + A_1 x = 0 \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} + A_2 y = 0. \end{cases}$$

È ovvio poi che le forze elastiche agenti su un elemento superficiale normale ad un dato piano meridiano, le quali sono date da (2):

$$N'_1 = \cos^2 \alpha N_1 + \sin^2 \alpha N_3, \quad T' = \cos \alpha \sin \alpha (N_1 - N_3)$$

ove  $\alpha$  designi l'angolo della normale all'ellissoide coll'asse delle  $x$ , devono essere nulle sulla superficie libera di E, cioè sulla superficie (1). Dovranno cioè  $N_1, N_3$  avere la forma:

$$(4) \quad \begin{cases} N_1 = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) f(x, y) \\ N_3 = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \varphi(x, y), \end{cases}$$

designando  $f(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$  due funzioni di  $x, y$  che restano finite sulla superficie (1).

Dalle (A), (B), (C), unite alle (4), si ricavano immediatamente  $N_1, N_2, N_3$  e successivamente  $u, v$ .

(1) Lamè, *Leçons sur l'Élasticité*, pag. 182.

(2) Lamè, *Leçons sur l'Élasticité*, pag. 48.

2. Per determinare in primo luogo le componenti della forza elastica si osserverà anzitutto che dalla seconda delle (C):

$$N_3 \equiv -\frac{A_2}{2} y^2 + \psi(\dot{x})$$

designando  $\psi(x)$  una funzione arbitraria della sola  $x$ ; perciò in base alla seconda delle (4) dovrà essere evidentemente:

$$(5) \quad N_3 = \frac{1}{2} \left( A_2 b^2 - A_2 x^2 \frac{b^2}{a^2} - A_2 y^2 \right).$$

In virtù delle prime due fra le equazioni (A) la prima delle (C) può porsi sotto la forma:

$$(6) \quad \frac{\partial(N_1 + N_2 - \lambda \mathcal{G})}{\partial x} + A_1 x = 0$$

e poichè in base alla (2) ed alle (A):

$$(7) \quad \mathcal{G} = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3\lambda + 2\mu}$$

seguono dalle (5), (6) necessariamente le

$$(8) \quad \frac{\partial^3(N_1 + N_2)}{\partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^2(N_1 + N_2)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Ciò perchè, come è ben noto dai fondamenti della teoria dell'elasticità non può mai essere  $\lambda + \mu = 0$ . Ciò posto in base alla (B) si potrà porre, detta  $K$  un' indeterminata:

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = K, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -K.$$

Dal confronto delle (9) rispettivamente colla prima e la terza delle (A) si ha in virtù della condizione differenziale a cui devono soddisfare le derivate parziali di  $u, v$ :

$$(9') \quad \begin{cases} 2\mu \frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \\ 2\mu \frac{\partial K}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{cases}$$

E da queste evidentemente:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} - \lambda \left( \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} = 0.$$

In pari tempo dalle prime due delle equazioni (A):

$$(11) \quad N_2 - N_1 + x \frac{\partial(N_2 - \lambda \vartheta)}{\partial x} = 0.$$

Dalla (10), derivata rispetto a  $x$ , si ricava in virtù delle (5), (7), (8):

$$(12) \quad \frac{\partial^3 N_1}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 N_2}{\partial y^2 \partial x} = 0.$$

Dalla (11) derivata due volte rispetto a  $y$  e dalla (10), derivata rispetto a  $y$ , si ricava, in virtù della (12):

$$(12') \quad \frac{\partial^2(N_2 - N_1)}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 N_1}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 N_2}{\partial y^3} = 0.$$

Le (12), (12') associate alla prima delle (4) mostrano subito che deve la funzione  $f(x, y)$  ridursi ad una costante  $C$ , e però che deve essere

$$N_1 = C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

mentre tenendo conto altresì delle (8) e della prima delle (C) si vede che  $N_2$  alla sua volta deve avere la forma:

$$N_2 = C_1 x^2 + C \frac{y^2}{b^2} - C.$$

La completa determinazione poi di  $N_1, N_2$  si fa immediatamente mercè le (6), (10), (11). Infatti da queste equazioni si ricava facilmente:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{a^2} = - \frac{\{A_2 \lambda \varepsilon + A_1(7\lambda + 6\mu)\}}{16(\lambda + \mu)} \\ \frac{C}{b^2} = - \frac{[\lambda \{ \lambda A_2 \varepsilon + A_1(3\lambda + 2\mu) \} - 4(\lambda + \mu)^2 A_2 \varepsilon + 2\lambda(\lambda + \mu) A_2]}{4(\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \end{array} \right.$$

posto brevemente  $\frac{b^2}{a^2} = \varepsilon$ .

Se non che dalla (13) scaturisce immediatamente la relazione seguente:

$$(13') \quad \frac{(\lambda + 2\mu) \{A_2 \lambda \varepsilon + A_1(7\lambda + 6\mu)\}}{\lambda \{ \lambda A_2 \varepsilon + A_1(3\lambda + 2\mu) \} - 4(\lambda + \mu)^2 A_2 + 2\lambda(\lambda + \mu) A_2} = 4\varepsilon.$$

Pongasi brevemente  $\frac{\lambda}{\mu} = I$  e sostituisca si a  $\varepsilon$  la sua espressione:

$$\varepsilon = 1 - e^2$$

ove  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ , rappresentando il quadrato dell'eccentricità di E qualora sia  $a > b$ . Tale sostituzione si fa in vista dell'applicazione che di queste formole si farà allo studio dell'equilibrio elastico della terra. Allora la (13') diverrà:

$$(14) \quad I^2 \{ A_2 (17 e^2 - 5 - 12 e^4) + A_1 (5 - 12 e^2) \} - \\ - I \{ A_2 (26 - 58 e^2 + 32 e^4) + A_1 (12 + 8 e^2) \} - 16 A_2 (1 - e^2)^2 - 12 A_1 = 0.$$

Ci riserviamo di studiare più innanzi la (14) e di metterne in rilievo la portata: per intanto osservando pure che dalle (6):

$$C_1 = - \frac{A_1 (5\lambda + 2\mu) + 3A_2 \lambda (1 - e^2)}{16(\lambda + 2\mu)}$$

e che, in base alle (3), (3') essendo  $l^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$ ,  $h^2 = \frac{-e^2 (1)}{1 - e^2}$ ,  $A_2$  e  $A_1 - \omega^2 \varrho$  si possono far dipendere da  $e$  anzichè rispettivamente da  $l$  o da  $h$  possiamo riassumere i risultati testè ottenuti affermando che:

*Nel problema in discorso d'equilibrio elastico, le componenti normali della forza elastica (le sole non nulle), risultano funzioni di secondo grado delle coordinate date rispettivamente da:*

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} N_1 &= a^2 \frac{A_2 \lambda (1 - e^2) + A_1 (7\lambda + 6\mu)}{16(\lambda + \mu)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ N_2 &= a^2 \frac{A_2 \lambda (1 - e^2) + A_1 (7\lambda + 6\mu)}{16(\lambda + \mu)} - \frac{A_1 (5\lambda + 2\mu) + 3A_2 \lambda (1 - e^2)}{16(\lambda + \mu)} x^2 - \\ &\quad - \frac{A_2 \lambda (1 - e^2) + A_1 (7\lambda + 6\mu)}{16(\lambda + \mu) (1 - e^2)} y^2 \\ N_3 &= \frac{A_2}{2} \{ a^2 (1 - e^2) - x^2 (1 - e^2) - y^2 \} \end{aligned} \right.$$

mentre fra il rapporto delle costanti d'isotropia (che non è se non  $I + 2$ ), la velocità angolare, la costante dell'attrazione ed il rapporto  $e$  deve sussistere la relazione (14) come condizione necessaria e sufficiente a che il solido E sia in equilibrio elastico (la densità non figura nella (14) essendo fattore comune).

3. Mercè le (15) si calcolano subito le componenti dello spostamento:

(1) È quasi superfluo accennare che se si trattasse di un ellissoide allungato in guisa che la sua eccentricità fosse data da  $\bar{e}^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$  essendo  $\bar{e}^2 = \frac{-e^2}{1 - e^2}$  tanto nella (14) come nella (15) e nelle espressioni di  $A_1, A_2$  si potrebbe opportunamente sostituire al rapporto  $e$  il rapporto  $\bar{e}$ , ricordando pure che  $h^2 = \frac{\bar{e}^2}{1 - \bar{e}^2}$ .

infatti in virtù di queste la (7) diviene, posto brevemente  $A_2(1 - e^2) = \bar{A}_2$ :

$$9 = \frac{a^2 \{ \bar{A}_2(5\lambda + 4\mu) + A_1(7\lambda + 6\mu) \} - x^2(6\lambda + 4\mu)(A_1 + \bar{A}_2) - \frac{y^2}{1 - e^2} \{ \bar{A}_2(5\lambda + 4\mu) + A_1(7\lambda + 6\mu) \}}{8(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)}$$

Allora, poichè sotto la condizione posta che sia soddisfatta la (14), sono pure identicamente soddisfatte le condizioni differenziali che si ricavano dal confronto delle (A), (B), tenuto conto della (15) e della (7'), dalla seconda e dalla terza delle (B) si ricava subito rispettivamente:

$$(16) \quad \begin{cases} u = a_1 x - \frac{a_1}{a^2(1 - e^2)} x y^2 + b_1 x^2 \\ v = a_2 y + b_2 x^2 y - \frac{a_2}{a^2(1 - e^2)} \end{cases}$$

dove si è posto brevemente:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{a^2 \{ A_1(\lambda + 2\mu) - \bar{A}_2 \lambda \{ (7\lambda + 6\mu) \}}{32\mu(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)} \\ b_1 = \frac{(3\lambda + 2\mu) \{ \bar{A}_2 \lambda - A_1(\lambda + 2\mu) \}}{32\mu(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)} \\ a_2 = \frac{a^2 [ \{ 4(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu) - \lambda(5\lambda + 4\mu) \{ \bar{A}_2 - A_1 \lambda(7\lambda + 6\mu) \} ]}{16\mu(3\lambda + 2\mu)(\lambda + \mu)} \\ b_2 = \frac{\lambda A_1 - (\lambda + 2\mu) \bar{A}_2}{8\mu(\lambda + \mu)} \end{cases}$$

mentre evidentemente in virtù della (14):

$$\frac{a_1}{a^2(1 - e^2)} + b_2 = 0.$$

Mercè la (16) è dunque completamente risolto il problema dell'equilibrio elastico di E.

**Fisica.** — *Relazione su di una Memoria contenuta in un piego suggellato presentato nel 1882 dal prof. Adolfo Bartoli, dei Soci A. RÒITI (relatore) e V. VOLTERRA.*

**Fisica.** — *Trasformazione in correnti elettriche delle radiazioni incidenti sopra una superficie riflettente in movimento. Memoria del prof. ADOLFO BARTOLI.*

Relazione e Memoria saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Misure pireliometriche eseguite a Sestola ed al Monte Cimone nell'estate 1899.* Nota di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio BLASERNA.

Per queste misure mi servirono due attinometri di Violle. Uno di questi due, di proprietà della R. Stazione agraria di Modena, è quello stesso che mi servì per le misure del 1898 fatte a Corleto <sup>(1)</sup>; l'altro, di proprietà del R. Ufficio centrale di Meteorologia e di Geodinamica è pure della casa Ducretet di Parigi; ha il diametro della sfera esterna di cm. 29,5 e quello della sfera interna di cm. 19,5.

Lo schermaglio del tubo di entrata dei raggi solari in questo ultimo attinometro, porta cinque fori, che hanno rispettivamente i seguenti diametri in centimetri:

|       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1,542 | 1,380 | 1,138 | 0,795 | 0,437 |
|-------|-------|-------|-------|-------|

Per orientare l'apparecchio ho applicato le stesse modificazioni apportate all'attinometro della Stazione agraria. Il tubo di entrata dei raggi solari nell'attinometro del R. Ufficio di Meteorologia venne però prolungato di 17,1 cm.

A Sestola (lat. bor. 44°.14'; long. est da Gr. 10°.46'; 1092 metri sul mare) <sup>(2)</sup>, dal 21 luglio a tutto il 29 agosto servì l'attinometro della Stazione agraria, e dal 30 agosto al 2 settembre l'attinometro del R. Ufficio centrale di Meteorologia e di Geodinamica.

Di questo ultimo attinometro si fece sempre uso sul Monte Cimone (lat. bor. 44°.12'; long. est da Gr. 10°.42'; 2165 m. sul mare) dal 6 al 26 agosto.

I termometri attinometrici che applicai ai due attinometri sono quelli stessi che servirono per le misure del Corleto e precisamente l'attinometro della Stazione agraria era munito del termometro, del quale il serbatoio ha per equivalente in acqua 0,890 piccole calorie; quello del R. Ufficio di Meteorologia era munito del termometro il cui serbatoio ha per equivalente in acqua 0,718 piccole calorie. Ho già riferito <sup>(3)</sup> per il primo attinometro i coefficienti di riduzione per ricavare i valori assoluti della radiazione calorifica solare. Il secondo attinometro venne pure tenuto in confronto col pi-

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XII, Serie 3ª (1903), pag. 53-57.

(2) Le osservazioni del 1899 vennero eseguite nel prato adiacente al R. Osservatorio meteorologico di Sestola, che è di m. 72 più alto della casa comunale, dove si fecero le osservazioni nel 1901.

(3) Lavoro su citato.

reliometro assoluto a compensazione elettrica dell'Ångström e dedussi i seguenti coefficienti di riduzione:

|                                     |       |       |
|-------------------------------------|-------|-------|
| Coll'apertura di cm. . . . .        | 1,380 | 1,138 |
| Coefficiente di riduzione , . . . . | 1,106 | 1,062 |

Il metodo di osservazione è sempre stato quello adottato per le misure fatte a Corleto nel 1898 e sul Monte Cimone nel 1901 (<sup>1</sup>). Credo perciò inutile dilungarmi in spiegazioni.

Nelle tabelle seguenti è indicata con  $h$  l'altezza del Sole al momento dell'osservazione; con  $Q$  la quantità di calore (gr. calor. per minuto) inviata dal Sole normalmente sulla superficie di un centimetro quadrato, la quale abbia *uno* di potere assorbente; con  $B$  la pressione barometrica ridotta a 0°; con  $t$  la temperatura dell'aria; con  $f$  la forza elastica del vapore acqueo esistente nell'atmosfera e con  $u$  la umidità relativa.

(<sup>1</sup>) *Misure pireliometriche fatte sul Monte Cimone nell'estate del 1901* (Rendic. della R. Accad. dei Linsei. vol. XI, Serie 5<sup>a</sup> (1902), pag. 479-486 e pag. 539-541).

SESTOLA 1899.

| Giorno    | <i>h</i> | <i>Q</i> | <i>B</i> | <i>t</i> | <i>f</i> | <i>u</i> | <i>Annotazioni</i>                                |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------------------------------------------|
| 21 luglio | 36,0     | 1,040    | 673,7    | 26,0     | 13,3     | 50       | ☉ libero (osservato dopo mezzodì)                 |
| 22    "   | 47,0     | 1,014    | 674,1    | 23,5     | 15,4     | 70       | ☉ circondato da Cu; ma chiaro                     |
| "         | 51,8     | 1,579    | 674,1    | 24,0     | 14,7     | 65       | ☉ libero completamente; cielo azzurro             |
| "         | 58,9     | 1,267    | 674,1    | 24,5     | 15,4     | 66       | ☉ libero                                          |
| 23    "   | 39,5     | 1,168    | 672,0    | 24,0     | 12,8     | 55       | Id.                                               |
| "         | 52,6     | 1,249    | 672,1    | 24,0     | 14,3     | 62       | Id.                                               |
| "         | 57,1     | 1,278    | 672,0    | 25,0     | 14,7     | 60       | Id.                                               |
| "         | 64,0     | 1,320    | 672,0    | 24,8     | 14,1     | 58       | Id.                                               |
| "         | 62,9     | 1,214    | 671,8    | 26,6     | 14,7     | 55       | Id.                                               |
| 24    "   | 45,5     | 1,487    | 668,0    | 22,0     | 9,2      | 44       | ☉ libero; cielo azzurro                           |
| "         | 62,7     | 1,161    | 668,1    | 22,5     | 9,4      | 44       | Qualche velo intorno al ☉                         |
| 25    "   | 49,5     | 1,287    | 668,8    | 19,8     | 10,0     | 57       | ☉ libero circondato da Cu                         |
| 26    "   | 34,9     | 1,239    | 673,8    | 18,1     | 9,4      | 58       | Sereno                                            |
| "         | 45,2     | 1,351    | 674,0    | 18,7     | 8,8      | 52       | Sereno                                            |
| "         | 57,9     | 1,336    | 674,0    | 19,5     | 8,9      | 50       | Leggerissimi veli intorno al ☉                    |
| 27    "   | 35,0     | 1,237    | 674,6    | 20,1     | 8,4      | 45       | Sereno                                            |
| "         | 63,0     | 1,320    | 674,5    | 21,2     | 8,6      | 43       | Veli leggeri intorno al ☉                         |
| 30    "   | 27,5     | 1,032    | 672,8    | 19,8     | 12,3     | 70       | ☉ libero fra Cu (osservazione fatta alla mattina) |
| 31    "   | 34,8     | 1,046    | 675,6    | 19,3     | 11,6     | 68       | Id.                                               |
| "         | 51,5     | 1,230    | 675,8    | 19,5     | 10,4     | 60       | Id.                                               |
| "         | 61,3     | 1,290    | 676,2    | 20,1     | 9,7      | 54       | Id.                                               |
| 1 agosto  | 61,0     | 1,299    | 676,9    | 20,2     | 9,0      | 49       | ☉ libero fra densi Cu                             |
| "         | 49,1     | 1,210    | 676,0    | 21,6     | 10,0     | 50       | Id.                                               |
| "         | 44,3     | 1,133    | 675,9    | 21,6     | 9,6      | 48       | Qualche velo intorno al ☉                         |
| 2    "    | 39,1     | 0,582    | 674,8    | 19,1     | 9,9      | 58       | Cielo bianchiccio con veli                        |
| "         | 48,7     | 1,164    | 674,8    | 20,3     | 10,2     | 56       | Il cielo si è rischiarato                         |
| "         | 53,8     | 0,556    | 674,9    | 20,7     | 10,3     | 55       | Veli intorno al ☉                                 |
| "         | 57,4     | 0,905    | 674,9    | 20,9     | 10,2     | 54       | Id.                                               |
| "         | 61,7     | 0,768    | 674,7    | 20,9     | 10,2     | 54       | Id.                                               |
| "         | 63,7     | 0,546    | 674,4    | 21,5     | 10,4     | 53       | Id.                                               |
| 3    "    | 62,3     | 1,127    | 671,5    | 21,3     | 10,3     | 53       | Cielo bianchiccio (osservazione antimeridiana)    |
| 4    "    | 33,5     | 0,871    | 671,6    | 19,2     | 9,8      | 57       | Veli intorno al ☉                                 |
| "         | 43,0     | 0,985    | 671,6    | 19,6     | 10,6     | 60       | Id.                                               |
| "         | 60,0     | 1,213    | 672,0    | 21,6     | 9,0      | 45       | Cielo bianchiccio                                 |
| "         | 53,2     | 1,148    | 671,7    | 22,3     | 8,6      | 41       | Id.                                               |
| "         | 45,0     | 0,617    | 671,6    | 23,5     | 8,8      | 39       | Veli intorno al ☉                                 |
| "         | 43,2     | 1,047    | 671,6    | 23,0     | 10,0     | 46       | Cielo nebbioso                                    |
| "         | 33,5     | 0,482    | 671,4    | 21,2     | 9,4      | 48       | Id. e veli intorno al ☉                           |
| 5    "    | 31,1     | 0,931    | 672,0    | 20,1     | 9,6      | 52       | Cielo bianchiccio                                 |
| "         | 38,2     | 1,100    | 672,0    | 20,6     | 10,7     | 57       | Id.                                               |

SESTOLA 1899.

| Giorno   | <i>h</i>          | <i>Q</i> | <i>B</i> | <i>t</i> | <i>f</i> | <i>u</i> | <i>Annotazioni</i>               |
|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------------------------------|
| 5 agosto | 44,3 <sup>0</sup> | 1,035    | 672,0    | 20,8     | 9,4      | 49       | Cielo bianchiccio                |
| "        | 51,0              | 1,103    | 672,2    | 21,5     | 8,6      | 43       | Id.                              |
| "        | 56,8              | 0,890    | 672,6    | 21,8     | 8,4      | 41       | Cielo nebbioso                   |
| "        | 62,0              | 1,004    | 672,7    | 22,2     | 7,4      | 35       | Id.                              |
| "        | 59,1              | 1,077    | 672,4    | 23,2     | 8,5      | 38       | Id.                              |
| "        | 53,5              | 1,169    | 672,1    | 23,9     | 8,2      | 35       | Cielo bianchiccio                |
| 6 "      | 52,7              | 1,165    | 672,4    | 21,1     | 10,9     | 57       | Id. (osservazione antimeridiana) |
| 7 "      | 48,1              | 0,956    | 671,3    | 20,3     | 12,5     | 68       | Nebbioso                         |
| "        | 53,2              | 1,204    | 671,4    | 20,7     | 12,1     | 64       | Sereno                           |
| "        | 58,5              | 1,195    | 671,4    | 21,4     | 11,8     | 60       | Cielo bianchiccio                |
| "        | 61,0              | 1,187    | 671,4    | 22,0     | 10,3     | 50       | Id.                              |
| "        | 60,5              | 1,153    | 670,9    | 23,0     | 10,5     | 48       | Id.                              |
| 9 "      | 57,5              | 1,400    | 666,4    | 18,2     | 8,4      | 52       | Cielo azzurro; ☉ libero          |
| "        | 52,0              | 1,329    | 666,5    | 19,5     | 8,1      | 46       | Id.                              |
| "        | 46,1              | 1,265    | 666,5    | 19,6     | 7,8      | 44       | Id.                              |
| "        | 42,0              | 1,229    | 666,3    | 20,4     | 7,8      | 42       | Id.                              |
| "        | 31,3              | 1,202    | 666,3    | 21,7     | 9,4      | 47       | Id.                              |
| "        | 23,4              | 1,209    | 666,4    | 19,7     | 8,2      | 52       | Id.                              |
| 11 "     | 42,0              | 1,199    | 671,7    | 15,5     | 7,8      | 57       | Id.                              |
| "        | 48,2              | 1,343    | 671,7    | 16,2     | 7,9      | 55       | Id.                              |
| "        | 51,6              | 1,353    | 671,8    | 16,2     | 7,5      | 52       | Id.                              |
| "        | 57,0              | 1,375    | 671,8    | 17,6     | 8,0      | 51       | Id.                              |
| "        | 61,2              | 1,391    | 671,9    | 18,7     | 8,2      | 49       | Id.                              |
| "        | 42,3              | 1,241    | 671,6    | 20,0     | 8,0      | 44       | Id.                              |
| 12 "     | 42,4              | 1,134    | 670,9    | 18,3     | 8,9      | 55       | Sereno                           |
| "        | 48,4              | 1,235    | 671,0    | 18,4     | 8,7      | 53       | Id.                              |
| "        | 51,4              | 1,265    | 671,0    | 18,6     | 8,5      | 51       | Id.                              |
| "        | 57,0              | 1,307    | 671,0    | 18,7     | 8,5      | 51       | Id.                              |
| "        | 51,4              | 1,140    | 670,7    | 21,4     | 10,4     | 53       | Id.                              |
| "        | 41,0              | 1,157    | 670,6    | 23,0     | 12,0     | 56       | Id.                              |
| 13 "     | 41,1              | 1,140    | 672,6    | 18,0     | 10,6     | 67       | Id. (osservazione antimeridiana) |
| 14 "     | 33,0              | 1,248    | 676,4    | 19,3     | 8,1      | 46       | Sereno                           |
| "        | 49,5              | 1,248    | 676,5    | 20,0     | 8,1      | 44       | Id.                              |
| "        | 59,2              | 1,249    | 676,4    | 21,3     | 7,6      | 38       | Id.                              |
| "        | 57,7              | 1,276    | 676,1    | 22,0     | 8,3      | 40       | Id.                              |
| "        | 50,0              | 1,296    | 676,2    | 22,4     | 8,5      | 40       | Id.                              |
| "        | 32,2              | 1,194    | 676,0    | 24,0     | 10,0     | 43       | Id.                              |
| 15 "     | 40,0              | 1,152    | 675,3    | 20,6     | 11,4     | 61       | Cielo bianchiccio                |
| "        | 50,6              | 1,205    | 675,4    | 21,5     | 11,4     | 58       | Id.                              |
| "        | 59,0              | 1,233    | 675,3    | 22,8     | 11,5     | 54       | Id.                              |

SESTOLA 1899.

| Giorno      | <i>h</i>          | <i>Q</i> | <i>B</i> | <i>t</i> | <i>f</i> | <i>u</i> | <i>Annotazioni</i>                  |
|-------------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------------------------|
| 16 agosto   | 36,1 <sup>0</sup> | 1,137    | 673,3    | 21,0     | 9,549    |          | Sereno                              |
| "           | 55,2              | 1,385    | 673,4    | 23,1     | 9,945    |          | Id.                                 |
| "           | 57,1              | 1,338    | 673,4    | 22,6     | 9,846    |          | Id.                                 |
| 18 "        | 31,0              | 0,995    | 670,1    | 19,6     | 11,465   |          | Veli intorno al ☉                   |
| "           | 40,0              | 1,211    | 670,2    | 19,8     | 11,967   |          | Cielo nebbioso                      |
| "           | 45,8              | 1,056    | 670,3    | 20,1     | 12,871   |          | Veli intorno al ☉                   |
| 19 "        | 45,7              | 1,339    | 669,9    | 20,5     | 6,835    |          | Cielo azzurro                       |
| "           | 53,2              | 1,357    | 669,9    | 20,8     | 6,633    |          | Id.                                 |
| "           | 56,2              | 1,363    | 670,0    | 21,0     | 6,331    |          | Id.                                 |
| "           | 58,5              | 1,403    | 670,0    | 20,9     | 6,030    |          | Id.                                 |
| "           | 56,2              | 1,556    | 670,2    | 21,4     | 6,632    |          | Id.                                 |
| "           | 53,1              | 1,327    | 670,1    | 21,6     | 6,732    |          | Id.                                 |
| "           | 45,0              | 1,320    | 669,6    | 21,3     | 8,040    |          | Id.                                 |
| "           | 40,5              | 1,348    | 669,7    | 21,9     | 8,038    |          | Id.                                 |
| 20 "        | 30,1              | 1,216    | 669,7    | 17,8     | 9,964    |          | Sereno                              |
| "           | 48,0              | 1,218    | 669,7    | 18,2     | 9,056    |          | Id.                                 |
| "           | 49,3              | 1,176    | 669,7    | 19,4     | 10,058   |          | Veli intorno al ☉                   |
| 24 "        | 28,8              | 1,085    | 672,8    | 16,7     | 4,730    |          | Cielo nebbioso                      |
| "           | 30,4              | 1,134    | 673,1    | 16,2     | 5,336    |          | Id.                                 |
| "           | 45,0              | 1,176    | 673,1    | 17,2     | 7,045    |          | Id.                                 |
| 25 "        | 28,9              | 1,339    | 672,8    | 18,1     | 7,646    |          | Cielo bellissimo                    |
| "           | 39,0              | 1,190    | 673,0    | 18,1     | 7,948    |          | Veli intorno al ☉                   |
| "           | 45,4              | 1,238    | 673,1    | 19,0     | 7,644    |          | Id.                                 |
| 26 "        | 30,6              | 1,130    | 672,3    | 18,4     | 9,155    |          | Cielo bianchiccio                   |
| "           | 35,4              | 1,310    | 672,4    | 18,5     | 9,658    |          | Sereno                              |
| "           | 45,8              | 1,272    | 672,5    | 19,0     | 10,260   |          | Veli intorno al ☉                   |
| 28 "        | 37,0              | 1,203    | 672,2    | 18,4     | 7,948    |          | Sereno                              |
| "           | 42,3              | 1,226    | 672,4    | 18,5     | 8,350    |          | Id.                                 |
| "           | 51,0              | 1,266    | 672,4    | 20,2     | 9,451    |          | Id.                                 |
| 29 "        | 41,3              | 1,126    | 672,6    | 20,9     | 10,555   |          | ☉ libero fra Cu (ora antimeridiana) |
| 30 "        | 41,5              | 1,154    | 672,1    | 18,5     | 10,162   |          | ☉ libero fra Cu (ora antimeridiana) |
| 31 "        | 35,0              | 1,173    | 670,4    | 18,4     | 11,672   |          | ☉ libero fra Cu                     |
| "           | 46,0              | 1,218    | 670,3    | 19,8     | 11,565   |          | Id.                                 |
| 1 settembre | 45,2              | 1,269    | 669,5    | 19,3     | 8,951    |          | Sereno                              |
| "           | 51,9              | 1,313    | 669,7    | 20,4     | 9,149    |          | Id.                                 |
| "           | 46,4              | 1,173    | 669,2    | 21,0     | 8,644    |          | Id.                                 |
| 2 "         | 45,4              | 1,286    | 670,6    | 20,2     | 9,954    |          | Id.                                 |
| "           | 48,2              | 1,254    | 670,7    | 20,0     | 9,653    |          | Id.                                 |
| "           | 53,8              | 1,251    | 670,5    | 20,3     | 9,551    |          | Id.                                 |

CIMONE 1899.

| Giorno   | <i>h</i>          | <i>Q</i> | <i>B</i> | <i>t</i> | <i>f</i> | <i>u</i> | <i>Annotazioni</i>                                   |
|----------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------------------------------------------|
| 6 agosto | 52,8 <sup>0</sup> | 1,399    | 592,0    | 11,9     | 8,9      | 83       | Cu sparsi; ☉ bellissimo (osservazione antimeridiana) |
| 7 "      | 32,8              | 1,029    | 591,2    | 10,2     | 5,6      | 62       | Sereno                                               |
| "        | 36,0              | 1,213    | 591,2    | 11,3     | 6,0      | 58       | Id.                                                  |
| "        | 43,2              | 1,226    | 591,3    | 12,2     | 6,1      | 54       | Si sono formati dei Cu                               |
| "        | 48,0              | 1,199    | 591,4    | 12,8     | 5,3      | 53       | ☉ fra veli                                           |
| "        | 53,1              | 1,344    | 591,5    | 12,9     | 5,6      | 51       | ☉ libero                                             |
| "        | 58,0              | 1,328    | 591,5    | 12,9     | 5,6      | 51       | Id.                                                  |
| "        | 59,6              | 1,287    | 591,6    | 13,0     | 5,8      | 50       | Qualche velo intorno al ☉                            |
| "        | 61,0              | 1,403    | 591,8    | 13,1     | 6,1      | 50       | ☉ libero                                             |
| "        | 36,4              | 1,528    | 591,7    | 13,5     | 5,7      | 47       | Id.                                                  |
| "        | 32,8              | 1,432    | 591,4    | 11,6     | 5,5      | 47       | Id.                                                  |
| 11 "     | 27,5              | 1,284    | 590,1    | 7,5      | 5,0      | 66       | Sereno                                               |
| "        | 31,8              | 1,327    | 590,4    | 7,9      | 5,2      | 64       | Id.                                                  |
| "        | 33,4              | 1,157    | 590,7    | 8,2      | 5,3      | 64       | Veli intorno al ☉                                    |
| "        | 42,0              | 1,289    | 591,0    | 8,4      | 5,6      | 63       | Id.                                                  |
| "        | 46,3              | 1,276    | 591,5    | 8,4      | 5,1      | 61       | Id.                                                  |
| "        | 48,4              | 1,357    | 591,7    | 8,4      | 5,0      | 60       | Sereno                                               |
| "        | 60,5              | 1,416    | 593,2    | 9,3      | 4,9      | 54       | Id.                                                  |
| "        | 61,0              | 1,418    | 593,2    | 9,6      | 4,4      | 52       | Id.                                                  |
| 24 "     | 24,5              | 1,378    | 592,5    | 9,6      | 5,4      | 61       | Orizzonte caliginoso ☉ libero                        |
| "        | 38,0              | 1,382    | 592,6    | 6,6      | 4,7      | 67       | Id.                                                  |
| 25 "     | 27,0              | 1,376    | 592,1    | 8,3      | 4,8      | 58       | Id.                                                  |
| "        | 37,3              | 1,303    | 592,4    | 8,6      | 4,8      | 52       | Cu sparsi qualche velo intorno al ☉                  |
| "        | 48,2              | 1,452    | 592,6    | 9,6      | 4,4      | 49       | ☉ libero                                             |
| "        | 53,0              | 1,443    | 592,8    | 9,7      | 4,3      | 48       | Id.                                                  |
| "        | 57,0              | 1,323    | 592,9    | 10,4     | 4,3      | 45       | Cielo bianchiccio qualche velo intorno al ☉          |

**Mineralogia.** — *La Galena bismutifera di Rosas (Sulcis) e Blende di diverse località di Sardegna* <sup>(1)</sup>. Nota del dott. C. RIMATORI, presentata dal Socio STRUEVER.

Nel rendere nota la composizione chimica di alcuni manganese di Sardegna <sup>(2)</sup>, espressi anche il desiderio di esaminare, principalmente dal lato chimico, tutti quei minerali che di mano in mano mi potessero capitare sott'occhio, allo scopo stesso, a cui accennai in quella pubblicazione.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Museo di Mineralogia e Geologia della R. Università di Cagliari.

<sup>(2)</sup> Rendiconti Acc. Lincei, vol. X, serie 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem., 1901, fasc. 10.

Il sig. ing. Cappa, direttore della Miniera di Rosas, con la scoperta di una galena bismutifera nei giacimenti coltivati sotto la sua direzione, mi ha dato occasione a riprendere lo studio analitico di alcuni minerali sardi.

Parecchi mesi fa egli inviava al prof. Lovisato degli esemplari della galena suddetta in magnifici cristalli, accompagnati da altri bellissimi di blenda. Questi campioni, dai quali furono levate le quantità necessarie per l'analisi, provengono dalle parti più ricche della Miniera, cioè da un filone nord-sud, situato nella regione ovest della concessione, e che fu messo in evidenza solo in questi ultimi anni. Difatti l'egregio Direttore dando qualche cenno su quegli interessanti giacimenti, a proposito di quello che comprende la galena bismutifera, così scrive al prof. Lovisato: « La galena appartiene ad un giacimento filoniano la cui direzione media è nord-sud magnetico. Esso si trova (almeno nelle parti superiori) al contatto fra un calcare nero siliceo e degli scisti biancastri (evidentemente alterati). È costituito da diabase (così almeno fu considerato dal Riva e da altri) con ricche concentrazioni di solfuri metallici, in predominanza blenda, poi viene la galena, poi la pirite e la calcopirite. Questi solfuri di ferro e di rame non sono sparsi nella massa come avviene in altri giacimenti, ma piuttosto divisi in piccole vene. Dentro negli scisti si trovano ancora dei misti in crepacce, che probabilmente rappresentano dei pezzi dei banchi calcarei scomparsi, ed allora il minerale più puro si trova in agglomerato di cristalli come il campione che le ho mandato. Gli scisti si trovano all'ovest, il giacimento non è continuo ».

I cristalli di galena molto nitidi ed alcuni anche ben sviluppati, risultano dalla combinazione del cubo con l'ottaedro con predominio generalmente del primo; essi sono accompagnati da cristalli talvolta vistosi di blenda e da piccole quantità di altri solfuri (pirite e calcopirite). In complesso i campioni presentano un aspetto che ricorda molto quelli della Miniera del Bottino.

In un primo saggio per la conferma della presenza del bismuto e per il dosaggio, ottenni 0,17 % di questo elemento, essendo poco più di 5 grammi la sostanza adoperata. Non essendo però troppo sicuro dell'esattezza di tale determinazione, e d'altra parte sembrandomi interessante conoscere l'intera composizione, specialmente per ciò che riguardava l'argento ed altri metalli, che eventualmente potevano trovarsi, in altra porzione di sostanza effettuai i dosaggi nel modo seguente:

Grammi 10,5008 di galena furono intaccati con acido nitrico fumante, che venne poi eliminato evaporando in presenza di acido solforico. Separato il solfato di piombo, dal liquido fu precipitato l'argento con acido cloridrico, quindi, mediante idrogeno solforato, il solfuro di bismuto; infine nella soluzione filtrata fu dosato il ferro e lo zinco. In altra parte di sostanza ossidata col cloro in un mezzo alcalino, fu determinato lo zolfo.

Densità a 19°, 1 = 7,42.

Composizione centesimale

|    |       |
|----|-------|
| S  | 13,09 |
| Ag | 0,02  |
| Pb | 85,43 |
| Bi | 0,11  |
| Fe | 0,04  |
| Zn | 0,15  |
|    | <hr/> |
|    | 98,84 |

Questa composizione differisce assai poco da quella tipica; può darsi che il ferro e lo zinco provengano da un po' di blenda, che, nonostante accurata purificazione, può essere passata insieme alla galena; quanto al bismuto che costituisce una specialità di questa galena di Rosas, dalla mia analisi risulta in quantità inferiore a quella riscontrata in un'analisi non completa eseguita a Rosas, dove fu trovato 0,25 %. Avrei voluto ripetere l'analisi della galena in massa nella speranza di ottenere concordanza di risultati, poichè credo che il tenore in bismuto della parte cristallina possa differire da quello della parte compatta. Però non è stato possibile avere per ora di quella galena. Il gentile Direttore di Rosas al prof. Lovisato, che gliene fece richiesta, così rispondeva: « Non posso mandarle di quella galena in massa perchè ormai la lente ricca, nella quale s'è trovato il bismuto, è già coltivata al di sopra del livello Asproni; ci resta però la parte inferiore che metteremo in coltivazione fra qualche mese ed allora le potrò mandare quanto desidera ».

Ammissa questa diversità nella percentuale di bismuto, interessante sarebbe, come osserva benissimo l'ing. Cappa, ricercare in quali relazioni sta il bismuto con l'argento, cioè se la galena più ricca in bismuto sia più povera in argento, ciò che sarebbe confermato dai risultati avuti col trattamento in laveria ed anche dai risultati della mia analisi. Infatti la galena analizzata dà solo 0,02 % d'argento, mentre la media della galena di Rosas, a quanto scrive lo stesso illustre Direttore di quella miniera, sarebbe 0,15 % d'argento.

Di tutte le galene analizzate, a mia conoscenza, solo due hanno accusato la presenza di bismuto, cioè quella di Koprein <sup>(1)</sup>, che è la più ricca (1,97 %) e quella di Nordmarken <sup>(2)</sup>, contenente il 0,76 %. Per quanto riguarda l'argento, anche queste galene, come la nostra, si dimostrano poverissime; difatti per la prima, che è la più bismutifera, non sono indicate nemmeno tracce d'argento, l'altra ne contiene soltanto 0,05 %.

<sup>(1)</sup> Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, Vierte Lieferung, S. 513.

<sup>(2)</sup> Id. id.

Attratto dalla specialità della galena di Rosas, ho creduto interessante eseguire l'analisi anche della blenda, che l'accompagna, e nello stesso tempo, per consiglio del prof. Lovisato, estendere le ricerche chimiche anche ad altri campioni dello stesso minerale provenienti dalle principali miniere e località sarde, allo scopo principalmente di vedere se le blende di Sardegna contenessero solo tracce, oppure quantità apprezzabili di cadmio.

Per le analisi ho seguito questo metodo:

Sciolta la sostanza in acido cloridrico, fu evaporata la soluzione e ripreso quindi il residuo con acqua contenente circa il 4 % dello stesso acido. Per azione dell'idrogeno solforato, fu precipitato il solfuro di cadmio insieme ad altri solfuri del 2° gruppo in quantità talora piccole e altre volte trascurabili. Il cadmio fu pesato allo stato di solfuro: in metà della soluzione filtrata, trasformata in solforica, fu dosato volumetricamente il ferro e dall'altra metà furono precipitati con carbonato sodico il ferro e lo zinco, che poi vennero pesati allo stato di ossidi. Lo zolfo fu sempre determinato in una porzione separata di sostanza fondendola con una miscela di salnitro e carbonato sodico.

Non ho trascurato di fare qualche osservazione allo spettroscopio, ma senza alcun risultato.

Campione n. 1. — Blenda di Rosas. Presenta cristalli abbastanza sviluppati, che, per la ricchezza di facce, gareggiano con quelli di Rio Ollorchi, di cui parlerò in appresso. Viva lucentezza adamantina, color nero, polvere rosso scura.

Densità a 19°,1 = 4,03

Dr 3,5

Composizione centesimale

|    |        |
|----|--------|
| S  | 33,64  |
| Cd | tracce |
| Fe | 8,79   |
| Zn | 58,15  |
|    | <hr/>  |
|    | 100,58 |

Campione n. 2. — Proviene dall'argentiera della Nurra, località interessante perchè, oltre alla blenda e la galena, contiene diversi solfoantimoniuri, fra cui la Bournonite recentemente studiata dal prof. Lovisato (<sup>1</sup>). Si distingue da quella precedente perchè i cristalli, che si presentano piuttosto raramente, non sono nè così sviluppati, nè così ricchi di facce; presentano ancor essi vivo splendore e color nero quando sono abbastanza grandi, mentre nelle parti sottili notasi una colorazione giallo-miele più o meno carico. Generalmente è quasi compatta e di color più chiaro della parte ben cristallizzata. La polvere è rosso scura.

(<sup>1</sup>) Rend. Acc. Lincei, vol. X, serie 5<sup>a</sup>, 2° sem., 1901, fasc. 12.

Densità a  $12^{\circ},3 = 4,01$

Dr = 3,5

Composizione centesimale

|       |        |
|-------|--------|
| S     | 33,39  |
| Pb    | 1,16   |
| Cd    | 0,14   |
| Fe    | 4,17   |
| Zn    | 61,20  |
| Ganga | 0,56   |
|       | <hr/>  |
|       | 100,62 |

Campione n. 3. — Deriva da Montevecchio, una delle più ricche Miniere sarde, e precisamente dal cantiere Principe Tommaso. In qualche punto appaiono netti dei cristalli isolati, però anche questi meno ricchi di facce di quelli di Rosas; talora appaiono con vivo splendore e colore traente al rosso giacinto specialmente nelle masse sottili.

La polvere è grigio-rossastra chiara.

Densità a  $13^{\circ},7 = 4,05$

Dr. 3,5.

Composizione centesimale

|       |        |
|-------|--------|
| S     | 32,94  |
| Pb    | tracce |
| Cu    | tracce |
| Cd    | 0,95   |
| Zn    | 63,36  |
| Fe    | 2,33   |
| Ganga | 0,40   |
|       | <hr/>  |
|       | 99,98  |

Questa blenda più delle altre si avvicina alla composizione tipica ed è compresa fra le più ricche in cadmio.

Campione n. 4. — Appartiene al giacimento argentifero di Giovanni Bonu (Sarrabus); il campione esaminato è un frammento del filone blendoso e precisamente della vena tetto (zona ricca), che trovasi al decimo livello. È in massa a cristallizzazione imperfetta accompagnata dalla calcite nello schisto. L'aspetto ed il colore ricordano quelli del campione precedente; la polvere è grigio-giallognola.

Densità a  $12^{\circ},8 = 4,04$

Dr. 3,5.

Composizione centesimale

|    |        |
|----|--------|
| S  | 32,37  |
| Pb | tracce |
| Cu | tracce |
| Cd | 0,93   |
| Fe | 2,57   |
| Zn | 63,63  |
|    | <hr/>  |
|    | 99,50  |

Anche questa si distingue per la ricchezza in cadmio: la somiglianza poi con la blenda precedente sia nell'aspetto che nei caratteri fisici e la quasi corrispondenza per la composizione chimica mi inducono ad ascrivere la blenda proveniente da uno dei più importanti giacimenti piombiferi isolani, alla stessa varietà di quella proveniente da uno dei più ricchi giacimenti argentiferi del Sarrabus.

Campione n. 5. — Proviene dal permesso Riu Planu Castangias (Gonnosfanadiga). È in massa cristallina, a cristallizzazione assai meno distinta delle altre, inoltre non si son potuti avere, come per le altre blende, degli esemplari puri, perchè è così intimamente mescolata con della ganga in minuti granuli verdognoli, che non è possibile purificarla meccanicamente, ma solo con liquidi densi. Essendo però la ganga inattaccabile dall'acido cloridrico, come è risultato da una prova a parte, si è potuto per via chimica effettuare lo stesso la separazione della sostanza estranea. Colore nero marcato, splendore vivo adamantino, polvere rosso-scura.

Densità a 14,5 = 3,98

Dr. 4.

Composizione centesimale

S 33,90

Cd 0,09

Zn 53,55

Fe 12,46

100,00

Il colore più intenso della massa e della polvere ci è giustificato dalla diversità della composizione. La ricchezza in ferro, che distingue questa blenda da tutte le altre, ci permette di considerarla come *Marmatite*, essendo così denominate quelle varietà contenenti 10 % e più di ferro.

Campione n. 6. — Deriva da Rio Ollorchì in quel di Seneghe; questa località ha dato i più bei esemplari perchè i cristalli, oltrechè essere nettamente formati, presentano il maggior numero di facce finora osservate dal prof. Lovisato nelle blende sarde. Difatti ai suoi allievi, nelle lezioni di Mineralogia, mostra degli splendidi cristalli con queste combinazioni:

$$\varphi \{111\} \psi \{111\} \{110\} \chi \{211\}$$

Alla bellezza dei cristalli, non molto frequenti, fa contrasto la parte massiccia, che è assai impura, costituita com'è da un minuto impasto di blenda, galena e ganga, tanto che il colore, generalmente chiaro, trae al grigio di piombo. Si è dovuto perciò effettuare una purificazione molto accurata non potendo sacrificare i cristalli per le determinazioni analitiche. La polvere è grigio-scura.

Densità a 15,6 = 3,89

Dr. 4.

Composizione centesimale.

|    |        |
|----|--------|
| S  | 32,78  |
| Cd | tracce |
| Cu | tracce |
| Fe | 2,62   |
| Zn | 64,06  |
|    | <hr/>  |
|    | 99,46  |

Concludendo, dirò che dalle analisi citate e da quelle eseguite finora da altri, risulta che il cadmio accompagna quasi costantemente lo zinco nelle blende, essendo poche quelle, che non ne abbiano accusato nemmeno tracce; non credo fare ipotesi troppo arrischiata, ammettendo che anche queste ne contengano tracce più o meno sensibili. Le quantità di cadmio variano fra limiti abbastanza estesi: finora conosco 7 blende soltanto che per la percentuale di cadmio superano quelle più ricche di Sardegna, cioè quelle di Schemnitz <sup>(1)</sup>, di Kapnik, del Bottino, di Wheatley-Mine Pa., di Lyman do., di Shelbourne, di Przibram <sup>(2)</sup> ed un'altra analizzata da Sipök. Quanto alla composizione chimica delle blende sarde troviamo delle variazioni abbastanza notevoli. Difatti quelle del Sarrabus, di Montevecchio, di Rio Ollorchi, dell'Argentiera della Nurra s'avvicinano più delle altre alla composizione tipica, differendo però notevolmente fra loro, poichè mentre le prime due sono ricche in cadmio e povere in ferro, l'ultima invece, essendo la più ferrifera, contiene tracce di cadmio. Quella di Rio Ollorchi si scarta meno delle altre dalla formola tipica. Le blende poi di Rosas e di Gonosfanadiga contengono la maggior quantità di ferro, quest'ultima poi, che ne è più ricca, rappresenta la varietà *marmatite*.

Nel chiudere questa Nota, sento il dovere di esprimere la mia viva gratitudine al prof. Lovisato, che mi guidò e mi fornì il materiale necessario per queste ricerche.

<sup>(1)</sup> Hintze, *Handbuch der Mineralogie*, Vierte lieferung. S. 592, 593, 594.

<sup>(2)</sup> Dana, *A System of Mineralogy* 1883, pag. 49.

**Patologia vegetale.** — *Di una speciale infezione crittogamica dei semi di erba medica e di trifoglio* <sup>(1)</sup>. Nota del dott. VITTORIO PEGLION, presentata dal Socio PIROTTA.

L'alterazione speciale delle semenzine di erba medica e trifoglio, che forma oggetto della presente Nota, se è sfuggita sinora agli studiosi di patologia vegetale, è da tempo nota ai pratici agricoltori; non havvi, si può dire, partita di dette semenzine, di una certa entità, in cui un esame oculato non isveli la presenza di una percentuale variabile di semi di colore bruno, analogo a quello della buccia di fava, talora lievemente stremenziti, che, posti in condizioni opportune, anzichè germinare marciscono sollecitamente. Non si tratta quindi di semi duri, che, del resto, come ha recentemente dimostrato l'egregio prof. Todaro, non offrono alcun carattere esterno, macroscopico, che permetta di distinguerli dal rimanente di una determinata massa di semi.

Non si tratta neppure di semi abortiti, poichè le dimensioni che essi raggiungono ed il semplice esame dello sviluppo assunto dall'embrione, permettono di escluderlo.

Gran parte di questi semi, perchè più leggeri di quelli normali, si possono eliminare coll'accurata lavorazione fatta coi moderni vagli-cernitori. Il *ventilato pesante e leggero* separato, a mo' di esempio, dal decuscatore Röber è formato in gran parte da questi semi. Tuttavia è assai difficile, se non impossibile di epurarne completamente le ingenti masse di semenzine che si assoggettano correntemente a questa operazione, in specie se non si ricorra ad arnesi perfezionati; ed infatti la mia attenzione è stata richiamata per la prima volta dalla presenza di numerosi semi bruni esistenti in una partita di erba medica, di provenienza valliva e che si era cercato di selezionare colla crivellatura accurata ma eseguita col crivello tradizionale.

Per accertare la estrema diffusione di siffatti semi scuri, basta vagliare mediante un vaglio-separatore a mano, tipo Nobbe e Röber, un campione di qualche centinaio di grammi di sementa di erba spagna: nella porzione che è trattenuta dallo staccio a fori di 1.75-1.50 mm. di diametro, non tarda a radunarsi la maggior parte di questi semi che si possono allora isolare ed assoggettare allo studio.

Per quanto il prodotto di tale stacciatura, venga costituito dalle semenzine più voluminose, che dovrebbero quindi esser costituite meglio del

(<sup>1</sup>) Relazione e studi della Cattedra Ambulante di Agricoltura per la Provincia di Ferrara.

rimanente, tuttavia è facile accertarsi che il valore agricolo dei semi bruni in tal guisa radunati, come ben sanno i pratici, è assai basso se non del tutto negativo; infatti è raro il caso che la germinabilità di essi superi il 10 °. La massima parte di questi semi bruni, sebbene si creino condizioni favorevoli alla germinazione, si rigonfia e si ricopre di una fitta vegetazione crittogamica che ne determina il rapido disfacimento.

Tale saggio che ho ripetuto più volte, con materiale proveniente da vari punti della provincia di Ferrara, avendomi fornito risultati costanti anche dal punto di vista della forma fungina che prendeva origine da detti semi, mi parve non privo di interesse di seguire da vicino lo svolgersi del fenomeno e cercare di stabilire se il micelio preesistesse in seno ai tessuti del seme allo stato di riposo, ovvero se si trattasse di infezione prodotta da germi viventi all'esterno dei tegumenti. A tale uopo ho praticato una serie di osservazioni macroscopiche su semi allo stato di perfetto riposo e da un altro canto, posi in germinatoio un certo numero di semi scuri, previamente trattati con una soluzione di sublimato corrosivo all' 1 ‰, indi lavati con acqua di fonte.

Praticando delle sezioni longitudinali o trasversali di questi semi scuri, allo stato di riposo, si osserva che in generale l'embrione è normalmente sviluppato ed il materiale di riserva accumulato nei cotiledoni non è sensibilmente minore che nei semi scuri. Il tegumento seminale rivela invece costantemente una più o meno intensa infezione fungina; nelle preparazioni debitamente trattate, si osserva un fitto intreccio di ife miceliali, ialine, settate, torulose, di calibro variabile, ricche di guttule rifrangenti che s'insinuano attraverso allo strato aerifero, situato fra lo strato sclerenchimatico, o pigmentario (stäbchen schicht) e lo strato proteinico (Proteinschicht del Nobbe) e da questo passa ad espandersi nel tessuto lasso, gelificabile (quellschicht) che limita internamente il tegumento seminale, combaciando coi cotiledoni quando, assorbita l'acqua necessaria, il seme siasi rigonfiato.

Nei semi leggermente striminzi, che sono fortemente infetti, le ife miceliali invadono anche i cotiledoni, alterandoli più o meno profondamente.

Se si praticano le sezioni su semi rigonfiati in seguito a 24 ore di permanenza nel germinatoio, lo sviluppo assunto dalla rete miceliale è assai marcato: numerose ife si vedono allora attraversare il tegumento e spuntare all'esterno del seme.

Anche i semi previamente disinfettati, dopo 24-28 ore di permanenza nel germinatoio, alla temperatura dell'ambiente, si ricoprono di una efflorescenza candida che li avvolge completamente e che assume rapidamente una colorazione grigiastrea e poi bruna, indizio di fruttificazione: infatti si formano allora innumerevoli catenelle di spore, aventi i ben noti caratteri dell'*Alternaria tenuis*.

Mantenendo a lungo il materiale infetto in condizioni opportune, la caratteristica efflorescenza grigio-brunastra che avvolge i semi, si affloscia e si dilegua: si organizzano invece innumerevoli noduletti miceliali neri che conferiscono alla superficie del seme l'aspetto zegrinato. Detti noduli presentano nei primi stadi di sviluppo la struttura pseudoparenchimatica degli sclerozi, e sono limitati da uno strato corticale scuro, carbonaceo; differenziatosi questo, il nucleo centrale di questo corpo scleroziale si riassorbe in guisa da dar origine ad una cavità tappezzata da elementi piccolissimi, la cui zona basilare si differenzia in strato imeniale da cui prendono origine aschi frammisti a parafisi filiformi, settate. Dopo 15-20 giorni di permanenza in germinatoio, i periteci sono maturi, ed è facile allora di riconoscere la *Pleospora Alternariae* Griff. e Gib.

Limite a questi i pochi cenni intorno allo sviluppo di questa crittogama il cui ciclo evolutivo fu così accuratamente illustrato dagli studi di Gibelli e Griffini, studi che ebbero più recentemente intera conferma dalle prove sperimentali del prof. Mattiolo.

La germinabilità dei semi scuri di erba medica e di trifoglio è assai bassa; quegli stessi semi che germinano non sempre danno piantine vitali: è frequente il caso, almeno nelle prove da me eseguite, in cui la giovane piantina appena abbia liberato i cotiledoni dal guscio, sia colpita dal fungo ed il micelio dopo invaso un tratto di fusticino per una lunghezza di 4-5 millimetri, lo ricopra di fruttificazioni conidiali (*Alternaria*) e ne determini il rapido disfacimento.

Tale fenomeno richiama alla mente le osservazioni compiute alcuni anni or sono dal Behrens, che ebbe a segnalare l'*Alternaria tenuis* quale determinante di una speciale moria delle giovani germinazioni di tabacco.

È fuori da ogni dubbio che questa crittogama in condizioni normali viva allo stato saprofitico; ma le geniali esperienze del Laurent hanno indicato chiaramente che vi sono forme fungine abitualmente saprofitiche le quali possono assumere una attitudine decisamente patogenica in determinate condizioni di ambiente. Il Lepoutre e, più recentemente, il Van Hal hanno ottenuto risultati consimili anche dallo studio di alcune fra le forme banali di batteri, che mediante speciali processi sono stati resi parassiti di piante viventi.

Non vi sarebbe da far meraviglia che siffatta trasformazione potesse accadere in natura anche per la comunissima *Alternaria tenuis*, ogniqualvolta vi fosse concomitanza tra questa esaltazione nella virulenza ed un complesso di circostanze che valgano ad indebolire le piante di medica o di trifoglio, ad attenuarne l'innata resistenza all'infezione; difatti è opinione assai diffusa fra i produttori di semenzina che questa speciale alterazione sia oggidì assai più comune che per il passato, e che la percentuale di semi

bruni sia maggiore nelle partite di semenzine, provenienti da appezzamenti ove il taglio di medica o di trifoglio, mandato a seme, per la eccezionale feracità del terreno o per avversità meteoriche, siasi allettato ovvero sia stato sopraffatto dall'esuberanza della nuova vegetazione ripullulante prima della falciatura. Questa condizione di cose che, pel passato, era del tutto eccezionale, oggi, invece, accade frequentemente, inquantochè le generose concimazioni letamiche, che molti usano ancora all'impianto dei medicai, e soprattutto l'uso razionale di concii fosfatici e di gesso, provocano un meraviglioso sviluppo di questi prati artificiali, cui è indubbiamente collegato il prospero svolgersi dell'economia agricola di queste progredite plaghe. Talvolta soprattutto nel caso del trifoglio, il rigoglio vegetativo è tale da costringere di mandar a seme i trifogliai dell'anno, che se si dovesse adibire a tal uopo il trifogliato di due anni, la produzione di sementa verrebbe resa del tutto aleatoria.

Havvi qualche agricoltore che, edotto a fondo delle consuetudini colturali antiche, ricorda l'usanza, oggi dimenticata, almeno da noi, di riunire a fascetti i getti di erba medica, lasciati a frutto, in guisa da impedirne l'allettamento e da agevolare la regolare maturazione dei frutti. In tal modo si evitavano le conseguenze dannose che deprezzano le semenzine prodotte invece nelle condizioni attuali e si potrebbe dar ragione della maggior frequenza con cui oggi si riscontrano semi scuri nelle partite di medica e di trifoglio.

Intesa in tal senso, questa infezione crittogamica delle forraggere, offrirebbe non pochi punti di analogia colla golpe bianca del frumento, prodotta anch'essa da un fungo abitualmente saprofitico (*Fusarium roseum*), ma che può assumere uno speciale comportamento parassitario, infierendo con maggior virulenza nei frumenti allettati, oltrechè nelle varietà non adattate all'ambiente culturale.

Ho ritenuto non del tutto privo d'interesse il riunire queste poche osservazioni sommarie intorno a questa diffusa alterazione dei semi di medica e di trifoglio, nella speranza che esse vengano tenute nel debito conto dai nostri pratici agricoltori quando debbano procedere all'acquisto delle semenzine. I detti semi bruni non hanno alcun valore agricolo e si deve cercare quanto più sia possibile di epurarne le partite di semenzine. Ciò implica, è vero, un maggior lavoro di ventilatore e di cernitore, e, quel che più importa, un rilevante *calo* della massa, il che giustifica largamente il distacco, talora assai notevole, che havvi tra il prezzo del seme, quale esce dalla macchina e crivellato grossolanamente ed il prezzo delle partite di seme selezionate razionalmente e ripetutamente. L'operazione condotta a dovere importa un *calo* che raggiunge correntemente il 25-30 % e che è giusto di considerare quando sembrano esorbitanti i prezzi attribuiti alle partite *veramente* scelte.

Forse, ed è quanto potranno stabilire ulteriori saggi, dalla proporzione maggiore o minore di questi semi scuri si potrà dedurre un criterio positivo per giudicare della accuratezza di lavorazione cui sono state assoggettate le semenzine. Intanto è bene su di essa aver richiamato l'attenzione dei pratici, perchè possano rendersi conto di una delle ragioni non infrequenti per cui, proceduto alla semina di erbai, seguendo le norme riconosciute razionali, possano talora verificarsi sensibili vuoti che, oltre ad abbassare il prodotto, ne deprezzano anche la qualità perchè i cespi di medica o di trifoglio che limitano i vuoti crescono soverchiamente rigogliosi e lignificano anche se la falciatura si eseguisca a tempo.

**Patologia vegetale.** — *Sulla Botrytis citricola* n. sp. *parassita degli agrumi*. Nota del dott. UGO BRIZI, presentata dal Socio PIROTTA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Zoologia.** — *Sulla coniugazione delle amebe*. Nota di MARGHERITA TRAUBE MENGARINI, presentata dal Socio GRASSI.

Da molto tempo si trovano nella letteratura zoologica degli accenni ad una riproduzione sessuale delle amebe, non creduti dai conoscitori e non tenuti in conto dai compilatori di manuali. È vero che tali osservazioni non erano fatte su culture pure e si riferivano ad osservazioni singole senza seguito, e che, oltre alle amebe, potevano anche riferirsi a tanti altri esseri microscopici, che passano per uno stato ameboide.

I dubbî erano dunque giustificati. Allo stesso tempo però rimane il fatto interessante per la storia del pensiero scientifico, che gli autori invece di cercare, mediante l'esperienza, la conferma o la negazione dei fatti indicati, li negavano senz'altro, perdurando nella convinzione che le amebe costituissero un'eccezione tra tutti gli animali, mercè la loro esclusiva riproduzione per divisione.

Esiste un fatto parallelo a questo riferentesi alla storia delle diatomee. Anche questi esseri, per quanto io sappia, non sono ancora ufficialmente nel novero di quelli che si riproducono per spore dopo avvenuta coniugazione, sebbene questa sia stata intraveduta anni fa da Fr. Castracane con grandissima probabilità.

Ciò che impedì per tanto tempo agli scienziati di vedere la coniugazione e la sporulazione delle amebe era, oltre alla impossibilità di fare delle colture pure, anzitutto il timore di cadere in un errore di sistematica. Si sa-

peva tanto poco del gruppo *Amoebina*, che era una vera fortuna di poter dire, come assioma, che le amebe non hanno nè coniugazione, nè cisti di riproduzione. I micetozoi colla loro fase ameboide hanno delle cisti di riproduzione; bisognava quindi evitare di confondere dei gruppi così diversi. Perciò, quando Grassi scoprì le cisti colle spore nell'*Amoeba Coli*, nessuno vi credette.

Così si può ad es. leggere nel Manuale del Doeflein <sup>(1)</sup> del 1901, come egli temendo una confusione coi micetozoi non vuol tener conto delle colture pure di amebe su terreno nutritivo solido, le quali pur segnano un progresso fondamentale nello studio delle amebe. Per il Doeflein, tutti quelli che se ne sono occupati, tra i quali primo e più fortunato il Celli <sup>(2)</sup>, avrebbero coltivato con ogni probabilità dei micetozoi invece che delle amebe.

Un anno dopo però lo stesso Doeflein afferma in uno scritto sul sistema dei protozoi <sup>(3)</sup>, che le amebine e gli eliozoi « subiranno coi micetozoi inferiori un grande scambio di proprietà » (Besitzstand). Esso aggiunge: « con ciò quest'ultimo ordine sparirà probabilmente per intero, perchè le sue forme inferiori dovranno essere raggruppate, insieme alle amebine e gli eliozoi, in modo perfettamente nuovo ».

Lo Schaudinn poi in un suo recentissimo lavoro <sup>(4)</sup> va più oltre, parlando, si può dire, con una specie di orrore, del gruppo delle amebe, il quale spesso dai medici, e « perfino dai zoologi », è creduto un'unità bene caratterizzata mentre non lo è affatto.

Il punto più dubbio nella storia di queste così mal note amebe è ancora sempre il modo della loro riproduzione, sebbene il lavoro dello Scheel <sup>(5)</sup> sulla riproduzione dell'*Amoeba Proteus*, e specialmente il lavoro dello Zaubitzer <sup>(6)</sup>, del quale parlerò estesamente in seguito, siano di massima importanza su tal punto.

Il Doeflein (l. c.) rappresenta graficamente in un circolo chiuso lo sviluppo delle amebe coll'indicazione « in parte ipotetico ». Prima della cisti di riproduzione esso mette un punto interrogativo colla sottoscritta « posto della probabile coniugazione ».

Prima di parlare estesamente di questa coniugazione voglio rammentare che, anche per quei micetozoi inferiori a cui accenna il Doeflein come origine di confusione colle amebe, esso stesso afferma che non se ne conosce affatto una coniugazione sessuale.

Ed è bene di tener nota di ciò, giacchè realmente non esistono che po-

(1) *Die Protozoen als Parasiten u. Krankheitserreger*. Jena, 1901.

(2) *Intorno alla Biologia delle Amebe*. Roma 1895

(3) *Das System der Protozoen*. Arch. f. Protistenkunde 1 Bd., pag. 169.

(4) *Untersuchungen ueber die Fortpflanzung einiger Rhizopoden*. Arbeiten aus dem Kaiserl. Gesundheitsamt, 1903.

(5) *Beitraege z. Fortpflanzung d. Amoeben*. Festschr. f. C. v. Kupffer. 1899.

(6) *Studien ueber eine dem Strohinfus entnommene Amoebe*. Marburg 1901.

chissime amebe studiate un po' meglio, e che molti laboratorî posseggono, direi così, le loro amebe private.

Così ad es. lo Zaubitzer chiama quella studiata da lui « la mia ameba dalla paglia » (meine Strohamoebe), cioè quella innominata, che esso coltivò da un infuso di paglia.

Giacchè la letteratura moderna pochissimo estesa sulla riproduzione delle amebe è citata in modo esauriente dal Behla e dallo Zaubitzer, mi limiterò qui a citare come rappresentante dei primi autori, che studiarono le amebe direttamente dalle infusioni, nelle quali si trovarono, naturalmente moltissimi altri organismi, il Maggi. Ne trascrivo le parole <sup>(1)</sup>:

« La coniugazione delle amibe io la vidi per la prima volta nell'ottobre 1873. Allora io potei seguire per molte ore al microscopio due individui senza materia alimentare nel loro interno..... Gli pseudopodi dell'uno si confusero con quelli dell'altro, formando come una specie di involucro ialino intorno all'endoplasma del loro corpo unito, il quale alla sua volta si fece un po' più oscuro. Le granulazioni della cavità digestiva, la vescicola contrattile e il nucleo, che in ciascuno di quei due individui apparivano chiaramente prima della loro unione, dopo si fecero alquanto più indistinti; e più la fusione progrediva, maggiormente si manifestava l'indecisione delle parti. Fatta l'unione, sicchè le due amibe mi apparivano come se fossero una sola, non potei più discernere nessuna direzione di corrente dei granuli nella loro cavità gastrica, e piuttosto si vedeva in essa un movimento disordinato di granulazioni ». L'autore non potè osservare il seguito del fatto, vide però « nella infusione naturale » in cui esse stavano, degli individui della medesima specie (*Amoeba Villosa*) fra i quali alcuni che avevano tutta l'apparenza d'essere in coniugazione, perchè molto grandi, poco mobili e col loro interno sprovvisto di materia nutritiva, e nel quale non si potevano vedere nettamente la vescicola contrattile ed il nucleo. Riosservando in quell'istesso mese tale infusione, mi si offerse da un' amiba, in condizioni d'una di quelle che si potrebbero credere il risultato d'una coniugazione, un fenomeno sorprendente, giacchè nell'interna sua massa granulare vidi tutto ad un tratto un movimento delle granulazioni, in seguito al quale l'essere mi si presentò come se fosse una cisti contenente dei granuli. Cessato l'interno movimento, poco tempo dopo, la cisti amibica, se così la si può chiamare, si ruppe in un punto e ne escì il contenuto granulare avente ciascuno l'aspetto di una spora ».

Non è possibile di interpretare con certezza le osservazioni del Maggi riguardo alla sporulazione veduta. Ciò che dice sulla coniugazione di due individui dell'ameba villosa è certo la loro fusione che esso giustamente

<sup>(1)</sup> Sulla coniugazione o zigosi delle amibe. Studi fatti nei Laboratorî di Anatomia e Fisiologia comparata. Pavia 1876.

interpreta come in relazione alla coniugazione. Se però ciò che io vidi nell'*Amoeba Undulans* si ripetesse nelle altre amebe, questa fusione dovrebbe interpretarsi non come coniugazione, ma come formazione del macrogamete.

Il lavoro dello Scheel, sebbene non abbia descritto la coniugazione, è anzitutto importante, perchè la cisti di riproduzione descritta da esso nell'*Amoeba Proteus*, persuase i zoologi di pensare alla possibilità di una riproduzione sessuale nelle amebe.

Il Doefflein, riportandone le figure, si esprime in questo riguardo così: « Nell'*Amoeba Proteus* è stata constatata una seconda forma di riproduzione, la quale succede in condizioni speciali (probabilmente in relazione con una coniugazione). L'ameba forma una cisti globulare, nella quale il nucleo si divide in alcuni frammenti, i quali continuano a dividersi finchè si arriva ad un numero di 500 a 600 nuclei figli. Questi sono divisi nel plasma, soltanto il centro della cisti rimane privo di nuclei. Intorno ad ogni nucleo si separa dal plasma materno una porzione, la quale si isola sempre più, finchè ognuna di queste parti rappresenta una piccola ameba. Quando le giovani amebe erompono dalla cisti, il plasma centrale vi rimane come corpo residuale ».

Nelle cisti colle spore da me viste (fig. 4) si osserva pure che il centro rimane privo di queste, mentre nelle figure dello Zaubitzer le spore sono sparse irregolarmente per tutta la cisti.

Non è qui il luogo di parlare della *Leydenia gemmipara* descritta dallo Schaudinn. Essa differisce talmente, per le reti formate da molti individui e per il modo della sua gemmazione, come per la sua vita parassitaria, dall'*Amoeba Proteus*, dall'ameba dello Zaubitzer e dall'*Amoeba undulans* (le uniche cioè di cui si conosce ora, più o meno, tutto il ciclo), che la accenno soltanto per dire che essa, per non accrescere la confusione, non dovrebbe essere classificata colle vere amebe.

Anche la riproduzione dell'*Amoeba Coli* descritta in questi ultimi giorni, insieme a quella di una nuova *Amoeba Hystolitica* dallo Schaudinn differisce talmente da ciò che è noto di quelle amebe ora citate, che è assolutamente inutile di cercare qualunque relazione tra il suo ciclo di sviluppo e quello dell'*Amoeba undulans* che descriverò dopo. Schaudinn stesso alla fine del suo interessantissimo lavoro, inclina a classificare l'*Amoeba Coli* e quella *Hystolitica* tra i micetozoi inferiori.

Riassumerò ora il lavoro dello Zaubitzer (l. c.). Esso coltivò un'ameba ottenuta da un infuso di paglia su di un terreno solido di agar e somatose. Dopo aver descritto la moltiplicazione per scissione, come è stata osservata dagli autori, dice, che cinque o sei giorni dopo l'innesto sul terreno nutritivo, si trovano degli animali, che aderiscono fortemente tra di loro, due a due, in modo che anche trasportati in goccia pendente si staccano difficilmente. Se si indurisce il preparato e si colora coll'ematossilina, si vedono i due nuclei,

che posseggono poca cromatina, debolmente colorati, e si vedono dei filamenti più o meno netti, che convergono verso la zona di contatto degli animali.

Al polo opposto si vedono spesso delle escrescenze gemmiformi, come se fosse eliminata una parte della sostanza. L'autore non dice se questa sostanza appartenga al nucleo, come non si capisce se le linee convergenti facciano parte di questo. Esso dice inoltre di rimanere in dubbio se quei globuli, i quali si staccano come gemme, siano realmente delle gemme di riproduzione e quindi un terzo modo di riproduzione.

Si osservano inoltre altre masse protoplasmatiche la di cui grandezza dimostra, che si abbia da fare con due animali; però si vede nettamente un ponte protoplasmatico tra i due animali come se avesse luogo una fusione dei due organismi. In quest'ultimo caso quelle linee convergenti non si toccano più, invece si presentano già all'occhio dell'osservatore due o più nuclei di grandezza diversa e che dimostrano già talvolta una forma allungata (Semmelform). Questi nuclei, i quali si formano nell'animale prima dell'incistamento, ricordano all'autore quelli descritti dallo Scheel nella cisti già formata dell'*Amoeba Proteus*.

Le amebe in questa fase non hanno più vacuoli e non formano più pseudopodi, ma si muovono « a modo delle lumache, però con una certa rapidità ». Poi ha luogo l'incistamento. Dalle cisti si vuota, dopo alcuni giorni, un contenuto di granuli, i quali finiscono crescendo ed animandosi, finchè passano rapidamente per il campo ottico, girando intorno al proprio asse. Dopo un giorno l'animale è più tranquillo, si osserva il manifestarsi del nucleo e della vacuola e la formazione degli pseudopodi.

L'autore dà tutte le sue interpretazioni sotto forma di dubbio. Esso cerca giustamente nell'effetto diverso della stessa colorazione sull'ameba nella fase vegetativa, ed in quella ora descritta, un appoggio alla sua « supposizione, che abbia luogo una unione passeggera o duratura dei due individui ».

Rilevo questo dubbio perchè lo Zaubitzer ha probabilmente osservato, come il Maggi, la fusione delle amebe. La coniugazione di esse, se debbo giudicare dalle mie osservazioni, dura così poco tempo, e finisce poi col completo distacco tra i due animali, che non è possibile di non seguirla per intero.

Vengo ora alle mie osservazioni sull'*Amoeba undulans* (Celli e Fiocca, l. c.). Il prof. Celli mise generosamente a mia disposizione il materiale, il quale servì al suo interessante lavoro. Mi servii pure del suo metodo di coltura. Celli e Fiocca coltivarono con eccellente successo diverse specie di *Amoeba* sul *Fucus crispus* alcalizzato. Scelsi tra esse l'*Amoeba undulans* perchè è la più grande, e feci le mie osservazioni pure secondo il metodo del Celli nella goccia pendente di *Fucus cr.* filtrato. Aggiunsi al *Fucus* un po' di eosina.

perchè le amebe mi servivano ad uno studio sulla loro permeabilità osmotica <sup>(1)</sup>. Osservai in tale occasione, per caso, la coniugazione di esse. Naturalmente studiai col massimo interesse questi fenomeni nuovi e procurai di seguirli sino alla fine. Però le mie osservazioni rimasero frammentarie. Esse datano dal 1895, ed allora non le pubblicai nella speranza di completarle, lo che non mi riuscì per ragioni estranee. Se le pubblico ora, imperfette come sono — mancano completamente tutte quelle osservazioni sul nucleo, che richiedono la sua colorazione — è, perchè vedo che alcuni autori si son finalmente convinti che bisogna considerare le amebe da un altro punto di vista, e che bisognerà smembrare il gruppo delle amebine come è stato costituito sinora. Quindi non potrà passare tempo senza che si arrivi a fare la storia completa del loro sviluppo. Parlando di amebe intendo parlare di quegli animali compresi nel confuso gruppo sinora chiamato Amoebina, i quali oltre alla loro locomozione a base di pseudopodi hanno due generazioni alternanti, una cioè di animali, che si riproducono per scissione, ed un'altra, nella quale gli animali si riproducono per spore e dopo avvenuta coniugazione, la quale ha luogo, per lo meno nell'ameba studiata da me, tra macro e microgameti.

Dopo avere osservato la scissione e l'incistamento dell'*Amoeba undulans* descritto da Celli e Fiocca, che tennero le amebe in stufa ad una temperatura tra 37° e 39° e le osservavano in goccia pendente col porta oggetti riscaldato, provai di togliere la coltura dalla stufa e di tenerla alla temperatura del laboratorio, cioè ad una temperatura più bassa di circa 10 e più gradi. Gli animali continuarono al principio a dividersi per scissione, sebbene si movessero con maggiore lentezza e parevano come intorpiditi. Riuscii allora a seminare diverse volte, innestando da una goccia pendente all'altra una sola cisti in goccia pendente. Trovai dopo 12 ore l'animale uscito dalla cisti ma movendosi pigramente. Dopo altre 12 ore l'animale era sparito e non trovai che la cisti vuota, rossa d'eosina.

Se si innestano più cisti o più animali, si innestano per conseguenza anche dei batteri (v. Celli e Fiocca, l. c.). In tal caso le amebe si moltiplicano benissimo. Aggiungendo del cloruro di sodio od altre sostanze nocive alle amebe, si ritrovano le amebe morte o moribonde coperte da ciuffi di batteri. Credo quindi collo Schaudinn, che tra batteri e amebe corre questa relazione, che chi sta meglio mangia l'altro. Certo, che le amebe non possono vivere senza batteri, mentre questi hanno altre risorse.

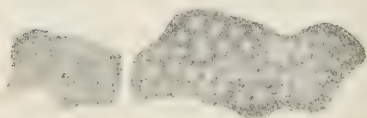
Mentre l'eosina non nuoce alla vita dei batteri essa mi servì ad osservare una interessante mostruosità. Era una cisti che pareva connata da tre cisti; ne uscì un ameba non più grande delle altre, però essa uscì molto lentamente, si direbbe penosamente. Ebbi frattanto il tempo di osservare accanto al nucleo

(1) Osservazioni ed esperienze sulla permeabilità della pelle. Margherita Traube Mengarini, Rendiconti Acc. d. Lincei, vol. V, 1° sem., 1896.

un corpicciuolo fortemente rifrangente che ricorda il « Nebenkoerper » osservato nella *Paramoeba E* dallo Schaudinn, e che non vidi mai nelle altre amebe.

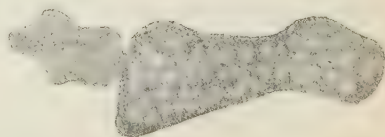
Dopo che le amebe vivevano da alcuni giorni alla temperatura del laboratorio notai, che le scissioni diminuivano sino a scomparire completamente. Osservai allo stesso tempo due nuovi fenomeni. Io vidi cioè la fusione di due amebe mentre che prima non avevo mai osservato alcun fenomeno che poteva ricordare la costituzione di un plasmodio, e vidi la coniugazione tra l'ameba ingrossata dalla fusione con un'ameba piccola.

Le amebe grandi sono formate di solito dalla fusione di due amebe. Durante la loro fusione spariscono i nuclei, o per lo meno non si vedono più senza colorazione. Le osservazioni dello Zaubitzer mi fanno credere che l'ultima ipotesi sia vera. Gli animali hanno dei movimenti molto contorti al principio della fusione durante la quale perciò l'osservazione diventa difficile. Vidi in queste condizioni talvolta dei nuclei allungati prima, che sparivano poi completamente. Vidi una volta l'espulsione di una particella appartenente al nucleo. La fusione comincia con un giuoco degli pseudopodi tra i due animali, che veramente non ricorda la descrizione del Maggi, secondo il quale questi formano una specie di involucro intorno ai due animali. Dopo alcuni minuti uno degli pseudopodi penetra nell'ectoplasma dell'altro animale fondendosi con esso. Questo è il principio della fusione che ha luogo su una larga superficie. Per venti minuti circa si vede ancora una divisione parziale tra le due amebe. Frattanto sparisce il giuoco degli pseudopodi e finalmente l'animale appare come vedesi nelle fig. 1 e 2.



a) microgamete.

FIG. 1.



a

FIG. 2.

Debbo le figure alla gentilezza del prof. Sanfelice, che le disegnò colla camera chiara.

L'ameba così costituita è grossa e vescicolosa, il suo contorno è più oscuro di prima, cioè meno rifrangente. Tutto il corpo, nel quale non si distingue più il nucleo forma una massa spugnosa composta da un protoplasma finamente granuloso, nel quale si distinguono molto nettamente altri granuli grandi, e delle vescichette, che non ricordano le solite vacuole.

Non è improbabile, che questa sia la fase vista dal Maggi e dallo Zaubitzer, giacchè essi descrivono la fusione tra due animali della stessa grandezza ed uguali tra loro. Se avessero visto la coniugazione, avrebbero di certo

anche osservato il distacco tra i due animali, il quale ha luogo dopo alcuni minuti, e del quale parlano soltanto come di un'ipotesi.

Oltre alle amebe grosse formate da due amebe, e le quali, come si vedrà dopo, sono i macrogameti, osservai un cambiamento fondamentale, che ebbe luogo nelle amebe della grandezza del primo ciclo.

Questo espellono dal loro endoplasma una parte abbastanza rilevante. Non riuscii a discernere, se il nucleo prendesse parte a questa riduzione. Vidi dei corpicciuoli molto rifrangenti spinti dall'interno dell'animale verso la periferia. Questi sono perfettamente tondi e corrispondono evidentemente alle gemme delle *Zaubitzer*. Non scoprii in essi alcuna struttura e non so nulla riguardo alla loro sorte dopo l'espulsione dall'animale.

L'endoplasma di queste amebe diventa omogeneo al punto da differenziarsi così poco dall'ectoplasma, che la differenza al principio grande rimane appena visibile. Esse appaiono allora piatte ed espanse come delle foglie e si muovono rapidamente con locomozione strisciante senza emettere i soliti pseudopodi. È questa la locomozione a modo di lumaca che lo *Zaubitzer* ha vista prima dell'incistamento. Però secondo lo *Zaubitzer* la coniugazione dovrebbe essere diggià avvenuta.

Tra il microgamete ora descritto ed il macrogamete prodotto dalla fusione di due, o forse talvolta di tre amebe, ha luogo una coniugazione. Non osservai mai durante i cinque giorni, che ebbi occasione di osservare i fenomeni ora descritti, che la coniugazione avesse avuto luogo subito dopo la formazione del macrogamete.

Questa non dura che pochi minuti. Mentre sparisce in una zona abbastanza limitata ogni divisione tra i due animali, il nucleo del microgamete diventa meno distinto senza sparire completamente. Certo bisognerà chiarire colla colorazione, la parte che il nucleo prende nella coniugazione.



FIG. 3. — Tre fasi consecutive d'un microgamete.

Un fenomeno strano è la corrente dei granuli, che durante la coniugazione va dal macrogamete al microgamete. Si direbbe, che in un dato momento tutto l'endoplasma delle due amebe si mescoli. Dopo pochi minuti i contorni dell'ameba piccola ricominciano a delinearsi nuovamente in quel piccolo tratto nel quale erano spariti durante la coniugazione. Essa comincia a staccarsi ed a rifondersi, in modo che il suo endoplasma prima del distacco finale si divide in due chiazze circondate dall'ectoplasma ancora aderente al macrogamete. Non saprei dire che cosa sia della chiazza endoplasmatica

più esterna. È un fatto, che le amebe durante i due modi di riproduzione eliminano delle particelle del loro corpo. Ricordo di aver visto la divisione di due amebe, nella quale il ponte protoplasmatico, che alla fine li riunì ancora, fu distaccato prima ad una estremità da una delle amebe, e poi all'altra estremità dall'altra. Sono probabilmente dei fenomeni di riduzione, i quali ricordano i fenomeni di riduzione che hanno luogo nell'uovo. Non mi pare indicato di parlare di una automutilazione<sup>(1)</sup>.

L'incistamento non segue subito la coniugazione. Riescii alcune volte a continuare l'osservazione delle amebe dopo la coniugazione. Non è facile, perchè dopo la coniugazione la loro locomozione diventa molto più rapida di prima. Osservai un microgamete dopo la coniugazione. Quando l'animale, non saprei dire dopo quanto tempo, si arrotondava passando alla forma di riposo descritta da Celli e Fiocca, ed io credevo che si sarebbe incistito, riemise tutto ad un tratto gli pseudopodi e si divise in due. Vidi anche alcuni macrogameti dividersi in due, ed una volta in tre amebe. È perciò che più sopra emisi il dubbio, che i macrogameti fossero costituiti talvolta anche da tre animali.

Circa 24 ore dopo l'innesto in una delle gocce pendenti, nelle quali osservai durante cinque giorni, e precisamente nei primi giorni di ottobre, i fenomeni di coniugazione descritti, non vidi più che delle cisti e poche amebe libere, che si muovevano pigramente. Le cisti contenevano otto o dieci spore. Avevano la solita grandezza delle cisti dell'am. und. nella sua fase vegetativa. Le spore stanno, come si vede nella figura 4 disposte lungo la periferia della cisti.

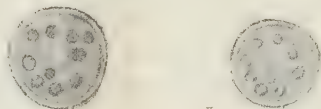


FIG. 4.

Riguardo alla sorte delle spore, debbo limitarmi a raccontare l'unica esperienza che feci in proposito. Lasciai una cisti colle spore nel campo ottico del microscopio in goccia pendente durante un'assenza dal laboratorio, la quale durò cinque giorni. Ritrovai al microscopio al posto della cisti delle spore libere, che semina in un'altra goccia pendente. La mattina appresso ritrovai delle piccole amebe. Riconosco, che il valore di quest'unica esperienza non è grande e che si potrebbero fare molte obiezioni al riguardo. Essa merita certamente di essere ripetuta.

Spero di poter riprendere ora le mie osservazioni frammentarie sulle amebe. Credo però che sin d'ora esse siano atte a completare i pochi lavori nuovi su tale argomento, ed a confermare la supposizione dei zoologi riguardo alla riproduzione sessuale delle amebe.

<sup>(1)</sup> O. Casagrandi e P. Barbagallo, *Entamoeba Hominis* S. *Amoeba Coli* (Loesch). Ann. d'Igiene sperimentale, 1897.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci DE LAPPARENT e FOUQUÉ, il vol. IV, parte I dell'opera: *The Danish Ingolf-Expedition*, ed il fascicolo XXII contenente i risultanti scientifici delle Campagne del Principe di Monaco.

## CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Accademia delle scienze di Upsala; la R. Società zoologica di Amsterdam; il Museo di scienze ed arti dell'Università di Pennsylvania; il Museo di storia naturale di Amburgo; la Società Khédiviale di geografia del Cairo; la Società geologica di Sydney; la Società zoologica di Tokyo; l'Istituto Smithsonian di Washington.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 5 aprile 1903.*

Езера Македоније Старе Србије и Епира — 10 Карата. Београд, 1902. f.°  
*Albert de Monaco.* — Sur la quatrième campagne de la « Princesse Alice II ».

Paris, 1903. 8°.

*Angelis d'Ossat (Giacchino de).* — Rocce vulcaniche. Parte II. s. l. ed a. 8°.

*Bartolommei Gioli (G.).* — L'agricoltura nell'Eritrea. Relazione. Roma, 1903. 8°.

Boletín del Cuerpo de Ingenieros de Minas del Perú. N. 1 (Ministerio de Fomento). Documentos oficiales. Lima, 1902. 8°.

*Choffat Paul.* — Le Crétacique de Conducia (Contrib. à la connaissance géologique des Colonies portugaises d'Afrique) (Comm. du service géolog. du Portugal). Lisbonne, 1903. 4°.

*Fouqué (M. F.).* — Les analyses en bloc et leur interprétation. Paris, 1902. 8°.

Горсть П. — Матеріалы къ изученію почечуйной травы (*Polygonum Persicaria*) въ химическомъ отношеніи. Казань, 1901. 8°.

*Goeldi E. A.* — III. Estudos sobre o desenvolvimento da armação dos veados galheiros do Brazil (Memorias do Museu Goeldi, III). Rio de Janeiro, 1902. 4°.

*Langley S. P.* — The greatest flying creature. Washington, 1902. 8°.

*Lapparent (A. de).* — Abrégé de géologie. Paris, 1903. 8°.

*Lovisato D.* — Appunti ad una nota del sig. dott. Tornquist sulla geologia della Sardegna. Milano, 1903. 8°.

*Masoni Udalrico.* — Sul contatore d'acqua « Tubo Venturi ». Napoli, 1903. 4°.

*Мелкихъ А. А.* — Матеріалы къ патогенезу возвратнаго тифа. Казань, 1901. 8°.

*Mortensen Th.* — (The danish Ingolf-Expedition). Vol. IV. 1 Echinoidea (Part I.) Copenhagen, 1903. 4°.

*Nierstrasz H. F.* — The Solenogastres of the Siboga-expedition. Leiden, 1902. 4°.

*Pannekoek A.* — Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. Leiden, 1902. 8°.

*Passerini N.* — Sopra la ricchezza in azoto dei semi di lupino usati come concime. Modena, 1902. 8°.

— Sopra la quantità di olio contenuto nelle olive delle più comuni varietà delle campagne fiorentine. Terza Nota. Firenze, 1902. 8°.

*Piolti G.* — I basalti dell' isola del Principe Rodolfo. Osservazioni. Milano, 1903. 4°.

*Полѣнова В. К.* — Къ вопросу о патолого-анатомическихъ измѣненіяхъ въ органахъ при остромъ и хроническомъ отравленіи кокаиномъ. Казань. 1901. 8°.

*Ribaga C.* — Diagnosi di alcune specie nuove Hydrachnidae e di un Ixodidae del sud America. Portici, 1903. 8°.

— Attività del Novius Cardinalis Muls. contro l'Icerya Purchasi Mask. in Italia. Portici, 1903. 8°.

*Toulet.* — Étude des échantillons d'eaux et de fonds récoltés pendant la campagne du Yacht « Princesse Alice » dans l'Atlantique Nord en 1901. (Résultats des Campagnes scientifiques du Prince de Monaco. Fasc. XXII. Monaco, 1902. 4°.

*Tresp A.* — Zur Casuistik des Empyems der Stirnhöhlen. Greifswald, 1901. 8°.

*Weinek L.* — Definitive Resultate aus den Prager Polhöhen-Messungen von 1889 bis, 1892 und von 1895 bis 1899. Prag, 1903. 8°.

*Dissertazioni accademiche mandate in dono dall' Università di Utrecht.*

*Carp J. A.* — Combinatorische Configuraties in Meerdimensionale Ruimten, Utrecht, 1902. 8°.

*Couvée H.* — De oorzaak van den dood na het Wegnemen der Nieren. Utrecht, 1902. 8°.

- Franke H. J. I. B.* — De uterus van *Cercocoebus cynamolgus* in verschillende levensperioden ecc. Utrecht, 8°.
- Hartog C. M.* — De klinische beteekenis van de bewegelijkheid der Bekkengewrichten voor de baring. Haarlem, 1901. 8°.
- Helwig P. J.* — Over een Algemeen Gemiddelde en de Integralen die samenhangen met de Foutenwet. Amsterdam, 1902. 4°.
- Hoefer E.* — Over het ontstaan der Elastieke Vezels. Utrecht, 1902. 8°.
- Leignes Barkhoven (L.)* — Over de afscheiding van Oxaalzuur. Deyenter, 1902. 8°.
- Middelveld Viersen W.* — Bijdrage tot de bepaling von Alcohol in Maaginhoud. Utrecht, 1902. 8°.
- Moltzer J. S. P.* — Bijdrage tot de kennis der Tubamenstruatie. Utrecht, 1902. 8°.
- Nagel (B. C. van der)* — Onderzoekingen over virulentie-opwekking bij saprophytische bacteriën. Rotterdam, 1902. 8°.
- Nugteren G. K.* — Rationale ruimtekrommen van de vijfde orde. Groningen, 1901. 8°.
- Oudenampsen Jac.* — Bijdrage tot de kennis van *Melia Azedarach* L. Utrecht, 1902. 8°.
- Rochat G. F.* — Bijdrage tot de kennis van het werkzame bestanddeel der Ricine. Utrecht, 1902. 8°.
- Schut J. (Jr.)*. — Over het afsterven van bacteriën bij koken onder lage drukking. Harderwijk, 1902. 8°.
- Terneden L. J.* — Een Dilatometer voor kleine voorwerpen bij hooge temperaturen. Rotterdam. 1901, 8°.
- Wesselink J. H.* — Over prognose en therapie der baring bij het algemeen vernauwde en het platte bekken ecc. Utrecht, 1902. 8°.

V. C.

---



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 19 aprile 1903.*

Presidenza del Socio anziano L. LUZZATTI.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Matematica. — Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Nota del Socio LUIGI BIANCHI.*

1. La nozione di *gruppo complementare* di un gruppo  $G$  rispetto ad un suo sottogruppo  $\Gamma$ , quale si presenta nell'ordinaria teoria dei gruppi di sostituzioni, può facilmente trasportarsi nel campo dei gruppi continui (finiti) di trasformazioni. Non essendo a mia notizia che l'indicata estensione sia stata effettuata da altri, mi propongo di stabilirla nella presente Nota. Ne apparirà subito, in un primo esempio, l'utilità, poichè verranno posti così sotto nuova forma, semplice ed intuitiva, gli importanti risultati conseguiti da Lie e da Schur nel problema della determinazione di tutti i gruppi transitivi ad  $r$  parametri di assegnata composizione ( $c_{iks}$ ).

Sia  $G_r$  un gruppo di Lie ad  $r$  parametri, e  $\Gamma_m$  un suo sottogruppo ad  $m < r$  parametri. Diciamo due trasformazioni  $g, g'$  di  $G$  *equivalenti* (a sinistra) rispetto a  $\Gamma$  quando si abbia

$$g' = \gamma g \quad (o \quad g = \gamma^{-1} g'),$$

la trasformazione  $\gamma$  appartenendo al sottogruppo  $\Gamma$ . Per significare l'equivalenza scriveremo anche  $g' \equiv g$ . Poichè da  $g' \equiv g$ ,  $g'' \equiv g$  segue  $g'' \equiv g'$ ,

potremo distribuire le trasformazioni di  $G$  in classi rispetto a  $\Gamma$ , attribuendo ad una medesima classe tutte e sole quelle che sono equivalenti ad una medesima, e quindi fra loro. Le classi in  $G$  formeranno una serie  $\infty^{r-m}$  ed ogni  $g$  si potrà decomporre (almeno in un conveniente intorno dell'identità) secondo la formola

$$(1) \quad g = \gamma T;$$

percorrendo  $\gamma$  le  $\infty^m$  trasformazioni di  $\Gamma$  e la moltiplicatrice  $T$  una serie  $\infty^{r-m}$  di trasformazioni di  $G$ , ciascuna delle quali rappresenta per sè una classe.

Nel modo più chiaro si riconosce la detta decomponibilità, ricorrendo alla nota decomposizione di ogni trasformazione di  $G$  nel prodotto di  $r$  trasformazioni, prese ciascuna da uno degli  $r$  gruppi ad un parametro, che vengono generati da  $r$  trasformazioni infinitesime indipendenti di  $G_r$ , siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_r f.$$

Se  $G_1^{(i)}$  indica il gruppo ad un parametro  $t_i$  generato da  $X_i f$  ed  $S_{t_i}$  una sua trasformazione generica, si ha <sup>(1)</sup>

$$g = S_{t_1} S_{t_2} \dots S_{t_r}$$

Ora, supposto p. e. che siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_m f$$

le trasformazioni infinitesime di  $\Gamma_m$ , basterà porre

$$\gamma = S_{t_1} S_{t_2} \dots S_{t_m}, \quad T = S_{t_{m+1}} \dots S_{t_r}$$

per ottenere la decomposizione (1), e saranno allora

$$t_{m+1}, \dots t_r$$

gli  $r - m$  parametri contenuti nella moltiplicatrice  $T$ , ossia i parametri delle classi. Ciò posto, si moltiplichino *tutte* le trasformazioni  $g$  di  $G$  a destra per una medesima fissa  $\bar{g}$  in  $G$ : le  $g$  si permuteranno fra loro secondo quella trasformazione del *primo gruppo parametrico*  $\Pi_r$  che corrisponde a  $\bar{g}$ . Ma, poichè da  $g' \equiv g$  segue  $g' \bar{g} \equiv g \bar{g}$ , ed inversamente dalla seconda equivalenza la prima, vediamo che tutte le trasformazioni appartenenti ad una medesima classe vengono trasportate ad un tempo in tutte quelle di un'altra classe, cioè: *Il gruppo parametrico*  $\Pi_r$  *agisce in modo imprimitivo sulle*  $\infty^{r-m}$  *classi scambiandole fra loro.*

Facendo ora variare  $\bar{g}$  entro  $G_r$ , ne verrà indotto un gruppo  $H$  di trasformazioni sulle classi; questo diciamo *il gruppo complementare* (a destra)

<sup>(1)</sup> Cfr. Lie-Engel, III, pag. 802 (Nota) e Scheffers-Lie, pag. 192.

di  $G$  rispetto a  $\Gamma$  e scriviamo, col simbolo di quoziente

$$H = \frac{G}{\Gamma}.$$

Nelle notazioni superiori, esso sarà un gruppo di trasformazioni sulle  $r - m$  variabili  $t_{m+1} \dots t_r$ .

2. Osserviamo ora alcune proprietà del gruppo complementare  $H = \frac{G}{\Gamma}$ , che discendono facilmente dal modo stesso di sua generazione.

1°. *Il gruppo complementare  $H$  è transitivo sulle  $\infty^{r-m}$  classi, cioè sui parametri che le individuano.*

Infatti la classe costituita dal sottogruppo  $\Gamma$  (rappresentata dall'identità) si muta in qualunque altra classe, prendendo convenientemente la moltiplicatrice  $\bar{g}$ .

Il gruppo  $H$  è chiaramente in relazione d'isomorfismo con  $G$ . Ma, per riconoscere se questo isomorfismo è oloedrico o meriedrico, convien vedere se all'identità in  $H$  corrisponde in  $G$  la sola identità, ovvero un sottogruppo  $\Sigma$ , che sarà invariante in  $G$ . Se  $\sigma$  è una qualunque trasformazione di  $\Sigma$ , dovremo avere per una  $g$  arbitraria

$$g\sigma \equiv g, \quad g\sigma = \gamma g,$$

ossia

$$\sigma = g^{-1}\gamma g,$$

e per ciò  $\sigma$  dovrà trovarsi ad un tempo in tutti i sottogruppi trasformati di  $\Gamma$  per mezzo delle  $g$ ; viceversa se ciò accade, avremo per qualunque  $g$

$$g\sigma \equiv g,$$

cioè la  $\sigma$  lascerà fisse tutte le classi e corrisponderà all'identità in  $H$ . Se supponiamo che il sottogruppo  $\Sigma$  abbia  $k$  parametri, sarà  $k$  il grado di meriedria nell'isomorfismo di  $H$  con  $G$ , ed  $H$  avrà  $r - k$  parametri. Dunque:

2°. *Il gruppo complementare  $H = \frac{G_r}{\Gamma_m}$  ha precisamente  $r - k$  parametri, se il massimo sottogruppo  $\Sigma$  di  $\Gamma$  invariante in  $G$  ha  $k$  parametri.*

In particolare abbiamo:

3°. *Il gruppo complementare  $H = \frac{G}{\Gamma}$  ha  $r$  parametri, ed è oloedricamente isomorfo con  $G$ , quando il sottogruppo  $\Gamma$  non è invariante in  $G$  nè contiene (l'identità esclusa) alcun sottogruppo invariante in  $G$ .*

Osserviamo ora che alle trasformazioni di  $\Gamma$  corrispondono in  $H$  tutte e sole quelle trasformazioni che lasciano invariata la prima classe (la classe 1). Nello spazio  $S_{r-m}$  ad  $r - m$  dimensioni, generato dai parametri delle classi,

al sottogruppo  $\Gamma$  corrisponde in  $H$  il *sottogruppo di stabilità* relativo al punto rappresentativo della prima classe, cioè l'insieme di tutte e sole le trasformazioni di  $H$  che lasciano fisso questo punto. Similmente ai sottogruppi di  $G$  affini a  $\Gamma$  (trasformati di  $\Gamma$  per mezzo delle  $g$ ) corrispondono in  $H$  i sottogruppi di stabilità relativi ai punti di  $S_{r-m}$ .

Dopo ciò, possiamo anche riconoscere facilmente se il gruppo  $H$  è sistatico, ovvero asistatico. Il primo caso si presenterà quando esista in  $S_{r-m}$  una varietà continua di punti aventi a comune il sottogruppo di stabilità, cioè una serie continua di trasformazioni moltiplicatrici di  $\bar{g}$ , non equivalenti, che trasformino  $\Gamma$  in sè stesso. Quelle trasformazioni di  $G$  che trasformano  $\Gamma$  in sè stesso formano in  $G$  un sottogruppo, contenente  $\Gamma$  come sottogruppo invariante. Abbiamo quindi:

4°. *Il sottogruppo complementare  $H = \frac{G}{\Gamma}$  è sistatico ovvero asistatico, secondo che il massimo sottogruppo di  $G$ , contenente  $\Gamma$  come sottogruppo invariante, è più ampio di  $\Gamma$ , ovvero coincide con  $\Gamma$ .*

3. Consideriamo ora particolarmente il caso che il sottogruppo  $\Gamma_m$  di  $G_r$  nè sia invariante in  $G$  nè contenga sottogruppi invarianti di  $G$ . Allora, come si è visto, il gruppo complementare  $H_r$  è oloedricamente isomorfo a  $G_r$ ; inoltre esso è transitivo sopra  $r - m$  variabili. Inversamente dimostriamo:

5°. *Ogni gruppo  $H_r$  transitivo sopra  $r - m$  varibili, oloedricamente isomorfo con un dato gruppo  $G_r$ , può ottenersi come gruppo complementare di  $G_r$  rispetto ad un suo sottogruppo  $\Gamma_m$ .*

Se  $H_r$  è un gruppo transitivo sulle  $r - m$  variabili

$$u_1 u_2 \dots u_{r-m},$$

consideriamo un punto generico  $P_0 \equiv (u_r^{(0)} \dots u_m^{(0)})$  dello spazio  $S_{r-m}$  delle variabili  $u$  ed il sottogruppo di stabilità per  $H_r$  relativo a  $P_0$ ; questo sottogruppo ha  $r - (r - m) = m$  parametri, e si indicherà con  $K_m$ . Vediamo subito che  $K_m$  non è invariante in  $H_r$ , nè contiene sottogruppi invarianti di  $H_r$ , poichè ogni trasformazione  $\sigma$  di un tale sottogruppo dovrebbe trovarsi ad un tempo in tutti i sottogruppi di stabilità dei punti equivalenti a  $P$ , cioè di tutti i punti dello spazio, a causa della transitività di  $H_r$ ; dunque  $\sigma = 1$ .

Ne segue che il gruppo complementare  $\frac{H_r}{K_m}$  ha  $r$  parametri come  $H_r$  ed agisce transitivamente sopra  $r - m$  variabili. Ma di più è facile vedere che per queste  $r - m$  variabili possono prendersi le  $u$  stesse, ed il gruppo complementare  $\frac{H_r}{K_m}$  coincide allora con  $H_r$ . E invero due trasformazioni di  $H_r$  sono equivalenti rispetto a  $K_m$  quando trasportano  $P_0$  nel medesimo punto  $P$ , onde per parametri delle  $\infty^{r-m}$  classi di  $H$ , rispetto a  $K$ , possiamo prendere le coordinate stesse  $u_1, u_2 \dots u_{r-m}$  di  $P$ . D'altronde, moltiplicando a

destra due trasformazioni equivalenti di  $H$  per una stessa  $h$ , che trasporti  $P \equiv (u_i)$  in  $P' \equiv (u'_i)$ , si ottengono due trasformazioni equivalenti, che trasportano  $P_0$  in  $P'$ ; il gruppo indotto sulle  $u$  è dunque il gruppo  $H_r$  stesso c. d. d.

Così abbiamo: *Ogni gruppo transitivo è il proprio gruppo complementare rispetto al sottogruppo di stabilità di un suo punto generico.*

Ne risulta ora subito la verità della proposizione sopra enunciata; poichè, se  $H_r$  è oloedricamente isomorfo con  $G_r$ , e  $\Gamma_m$  è il sottogruppo di  $G_r$  che corrisponde a  $K_m$  in  $H_r$ , per la definizione stessa di gruppo complementare si ha

$$\frac{G_r}{\Gamma_m} = \frac{H_r}{K_m}.$$

Possiamo riepilogare i risultati ottenuti nel teorema:

*Dato un gruppo  $G_r$  a  $r$  parametri sopra un numero qualunque di variabili, per costruire tutti i gruppi transitivi sopra  $r - m$  variabili, oloedricamente isomorfi con  $G_r$ , basta determinare quei sottogruppi  $\Gamma_m$  di  $G_r$  che non sono invarianti in  $G_r$  nè contengono sottogruppi invarianti di  $G_r$ . I gruppi complementari  $H_r = \frac{G_r}{\Gamma_m}$  danno i gruppi richiesti.*

Rimane in fine da decidere la questione se due tali gruppi transitivi sopra  $r - m$  variabili, ottenuti come gruppi complementari

$$H_r = \frac{G_r}{\Gamma_m}, \quad H'_r = \frac{G_r}{\Gamma'_m}$$

rispetto a due diversi sottogruppi  $\Gamma_m, \Gamma'_m$ , siano o no simili. Si osservi per ciò che, supposti  $H_r, H'_r$  simili, ne segue una corrispondenza d'isomorfismo oloedrico di  $G_r$  con sè stesso (automorfismo) tale che a  $\Gamma_m$  corrisponda  $\Gamma'_m$ . Viceversa, se  $G_r$  ammette un automorfismo che faccia corrispondere a  $\Gamma_m$  il sottogruppo  $\Gamma'_m$ , ne verrà fissata una corrispondenza fra le classi di  $G$  rispetto a  $\Gamma$  e quelle di  $G$  rispetto a  $\Gamma'$ , rappresentata analiticamente dalle formole di trasformazione

$$u'_i = \varphi_i(u_1 u_2 \dots u_{r-m}), \quad i = 1, 2 \dots r - m;$$

e questa trasformazione sulle  $u$  cangerà appunto  $H_r$  in  $H'_r$ . Dunque:

*Due gruppi complementari  $\frac{G_r}{\Gamma_m}, \frac{G_r}{\Gamma'_m}$  sono simili quando esiste un automorfismo di  $G_r$  che faccia corrispondere  $\Gamma'_m$  a  $\Gamma_m$ .*

4. Proponiamoci ora di calcolare le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo complementare

$$H = \frac{G_r}{\Gamma_m}$$

da quelle note di  $G$  e  $\Gamma$ . Con ciò verremo a dimostrare che il metodo dato

da Lie per la costruzione dei gruppi transitivi a  $r$  parametri con data composizione ( $c_{iks}$ ) non è altro appunto che il processo di costruzione dei gruppi complementari.

Ma poniamoci senz'altro dal punto di vista adottato da Lie, nel Kap. 27 T. III, e supponiamo soltanto che siano assegnate le costanti di composizione ( $c_{iks}$ ) dei gruppi a  $r$  parametri da costruirsi. Appena date queste costanti si può, come Lie e Schur dimostrano, assegnare *con sole operazioni algebriche* le  $r$  trasformazioni infinitesime

$$(2) \quad A_1 f, A_2 f, \dots A_r f$$

generatrici di un gruppo  $\Pi_r$  semplicemente transitivo sopra  $r$  variabili

$$a_1, a_2 \dots a_r$$

colla data composizione ( $c_{iks}$ ). Possiamo allora assumere  $\Pi_r$  come (primo) gruppo parametrico per tutti i gruppi  $G_r$ , sopra quante si vogliano variabili, di composizione ( $c_{iks}$ ). Insieme alle (2) possiamo ancora determinare, con operazioni algebriche, le  $r$  trasformazioni infinitesime

$$(2^*) \quad B_1 f, B_2 f, \dots B_r f$$

del gruppo  $\Pi'_r$  reciproco di  $\Pi_r$ , che si potrà assumere come *secondo* gruppo parametrico <sup>(1)</sup>. Essendo  $G_r, \Pi'_r$  oloedricamente isomorfi, i gruppi complementari dell'uno coincidono con quelli dell'altro, e la questione proposta equivale quindi alla seguente:

*Per ogni sottogruppo  $\Pi'_m$  di  $\Pi'_r$ , determinare le trasformazioni infinitesime del gruppo complementare  $H = \frac{\Pi'_r}{\Pi'_m}$ .*

Indicando con  $g_a$  una qualunque trasformazione di  $G_r$ , corrispondente ai valori  $a$  dei parametri, l'equivalenza

$$g_{a'} \equiv g_a$$

rispetto ad un sottogruppo  $\Gamma_m$ , cui corrisponda  $\Pi'_m$  in  $\Pi'_r$ , significa che nello spazio  $S_r \equiv (a_1 a_2 \dots a_r)$  si passa dal punto ( $a$ ) al punto ( $a'$ ) con una trasformazione di  $\Pi'_m$ . Dunque punti equivalenti di  $S_r$  rispetto a  $\Pi'_m$  rappresentano la medesima classe di trasformazioni di  $G$  rispetto a  $\Gamma$ ; queste classi sono perciò rappresentate dalle  $\infty^{r-m}$  varietà minime invarianti di dimensione  $m$  in  $S_r$  rispetto a  $\Pi'_m$ . Ora il moltiplicare le  $g$  a destra per una fissa equivale ad eseguire in  $S_r$  una trasformazione del primo gruppo parametrico  $\Pi_r$ ; se ne conclude che il gruppo complementare  $H$  non è altro che

<sup>(1)</sup> Conviene ricordare che i due gruppi parametrici  $\Pi_r, \Pi'_r$  di un gruppo  $G_r$  assegnano il modo come si permutano fra loro le trasformazioni di  $G_r$ , moltiplicate rispettivamente *a destra*, ovvero *a sinistra*, per una medesima trasformazione di  $G_r$  stesso.

il gruppo indotto sulle  $\infty^{r-m}$  varietà invarianti  $V_m$  di  $\Pi'_m$  dal gruppo  $\Pi_r$  che le scambia imprimitivamente fra loro.

Se supponiamo che fra le (2\*) siano

$$B_1 f, B_2 f, \dots B_m f$$

le trasformazioni di  $\Pi'_m$ , la divisione dello spazio  $S_r$  nelle  $\infty^{r-m}$  varietà  $V_m$  è data da

$$u_1 = c_1, u_2 = c_2 \dots u_{r-m} = c_{r-m},$$

le  $c$  essendo costanti arbitrarie, e le funzioni  $u$  di  $a_1 a_2 \dots a_r$  le  $r - m$  soluzioni del sistema completo

$$(3) \quad B_1 f = 0, B_2 f = 0 \dots B_{r-m} f = 0.$$

Le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo complementare

$H = \frac{G_r}{\Gamma_m} = \frac{\Pi'_r}{\Pi'_m}$  si calcoleranno adunque come le trasformazioni infinitesime indotte sulle  $u$  dalle

$$A_1 f, A_2 f \dots A_r f.$$

Questo è appunto il processo tenuto da Lie (t. I Kap. 22); esso dà per le  $r$  trasformazioni infinitesime  $U_1 f, U_2 f \dots U_r f$  del gruppo  $H$  (non necessariamente indipendenti) le formole

$$U_k f = \sum_{i=1}^{i=r-m} A_k(u_i) \frac{\partial F}{\partial u_i},$$

dove è da osservarsi che le  $A_k(u_i)$ , a causa delle identità  $(A_k, B_l) = 0$ , sono soluzioni del sistema (3), e quindi funzioni delle  $u$  stesse. Come poi si possano eseguire tutte le richieste operazioni *senza alcun calcolo di integrazione*, è stato dimostrato da Lie, utilizzando i risultati di Schur, nel Kap. 29. Bd. III (cf. in particolare pag. 798 ss.). Noi qui ci contenteremo di riassumerne i risultati nel teorema: *Date le costanti di composizione di un gruppo  $G_r$ , si possono trovare, senza calcoli d'integrazione, le trasformazioni infinitesime generatrici dei suoi gruppi complementari.*

5. Consideriamo ora il caso particolare importante in cui il sottogruppo  $\Gamma_m$  di  $G_r$ , rispetto al quale si costruisce il gruppo complementare  $H = \frac{G_r}{\Gamma_m}$ , sia invariante in  $G_r$ . Allora  $H$  ha  $r - m$  parametri, corrispondendo all'identità in  $H$  il sottogruppo  $\Gamma_m$  in  $G_r$ ; in generale a trasformazioni di  $G_r$  equivalenti rispetto a  $\Gamma_m$  (1) corrisponde la medesima trasformazione in  $H$  e

(1) Si noti anche che nel caso attuale, essendo  $\Gamma_m$  invariante in  $G_r$ , non vi è più luogo a distinguere l'equivalenza a sinistra da quella a destra, giacchè se  $g' = \gamma g$ , si può anche scrivere  $g' = g \gamma'$ , essendo  $\gamma'$  un'altra trasformazione di  $G$ .

viceversa. Supponiamo ora che, essendo

$$X_1^f, X_2^f, \dots X_r^f$$

le trasformazioni infinitesime generatrici di  $G_r$ , quelle del sottogruppo invariante  $F_m$  siano le ultime  $m$

$$X_{r-m+1}^f, \dots X_r^f.$$

Ciò porta che debbono essere nulle tutte quelle costanti di composizione

$$c_{ik1}, c_{ik2} \dots c_{ik, r-m}$$

nelle quali uno degli indici  $i$  o  $k$  supera  $r - m$ . Ora, se indichiamo con

$$U_1 F, U_2 F \dots U_r F$$

le trasformazioni infinitesime corrispondenti del gruppo complementare  $H$  (n. 4), saranno nulle identicamente

$$U_{r-m+1} F, \dots U_{r-m} F,$$

perchè a  $F_m$  corrisponde in  $H$  l'identità, mentre le prime  $r - m$

$$U_1 F, U_2 F \dots U_{r-m} F,$$

corrispondenti a  $X_1^f, X_2^f \dots X_{r-m}^f$ , saranno indipendenti. Vediamo ora come si calcolano le costanti di composizione  $\gamma_{iks}$  del gruppo complementare

$$H_{r-m} \equiv (U_1 F, U_2 F \dots U_{r-m} F).$$

Siccome ad

$$(U_i U_k) = \sum_s^{1 \dots r-m} \gamma_{iks} U_s F \quad (i, k = 1, 2 \dots r - m)$$

deve corrispondere la

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1 \dots r} c_{iks} X_s^f,$$

mentre al secondo membro corrisponde

$$\sum_s^{1 \dots r} c_{iks} U_s F = \sum_s^{1 \dots r-m} c_{iks} U_s F,$$

ne deduciamo

$$\gamma_{iks} = c_{iks} \quad (i, k, s = 1, 2 \dots r - m).$$

Dunque: Se  $\Gamma_m$  è invariante in  $G_r$ , le costanti di composizione del gruppo complementare

$$H_{r-m} = \frac{G_r}{\Gamma_m}$$

coincidono colle  $(r-m)^3$  costanti di composizione  $c_{iks}$  del gruppo primitivo  $G_r$ , per le quali gli indici non superano  $r-m$ .

Dopo ciò è facile rispondere alla domanda: Quando accadrà che il gruppo complementare  $H_{r-m} = \frac{G_r}{\Gamma_m}$  risulta Abeliano (cioè di trasformazioni due a due permutabili)? Per ciò è necessario e sufficiente che tutte le  $\gamma_{iks}$  siano nulle, cioè tali siano le  $c_{iks}$  per i valori da 1 a  $r-m$  degli indici. Dunque qualunque trasformazione alternata

$$(X_\lambda X_\mu) = \sum_s^{1 \dots r} c_{\lambda\mu s} X_s f$$

si compone unicamente colle

$$X_{r-m+1} f', \dots X_r f'.$$

cioè il gruppo derivato <sup>(1)</sup> di  $G_r$  è contenuto in  $G_m$ . Viceversa se  $\Gamma_m$  è un sottogruppo di  $G_r$  contenente il primo gruppo derivato, esso è invariante in  $G_r$  e il gruppo complementare  $H_{r-m} = \frac{G_r}{\Gamma_m}$  è Abeliano. Possiamo dunque definire il gruppo derivato nel modo seguente: Il gruppo derivato di un gruppo  $G_r$  è quel suo più piccolo sottogruppo invariante  $\Sigma$ , pel quale il gruppo complementare  $\frac{G_r}{\Sigma}$  risulta Abeliano.

6. Le considerazioni precedenti bastano già a dimostrare che pei gruppi continui il concetto di gruppo derivato coincide con quello di sottogruppo commutatore, quale fu introdotto dalle ricerche di Dedekind, Frobenius, Miller ecc. nella teoria dei gruppi ordinari.

Essendo  $S, T$  due trasformazioni qualunque di  $G$ , chiamiamo trasformazioni commutatrici o commutatori di  $G$  tutte quelle sue trasformazioni  $C$  che hanno la forma

$$C = STS^{-1}T^{-1},$$

appunto perchè avendosi

$$ST = CTS,$$

la  $C$  serve da commutatore per  $S, T$ . I commutatori di un gruppo continuo  $G$

<sup>(1)</sup> È ben noto che le alternate  $(X_\lambda X_\mu)$  sono le generatrici di un sottogruppo invariante di  $G_r$ , che si dice il suo (primo) gruppo derivato.

(non Abeliano) formeranno una serie continua e, combinandoli fra loro per moltiplicazione, genereranno un sottogruppo  $\Gamma$ , che dicesi il *sottogruppo commutatore* di  $G$ . Siccome trasformando un commutatore con una qualunque trasformazione  $g$  di  $G$  si ottiene un nuovo commutatore, poichè

$$g^{-1}(STS^{-1}T^{-1})g = (g^{-1}Sg)(g^{-1}Tg)(g^{-1}S^{-1}g)(g^{-1}T^{-1}g) = S_1T_1S_1^{-1}T_1^{-1},$$

vediamo che in ogni caso il *sottogruppo commutatore*  $\Gamma$  di  $G$  è *invariante* in  $G$ .

Di più diciamo che il gruppo complementare  $H = \frac{G}{\Gamma}$  è *Abeliano*. E infatti se  $g, g'$  sono due qualunque trasformazioni di  $G$ , si ha

$$g'g = cgg',$$

il commutatore  $c$  appartenendo a  $\Gamma$ ; dunque  $g'g, gg'$  sono equivalenti rispetto a  $\Gamma$ , e corrispondono quindi alla medesima trasformazione di  $G$ . Se adunque poniamo che siano  $h, h'$  le trasformazioni corrispondenti in  $H$  a  $g, g'$ , sarà  $h'h = hh'$ ;  $H$  è per ciò *Abeliano*.

Viceversa, se  $\Sigma$  è invariante in  $G$ , ed il gruppo complementare  $\frac{G}{\Sigma}$  è *Abeliano*, il sottogruppo commutatore  $\Gamma$  sarà contenuto in  $\Sigma$ . E infatti, essendo ancora  $g, g'$  due qualunque trasformazioni di  $G$ , si ha, per l'ipotesi fatta:

$$g'g = \sigma gg',$$

essendo  $\sigma$  una trasformazione di  $\Sigma$ . D'altra parte

$$g'g = cgg',$$

dove  $c$  si può far coincidere con qualunque commutatore. Ne segue che ogni commutatore trovasi in  $\Sigma$ , e  $\Gamma$  stesso vi è quindi contenuto. Vediamo adunque che il sottogruppo commutatore  $\Gamma$  di un gruppo  $G$  è il minimo sottogruppo invariante di  $G$  pel quale il gruppo complementare  $\frac{G}{\Gamma}$  è *Abeliano*. Ma questa è la proprietà caratteristica del gruppo derivato, onde concludiamo:

*Per un gruppo continuo  $G_r$  il sottogruppo commutatore coincide col primo gruppo derivato.*

Ne risulta in particolare dimostrata la proposizione di Killing, enunciata da Lie a pag. 770, Bd. III: *Se  $S, T$  sono due trasformazioni finite qualunque di  $G_r$ , la trasformazione  $STS^{-1}T^{-1}$  appartiene al primo gruppo derivato.*

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton*. Nota III del Corrispondente G. MORERA.

9. Dalle considerazioni svolte precedentemente (cfr. le due Note sotto lo stesso titolo apparse nei Rendiconti, pag. 113-122 e pag. 149-152 del volume in corso) segue facilmente il teorema:

*La trasformazione di variabili che le equazioni integrali di un sistema Hamiltoniano definiscono tra i valori iniziali (indeterminati) ed i valori finali delle variabili dipendenti è una trasformazione di contatto quando la variabile indipendente  $t$  si consideri come un parametro costante. Questa proprietà è caratteristica dei sistemi Hamiltoniani.*

La prima parte del teorema enunciato risulta senz'altro da note proposizioni (cfr. la 19<sup>a</sup> delle *Vorlesungen über Dynamik* di Jacobi, o meglio: Mayer-Math. Ann. B. III, p. 444): la seconda invece si ha subito osservando che se esiste una trasformazione di contatto che riduce un sistema di  $2n$  equazioni differenziali alla forma risolta:

$$[I] \quad \frac{dp_i^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} \equiv 0, \quad \frac{dq_i^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*} \equiv 0 \quad (H^* \equiv H^*(t)),$$

la trasformazione inversa, che è ancora di contatto, non toglie (§ 4) la forma canonica alle equazioni differenziali [I] e per conseguenza il primitivo sistema è necessariamente Hamiltoniano.

Inoltre, poichè con una trasformazione di contatto un sistema Hamiltoniano qualsiasi è riducibile alla forma risolta (cfr. § 4, teor. finale), concludiamo di qui la proposizione seguente:

*Non solo ogni trasformazione di contatto, dipendente da  $t$ , sulle sole  $p, q$ , trasforma un qualunque sistema Hamiltoniano in un altro, ma ogni sistema Hamiltoniano può essere convertito in un altro qualunque collo stesso numero di variabili mercè una simile trasformazione.*

Questa proposizione risponde direttamente al quesito proposto dal sig. E. O. Lovett come conclusione alla sua ricordata monografia (<sup>1</sup>).

Tutte le equazioni Hamiltoniane contenenti lo stesso numero di variabili sono trasformate le une nelle altre dalle trasformazioni di contatto dipendenti dal parametro  $t$ : queste trasformazioni costituiscono un *gruppo transitivo* nel senso della teoria dei gruppi di operazioni.

(<sup>1</sup>) The problem of determining the form of the general transformation that shall transform every canonical system into every other canonical system, in the same way that a transitive group of points transformation transforms the points of space, is yet to be solved. (Quarterly Journal of math. Vol. XXX, pag. 149).

Però, come già rilevai al § 7, vi sono anche delle trasformazioni non appartenenti al tipo considerato che trasformano un sistema Hamiltoniano in un altro. Ridotto un sistema Hamiltoniano alla forma risolta [I] mercè una trasformazione di contatto, si introduca in luogo delle variabili  $p^*, q^*$  un qualunque sistema di  $2n$  funzioni fra loro indipendenti delle medesime: comunque queste sieno ripartite in coppie di variabili coniugate è manifesto che con tale trasformazione le equazioni differenziali rimangono del tipo [I] *quantunque la trasformazione impiegata non sia di contatto*.

10. Pongo termine a queste mie ricerche sulla trasformazione dei sistemi Hamiltoniani, enunciando un altro teorema che apparentemente è più generale di quello enunciato in principio del § 9.

*Le equazioni differenziali di Hamilton hanno come caratteristica la proprietà di ammettere sistemi di integrali che definiscono trasformazioni di contatto, quando la variabile indipendente  $t$  si riguardi come un parametro costante.*

Premettiamo una osservazione. Qualunque trasformazione di contatto tra le variabili:

$$(p_i, q_i) ; (p_i^*, q_i^*) \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

ossia che rende identica l'equazione:

$$\sum_i q_i dp_i - \sum_i q_i^* dp_i^* = d\Omega \quad (dt = 0),$$

si può porre sotto la forma:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_{\alpha_1}}, \quad \chi_{\alpha_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_{\alpha_2}}, \quad \dots \quad \chi_{\alpha_\nu} = \frac{\partial \Phi}{\partial \pi_{\alpha_\nu}}; \\ -\pi_{\alpha_{\nu+1}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_{\alpha_{\nu+1}}}, \quad -\pi_{\alpha_{\nu+2}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_{\alpha_{\nu+2}}}, \quad \dots \quad -\pi_{\alpha_{2n}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi_{\alpha_{2n}}}, \end{aligned}$$

ove:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \dots, \alpha_{2n}$  indica una qualunque permutazione degli indici  $1, 2, \dots, 2n$ ;  $\Phi$  denota una funzione di  $\pi_{\alpha_1}, \dots, \pi_{\alpha_\nu}, \chi_{\alpha_{\nu+1}}, \dots, \chi_{\alpha_{2n}}$ ; e si è posto:

$$\pi_i = p_i, \quad \chi_i = q_i,$$

quando  $i$  sia uno dei numeri  $1, 2, 3, \dots, n$ ;

$$\pi_l = -p_{l-n}^*, \quad \chi_l = q_{l-n}^*,$$

quando  $l$  sia uno dei  $n+1, n+2, n+3, \dots, 2n$ .

Infatti l'equazione:

$$\sum_{k=1}^m y_k dx_k = d\Omega$$

si rende identica nel modo più generale ponendo:

$$\begin{aligned} x_1 &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, & x_2 &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, & \dots & x_k = - \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} \\ y_{k+1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_{k+1}}, & y_{k+2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_{k+2}}, & \dots & y_m = \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}, \end{aligned}$$

ove  $\Phi$  indica una funzione di  $y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m$ .

Questa proposizione segue ovviamente da un'altra dimostrata da Lie a pag. 252 del IX volume dei Math. Annalen. Essa è stata pure dimostrata direttamente dal prof. Siacci (Mem. della R. Accademia dei Lincei, serie 2<sup>a</sup>, vol. XII, pag. 436) e da me (1).

In altri termini, previa sostituzione di alcune coppie:

$$(p_i, q_i), (p_k^*, q_k^*) \text{ rispettivamente con: } (q_i, -p_i), (q_k^*, -p_k^*),$$

sostituzione che equivale ad operare una certa trasformazione di contatto, qualunque trasformazione di contatto può ridursi al tipo:

$$[II] \quad q_i = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \quad -q_i^* = \frac{\partial \Omega}{\partial p_i^*},$$

ove  $\Omega$  indica una funzione qualunque delle  $t; p_1 \dots p_n; p_1^* \dots p_n^*$ , soggetta però alla limitazione che non sia identicamente nullo il determinante funzionale:

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial \Omega}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial p_n} \right)}{\partial (p_1^* \dots p_n^*)} = \frac{\partial \left( \frac{\partial \Omega}{\partial p_1^*}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial p_n^*} \right)}{\partial (p_1 \dots p_n)}.$$

Ciò premesso, dato un sistema Hamiltoniano:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

nel quale si sieno preventivamente operate, o no, a piacere su coppie di variabili coniugate le indicate sostituzioni, una trasformazione di contatto che che lo riduce alla forma [I] si ha (secondo il teorema enunciato in fine del § 4) determinando  $\Omega$  come soluzione completa dell'equazione a derivate parziali:

$$[III] \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = U \left( t; p_1 \dots p_n; \frac{\partial \Omega}{\partial p_1} \dots \frac{\partial \Omega}{\partial p_n} \right) - H^*(t).$$

(1) Cfr. il § 2, della mia Nota: *Il teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto* del prof. Siacci, inserita nei Rend. dell'Istituto Lombardo, serie 2<sup>a</sup>, vol. XV, pag. 643.

Reciprocamente se un sistema di  $2n$  equazioni differenziali con una trasformazione [II] si riduce alla forma risolta [I], esso è necessariamente Hamiltoniano.

Adunque il celebre teorema di Hamilton sulla esistenza della *principal function*, la quale per derivazione somministra tutte le equazioni integrali nel moto (London, Philosoph. Transactions, MDCCCXXXV, pag. 99), è esclusivo alla forma canonica da lui data alle equazioni dinamiche.

Col procedimento di Hamilton perfezionato da Jacobi, ossia per derivazione [II] delle soluzioni complete dell'equazione a derivate parziali [III] <sup>(1)</sup>, si ottengono manifestamente quei sistemi di integrali che si possono dedurre l'uno dall'altro con trasformazioni di contatto non dipendenti da  $t$ .

**Meccanica.** — *Sull'equilibrio d'un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Nota II <sup>(2)</sup> di A. VITERBI, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

4. Ora si riprenda in esame la (14): in primo luogo essa permette evidentemente d'enunciare il risultato seguente:

*Dato un ellissoide planetario di rivoluzione, isotropo, di densità costante del quale siano note l'eccentricità e la costante d'attrazione si possono risolvere, mediante la (14), le seguenti questioni:*

I. *Noto il rapporto delle costanti d'isotropia determinare la velocità angolare colla quale l'ellissoide deve ruotare in modo uniforme intorno al suo asse a che esso sia, sotto le condizioni poste in equilibrio elastico.*

II. *Nota invece la velocità angolare con cui esso ruota in modo uniforme intorno al proprio asse, determinare il valore che deve avere il rapporto delle costanti d'isotropia (rapporto che è dato da  $I + 2$ ) a che esso si trovi nelle condizioni poste in equilibrio elastico.*

Di più la (14) è la relazione che, come si disse, permette d'assegnare il limite superiore, espresso in funzione dell'eccentricità e della costante dell'attrazione, che non deve mai essere raggiunto dalla velocità angolare, affinchè l'ellissoide considerato possa essere in equilibrio elastico.

Invero risolvendo la (14) rispetto a  $I$ , le sue radici sono date da:

$$(17) \quad I = \frac{A_2(26+32e^4-58e^2)+A_1(12+8e^2)}{2\{A_2(17e^2-12e^4-5)+A_1(5-12e^2)\}} \pm \sqrt{\frac{A_2(26+32e^4-58e^2)+A_1(12+8e^2)}{2\{A_2(17e^2-12e^4-5)+A_1(5-12e^2)\}}^2 + \frac{16A_2(1-e^2)^2+12A_1}{A_2(17e^2-12e^4-5)+A_1(5-12e^2)}}$$

(1) Nell'equazione a derivate parziali [III] convien porre  $H^* = 0$ , con che non si altera il sistema di equazioni integrali somministrato dalle [II].

(2) V. pag. 249.

Se non che deve essere (1):

$$I + 4 > \frac{4}{3}$$

Dalla (17) in causa di questa disuguaglianza si ricava facilmente, ponendo per semplicità:

$$\frac{A_1}{\rho} = \omega^2 - M_1 \quad \frac{A_2}{\rho} = -M_2$$

che deve essere:

$$\omega^2 < M_1 + \frac{M_2(1 - e^2)}{2}$$

Questa disuguaglianza, ricordando le (3), (3') permette d'affermare che:  
*« Affinchè un ellissoide di rivoluzione isotropo, omogeneo ruotante uniformemente possa essere sotto le condizioni poste in equilibrio elastico, deve, dette  $\eta$ ,  $\omega$ ,  $f$  rispettivamente la sua eccentricità, la sua velocità angolare e la costante dell'attrazione essere:*

$$(18) \quad \omega^2 < 2\pi f \left\{ \frac{1+l^2}{l^3} \left( \operatorname{arctg} l - \frac{1}{1+l^2} \right) + \frac{1}{l^3} \left( \operatorname{arctg} l - \frac{1}{1+l^2} \right) \right\}$$

(dove  $l^2 = \frac{\eta^2}{1-\eta^2}$ ) se l'ellissoide è schiacciato:

deve essere:

$$(18') \quad \omega^2 < 2\pi f \left\{ \frac{1-h^2}{h^3} \left( \frac{h}{1-h^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1+h}{1-h} \right) + \frac{1}{h^3} \left( \frac{1}{2} \log \frac{1+h}{1-h} - h \right) \right\}$$

(dove  $h = \eta$ ) se l'ellissoide è allungato » (nel qual caso cioè, come è ben noto, essendo l'asse polare  $2b >$  dell'asse equatoriale  $2a$ , l'eccentricità  $\eta$  è  $= \frac{b^2 - a^2}{b^2}$  anzichè essere  $= \frac{a^2 - b^2}{a^2}$  come nell'ellissoide schiacciato).

5. Della (17) verrà fatta, come si disse, un'applicazione alla determinazione del rapporto fra le costanti d'isotropia dell'ellissoide terrestre. I semiassi equatoriale e polare di detto ellissoide sono dati rispettivamente da (2):

$$a = m \, 6,378191,2 \quad b = m \, 6,356457,6.$$

Allora l'eccentricità è:

$$\eta = 0,0848$$

(1) Cesaro, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, pag. 34.

(2) Pucci, *Fondamenti di geodesia*, vol. I, pag. 4.

e risulta:

$$l = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} = 0,0825$$

Di più per la terra è <sup>(1)</sup>:

$$(19) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} = 0,0023$$

D'altro lato dalla (18), in base ai dati numerici testè indicati, mercede un semplice calcolo risulta:

$$(20) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f} < 1,0095$$

talchè;

*« L'ellissoide terrestre sodisfa pienamente alla condizione necessaria per l'equilibrio elastico »*

Ora il limite al quale  $\frac{\omega^2}{2\pi f}$  deve sempre rimanere inferiore onde sia in equilibrio l'ellissoide terrestre allo stato di massa fluida è 0,22467 <sup>(2)</sup>, quantità molto inferiore al limite assegnato dalla disuguaglianza (20). Pertanto come fu già accennato (v. Nota precedente, introduzione).

*« L'ellissoide terrestre, allo stato di solido elastico, nelle condizioni poste, potrebbe mantenersi in equilibrio elastico anche quando la sua velocità angolare (pur soddisfacendo sempre alla (20)) oltrepassasse il limite, al di là del quale le sue particelle, supposte fluide incomincerebbero a disgregnarsi ».*

Ciò posto, dalla (17) si ha che le radici della (14) sono per l'ellissoide terrestre:

$$I_1 = 54,18 \quad I_2 = -0,74$$

Ma la prima soltanto di queste radici dà per il rapporto delle costanti d'isotropia un valore possibile poichè evidentemente:

$$I_2 + 2 < \frac{4}{3}$$

Dunque nelle ipotesi poste:

*« Il rapporto fra le costanti d'isotropia dell'ellissoide terrestre può assumere l'unico valore: »*

$$(21) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = I_1 + 2 = 56,18.$$

<sup>(1)</sup> Tisserand, loc. cit., pag. 91.

<sup>(2)</sup> Tisserand, ibid.

È poi evidente che, determinato così il valore del rapporto fra le costanti d'isotropia, tenuto conto della (19) e ricordando pure che come è ben noto nel caso in discorso:

$$\omega = \frac{6,28}{24.3600},$$

un semplice computo numerico permette di determinare le componenti della forza elastica che si manifesta nell'ellissoide terrestre e che, qualora fosse noto il valore della costante d'isotropia  $\mu$  (oppure  $\lambda$ ) le (16) in un colla (21) determinerebbero pienamente le componenti dello spostamento.

**Matematica.** — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* Nota di MICHELE DE FRANCHIS, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

In questa Nota, ripigliando un risultato di una mia recente ricerca <sup>(1)</sup>, ne faccio un'applicazione alla teoria delle corrispondenze algebriche fra due curve. E, per mostrare la fecondità del risultato, ridimostro dei noti teoremi, alcuni dei quali avevano finora ricevuto dimostrazioni con metodo esclusivamente trascendente; tra questi, il noto teorema dei signori Castelnuovo <sup>(2)</sup> ed Humbert <sup>(3)</sup> sulla linearità delle involuzioni più volte infinite giacenti su una curva algebrica. Porgo vive grazie al prof. Castelnuovo per le utili semplificazioni suggeritemi.

1. Siano  $C, \Gamma$  due curve dei generi  $p, \pi$  ( $p \geq \pi > 0$ ). La superficie  $F$  i cui punti sono, senza eccezione, in corrispondenza birazionale colle coppie di punti delle curve  $C, \Gamma$ , possiede, come sappiamo <sup>(4)</sup>, due fasci di curve unisecantisi  $(c), (y)$  le cui curve sono birazionalmente identiche a  $C, \Gamma$  e le curve dei quali (come elementi delle serie  $\infty^1$  fasci) corrispondono biunivocamente ai punti delle curve  $\Gamma, C$ , rispettivamente. Incidentalmente notiamo che il possedere due fasci di curve unisecanti è condizione necessaria ed anche sufficiente, perchè una superficie sia in corrispondenza birazionale colle coppie di punti di 2 curve algebriche.

2. Se  $|L|$  è un sistema lineare qualsiasi (irriducibile o no, od anche una curva unica) sulla superficie  $F$ , e sono  $\varphi, N$  il suo genere ed il suo grado *virtuali*,  $m, \mu$  i numeri dei punti d'intersezione della curva gene-

<sup>(1)</sup> *Sulle varietà  $\infty^2$  delle coppie di punti di 2 curve o di una curva algebrica* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XVII, 1903).

<sup>(2)</sup> Atti della R. Acc. di Torino, t. XXVIII, 1893.

<sup>(3)</sup> Journal de Mathématiques (4<sup>e</sup> série), t. X, 1894.

<sup>(4)</sup> Veggasi la mia Nota citata.

rica  $L$ , rispettivamente con curve dei fasci  $(c)$ ,  $(\gamma)$ , ha luogo la relazione:

$$(1) \quad 2(\varphi - 1) - N = 2m(\pi - 1) + 2\mu(p - 1) \quad (1).$$

3. Sia ora  $L$  una curva irriducibile, su  $F$ , e priva, ivi, di punti multipli;  $\delta$ ,  $\delta'$  siano i numeri dei punti di contatto di  $L$  con curve dei fasci  $(c)$ ,  $(\gamma)$  o, per meglio dire, le somme degli ordini di tali contatti. Poichè il genere virtuale  $\varphi$  di  $L$  è, in tal caso, anche effettivo ed i fasci  $(c)$ ,  $(\gamma)$  secano su  $L$  due involuzioni dei generi  $\pi$ ,  $p$  e dei gradi  $m$ ,  $\mu$ , si ha:

$$2(\varphi - 1) = \delta + 2m(\pi - 1) = \delta' + 2\mu(p - 1).$$

Laonde il grado virtuale  $N$  di  $L$  sarà, per la relazione (1) del n. 2:

$$(2) \quad N = \delta - 2\mu(p - 1) = \delta' - 2m(\pi - 1).$$

4. Sia invece  $L$  una curva qualsiasi su  $F$ ,  $H$  una curva irriducibile priva su  $F$  di punti multipli e tale (il che si può sempre ottenere) che il sistema completo  $|L + H|$  sia irriducibile e privo, su  $F$ , di punti base multipli.

Denotando, con  $\delta_1$ ,  $\delta'_1$  le somme degli ordini dei contatti di  $H$  colle  $c$  e le  $\gamma$ , con  $\delta_2$ ,  $\delta'_2$  gli analoghi numeri relativi alla curva generica di  $|L + H|$ , con  $i$  il numero d'intersezioni di  $L$  con  $H$ , porremo:

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 - 2i, \quad \delta' = \delta'_2 - \delta'_1 - 2i.$$

Denotando con  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i generi virtuali di  $L$ ,  $H$ ,  $|H + L|$ ; con  $m$ ,  $\mu$ ;  $m_1$ ,  $\mu_1$ ;  $m_2$ ,  $\mu_2$  i numeri d'intersezioni di una  $c$  o di una  $\gamma$  rispettivamente con  $L$ ,  $H$  e la curva generica di  $|L + H|$ ; con  $N$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  i gradi virtuali di tali curve, sappiamo che:

$$m_2 = m + m_1, \quad \mu_2 = \mu + \mu_1, \\ N_2 = N + N_1 + 2i, \quad \delta_2 = \delta + \delta_1 + 2i,$$

e, poichè  $H$  e la curva generica di  $|H + L|$  sono irriducibili e prive di punti multipli, e quindi  $N_1 = \delta_1 - 2\mu_1(p - 1) = \delta'_1 - 2m_1(\pi - 1)$  ed  $N_2 = \delta_2 - 2\mu_2(p - 1) = \delta'_2 - 2m_2(\pi - 1)$ , ricavasi subito

$$N = \delta - 2\mu(p - 1) = \delta' - 2m(\pi - 1),$$

ossia la (2) è vera sempre ed i numeri  $\delta$  e  $\delta'$  hanno un significato indipendente dalla scelta di  $H$ . A tali numeri daremo nome di *numeri virtuali* dei contatti di  $L$  colle  $c$  e colle  $\gamma$ , ed essi coincidono cogli effettivi quando  $L$

(1) Vedi la mia Nota citata, n. 8. A proposito delle definizioni di genere e grado virtuale di una curva su una superficie  $F$  veggasi la Memoria di Castelnuovo ed Enriques: *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (Ann. di Mat., t. VI, 1901), ove tali definizioni trovansi date in modo succinto.

è priva di punti multipli. Per la (1) si ha poi sempre

$$2(\varphi - 1) = \delta + 2m(\pi - 1) = \delta' + 2\mu(p - 1).$$

5. Per ricavare dalla (2) alcune importanti conseguenze, richiamiamo anzitutto il seguente lemma (1):

*Sopra una superficie algebrica qualsiasi, S, il grado virtuale di una curva appartenente totalmente ad un sistema continuo  $\infty^r$  ( $r \geq 1$ ), privo di componenti fisse, di curve algebriche è positivo o nullo e può essere nullo solo nel caso che le curve del sistema si compongano di (una o più) curve d'uno stesso fascio privo di punti base (in particolare, irrazionale).*

Partiamo dal fatto evidente che ogni sistema continuo di curve algebriche sopra una superficie algebrica, è totalmente contenuto in un sistema algebrico (di cui le curve del sistema dato sono curve totali). Perciò, data una curva  $L_0$  del sistema continuo, almeno  $\infty^1$ , possiamo sempre considerare una serie algebrica  $\infty^1$  (L) di curve, contenente totalmente  $L_0$ . Nell'ente algebrico  $\infty^1$  (L) costruiamo una serie lineare  $g^1_m$ , senza elementi fissi, un cui gruppo sia la curva  $L_0$ , contata  $m$  volte; ciò, come è noto, può sempre ottenersi, prendendo  $m$  abbastanza alto. Allora le curve composte  $mL_0, L_1 + L_2 + \dots + L_m, \dots$  corrispondenti ai varî gruppi della  $g^1_m$  formano una serie  $\infty^1$  razionale la quale è, quindi, contenuta *totalmente* in un sistema lineare (2). Il grado virtuale di questo può ottenersi in due modi: 1° considerando le intersezioni (fisse e variabili) di due curve del sistema: allora, se  $i$  è il numero d'intersezioni di due curve L, risulta tale grado eguale ad  $m^2i$ ; 2° considerando il grado virtuale della curva multipla  $mL_0$ ; calcolando tale grado in funzione del grado virtuale N di  $L_0$ , trovasi subito eguale ad  $m^2N$ . Adunque  $m^2i = m^2N$ , e quindi  $i = N$ , e, poichè  $i \geq 0$  (perchè il sistema razionale non ha certo componenti fisse) e non è  $i = 0$  se non nel caso che le componenti delle L appartengano ad uno stesso fascio, privo di punti base, così in ogni altro caso  $i > 0$ . Segue che  $N \geq 0$  e che N può essere 0 solo nel caso che le componenti delle L siano curve di uno stesso fascio, privo di punti base.

6. Interpretando tale risultato sulla superficie F di cui trattiamo, si ha che:

*Sulla superficie F i cui punti rappresentano le coppie di punti di due curve algebriche C,  $\Gamma$ , dei generi  $p, \pi$  ( $p \geq \pi > 0$ ), se una curva algebrica L è contenuta totalmente in un sistema continuo di curve alge-*

(1) La dimostrazione che ne do mi fu gentilmente comunicata dal prof. Castelnuovo, avendone io trovata un'altra meno semplice.

(2) Enriques, *Una osservazione sulla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. X, 1896).

briche, privo di componenti fisse, denotando con  $\wp$  il genere virtuale di  $L$ , con  $\delta, \delta'$  i numeri virtuali dei contatti di  $L$  colle curve  $c$  e  $\gamma$  e con  $m, \mu$  i numeri dei punti d'intersezione di  $L$  con tali curve, allora è certo:

$$\begin{aligned}\wp - 1 &\geq m(\pi - 1) + \mu(p - 1); \\ \delta &\geq 2\mu(p - 1); \quad \delta' \geq 2m(\pi - 1);\end{aligned}$$

i segni d'eguaglianza potendo solo sussistere nel caso che il sistema in discorso sia un fascio privo di punti base o che le sue curve si spezzino in curve di un cotal fascio.

7. Data su  $F$  la curva  $L$  coi caratteri precedentemente definiti, facendo corrispondere un punto di  $C$  ed un punto di  $\Gamma$  rappresentati da un medesimo punto di  $L$ , questa definisce una corrispondenza algebrica  $(m, \mu)$  fra  $C$  e  $\Gamma$ : ad un punto di  $C$  vengono a corrispondere  $\mu$  punti di  $\Gamma$ , ad uno di questi  $m$  punti di  $C$ . Viceversa, data una corrispondenza algebrica  $(m, \mu)$  fra  $C$  e  $\Gamma$ , il luogo delle immagini, su  $F$ , delle coppie di punti omologhi è una curva  $L$  incontrante in  $m$  punti le  $c$  ed in  $\mu$  punti le  $\gamma$ . Se la corrispondenza  $(m, \mu)$  è irriducibile ed a punti di coincidenza di  $C$  non corrispondono punti di coincidenza di  $\Gamma$ , la  $L$  è irriducibile e priva di punti multipli, e viceversa. I caratteri  $\delta$  e  $\delta'$  di  $L$  sono allora eguali ai numeri di coincidenze della corrispondenza  $(m, \mu)$ . In questo ed in qualunque altro caso poi,  $\delta$  e  $\delta'$  rappresentano invarianti della corrispondenza  $(m, \mu)$  dipendenti dalle coincidenze della corrispondenza  $(m, \mu)$  e potremo chiamarli *numeri virtuali delle coincidenze su  $C$  e su  $\Gamma$*  (rispettivamente). Per il loro calcolo effettivo basta seguire sempre il procedimento del n. 4 <sup>(1)</sup>.

Dietro ciò, il risultato del numero precedente assume questo aspetto:

*Se fra due curve  $C, \Gamma$  dei generi  $p, \pi$  ( $p \geq \pi > 0$ ) intercede una corrispondenza algebrica  $(m, \mu)$  contenuta in un sistema continuo di corrispondenze algebriche  $(m, \mu)$ , delle quali non faccia sempre parte una corrispondenza fissa, denotandone con  $\delta, \delta'$  i numeri virtuali di coincidenze, su  $C, \Gamma$  rispettivamente, è sempre*

$$\delta \geq 2\mu(p - 1); \quad \delta' \geq 2m(\pi - 1).$$

*Le eguaglianze possono solo sussistere quando il sistema di corrispondenze sia cosiffatto che due corrispondenze qualunque del sistema non ab-*

<sup>(1)</sup> Nel caso che la  $L$  sia irriducibile e priva di punti multipli,  $\delta$  e  $\delta'$  coincidono coi numeri di coincidenze  $d$  e  $d'$  che figurano nella formola di Zeuthen, mentre, nel caso che, pur essendo  $L$  (ossia la corrispondenza) irriducibile, vi siano punti multipli di  $L$  (ossia coincidenze corrispondentisi), i numeri  $\delta$  e  $\delta'$  differiscono da  $d$  e  $d'$  per uno stesso numero intero, avendosi  $\delta - \delta' = d - d' = 2\mu(p - 1) - 2m(\pi - 1)$ . Sarebbe poi facile vedere che in tal caso  $\delta - d = \delta' - d' = 2E$ , essendo  $E$  l'abbassamento sul genere effettivo prodotto dai punti singolari di  $L$ .

biano coppie di punti corrispondenti comuni o che le corrispondenze del sistema si spezzino tutte in corrispondenze parziali formanti un sistema siffatto.

8. Dal risultato del n. 6 si può ricavare immediatamente un noto ed importante teorema di Schwarz.

Se  $C$  e  $\Gamma$  sono due curve birazionalmente identiche e di genere  $p > 0$ , fissiamo una corrispondenza birazionale fra  $C$  e  $\Gamma$ . Ad essa corrisponde sulla superficie  $F$ , i cui punti rappresentano le coppie di punti di  $C$  e  $\Gamma$ , una curva algebrica  $L$  unisecante le  $c$  e le  $\gamma$  e perciò irriducibile e di genere effettivo e virtuale eguale a  $p$ . Se esistesse un sistema continuo di trasformazioni birazionali di  $C$  in sè stessa, e quindi anche di  $C$  in  $\Gamma$ , queste ultime darebbero luogo, su  $F$ , ad un sistema continuo di curve algebriche (di genere  $p$ ), unisecanti le  $c$  e le  $\gamma$ , e di genere (virtuale ed effettivo)  $p$ . Quindi dovrebbe essere (n. 6)

$$p - 1 \geq 2(p - 1).$$

donde  $p \leq 1$ . Si ricava così il teorema summenzionato:

*Nessuna curva di genere maggiore di 1 può ammettere un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè.*

Ed inoltre, se  $p = 1$ , occorre, avendosi l'eguaglianza  $p - 1 = 2(p - 1)$ , che il sistema sia proprio un fascio (n. 6). Si ricava così la nota proposizione che *le schiere continue di trasformazioni birazionali di una curva ellittica in sè dipendono algebricamente da un parametro e sono tali che, data una coppia di punti corrispondenti (in ordine fissato), viene determinata una corrispondenza della schiera*. Si potrebbero così ricavare le proprietà di tali schiere ed il loro numero, ma preferiamo tacerne trattandosi di cose notissime.

Dando altro aspetto alla stessa questione, ritrovasi che:

*Se una superficie possiede più di due fasci di curve algebriche unisecantisi, essa è razionale ovvero rappresenta le coppie di punti di due curve ellittiche birazionalmente identiche; quindi le coordinate dei punti della superficie dipendono birazionalmente o da due parametri o dalle funzioni ellittiche (cogli stessi periodi)  $pu, p'u, pv, p'v$  di due parametri  $u, v$  <sup>(1)</sup>.*

9. Ed ora ricaveremo dallo stesso risultato (come è espresso nel n. 7) il teorema di Castelnuovo ed Humbert al quale accennammo nella prefazione.

Sia  $C$  una curva di genere  $p > 0$ ,  $\Gamma$  una curva birazionalmente identica ad essa [per la quale sia ben fissata la corrispondenza  $(1, 1)$  con  $C$ ]. Sia poi  $I_m$  un' involuzione irrazionale, di grado  $m$  e di genere  $g > 0$ , su  $C$ .

<sup>(1)</sup> U. Amaldi, *Determinazione delle superficie algebriche su cui esistono più di due fasci di curve algebriche unisecantisi* (Questi Rendiconti, 1902).

Ad ogni punto di  $\Gamma$  facendo corrispondere su  $C$  il gruppo degli  $m - 1$  punti che, coll'omologo, su  $C$ , del punto dato su  $\Gamma$ , formino un gruppo della  $I_m$ , si viene a stabilire una corrispondenza algebrica  $(m - 1, m - 1)$  fra  $C$  e  $\Gamma$ .

Se i  $\mathcal{A} = 2(p - 1) - 2m(\varphi - 1)$  punti doppi di  $I_m$  sono distinti ed appartengono a gruppi distinti della  $I_m$ , la corrispondenza  $(m - 1, m - 1)$  fra  $C$  e  $\Gamma$  non possiede punti di coincidenza corrispondentisi su  $C$  e  $\Gamma$ , donde i numeri virtuali ed effettivi di tali coincidenze sono evidentemente

$$\delta = \delta' = (m - 2) \mathcal{A}.$$

Se la  $I_m$  non soddisfa alle condizioni predette, per toglier campo a qualsiasi obbiezione, operiamo così: Pensiamo alla superficie  $F$  i cui punti rappresentano le coppie di punti di  $C, \Gamma$ , e siano ivi  $C_1, L$  le curve luogo delle immagini delle coppie di punti corrispondenti di  $C, \Gamma$  rispettivamente nelle corrispondenze  $(1, 1), (m - 1, m - 1)$  predette. Consideriamo poi, a parte, la curva  $\Sigma$  di genere  $\varphi$ , i cui punti rappresentano i gruppi della  $I_m$  e la superficie  $R$  i cui punti rappresentano le coppie di punti di  $C$  e  $\Sigma$ . La  $R$  è in corrispondenza  $(1, m)$  colla  $F$  ed alla curva  $T$  di  $R$ , il cui punto generico rappresenta un punto di  $C$  ed il punto di  $\Sigma$  corrispondente al gruppo della  $I_m$  contenente quel punto, corrisponde su  $F$  la curva spezzata in  $C_1$  ed in  $L$ . Sulla superficie  $R$  la curva  $T$  incontra in un punto ogni curva  $\sigma$  corrispondente ad un punto di  $C$  associato con tutti quelli di  $\Sigma$ . Il suo genere effettivo e virtuale è quindi  $p$ , perchè il fascio delle  $\sigma$  ha il genere  $p$ .

La  $T$  incontra poi in  $m$  punti le curve  $c'$  corrispondenti ai vari punti di  $\Sigma$  associati con tutti quelli di  $C$ , il cui fascio è di genere  $\varphi$ . Il grado virtuale  $\nu$  di  $T$  ricavasi allora dalla relazione (1) del n. 2, cioè:

$$2(p - 1) - \nu = 2(p - 1) + 2m(\varphi - 1),$$

laonde

$$\nu = -2m(\varphi - 1),$$

ossia

$$\nu = \mathcal{A} - 2(p - 1).$$

Il grado virtuale, su  $F$ , della curva corrispondente  $C_1 + L$  è poi  $N_1 = m\nu$  e quindi  $N_1 = m\mathcal{A} - 2m(p - 1)$ . Intanto, denotando con  $N$  il grado virtuale di  $L$ , osservando che le intersezioni di  $C_1$  ed  $L$  sono, evidentemente,  $\mathcal{A}$ , e che il grado virtuale di  $C_1$  è  $-2(p - 1)$  <sup>(1)</sup>, si ha:

$$N_1 = N - 2(p - 1) + 2\mathcal{A}.$$

Da questa e dalla precedente relazione ricavasi  $N = (m - 2)\mathcal{A} - 2(m - 1)(p - 1)$

(<sup>1</sup>) Ciò segue dalla relazione del n. 2. Cfr. del resto la mia Nota citata, n. 14.

e, poichè dev'essere  $N = \delta - 2(m-1)(p-1)$ , ricavasi  $\delta = (m-2)\mathcal{A}$ .  
Cioè:

*Data su una curva C, di genere p, un'involuzione irrazionale <sup>(1)</sup> di genere  $\varphi$ , la corrispondenza  $(m-1, m-1)$ , da essa definita, fra C ed una curva  $\Gamma$  equivalente a C, ha come numero virtuale  $\delta$  di coincidenze (su C o su  $\Gamma$ ) il numero  $(m-2)\mathcal{A}$ , ove  $\mathcal{A}$  è il numero di punti doppi della  $I_m$  o, più precisamente,  $\mathcal{A} = 2(p-1) - 2m(\varphi-1)$ .*

10. Stabilito questo fatto, la dimostrazione del teorema sulla inesistenza su una curva algebrica di una serie continua d'involuzioni irrazionali si fa subito.

Se il genere  $p$  di C è 0, la cosa dipende dal fatto che C non possiede involuzioni irrazionali. Se  $p=1$ , la cosa si dimostra pure, com'è noto, geometricamente ed in modo elementare <sup>(2)</sup>.

Sia dunque  $p > 1$  e sia  $\Gamma$  una curva equivalente a C. Ogni involuzione  $I_m$ , di grado  $m$  e genere  $\varphi > 0$ , appartenente ad una serie continua di tali involuzioni, determina fra C e  $\Gamma$  una corrispondenza  $(m-1, m-1)$  totalmente contenuta in un sistema continuo di cosiffatte corrispondenze. *Supposto anzitutto che le  $I_m$  non siano tutte composte con una stessa involuzione* (certo irrazionale)  $I_r$  ( $r$  divisore di  $m$ ), tale sistema continuo di corrispondenze è certo privo di componenti fisse. Denotando con  $\delta$  il numero virtuale delle coincidenze, su C o su  $\Gamma$ , di tale corrispondenza, dev'essere  $\delta = (m-2)\mathcal{A}$ , ove  $0 \leq \mathcal{A} = 2(p-1) - 2m(\varphi-1)$ . E, poichè la corrispondenza è contenuta totalmente in un sistema continuo, privo di componenti fisse, dev'essere (n. 7)  $\delta \geq 2(m-1)(p-1)$ , ossia  $(m-2)\mathcal{A} \geq 2(m-1)(p-1)$ . Essendo  $p > 1$ , dev'essere dunque  $\mathcal{A} > 2(p-1)$ , il che porta la conseguenza  $\varphi < 1$ , ossia  $\varphi = 0$ , contro l'ipotesi. Il fatto non può dunque presentarsi.

Abbiamo fatto l'ipotesi che le  $I_m$  della serie non siano composte colla stessa  $I_r$  ( $r$  divisore di  $m$ ). Togliendo tale restrizione, sia  $r$  il massimo divisore di  $m$  tale che le  $I_m$  siano composte con una stessa  $I_r$ . Nell'ente  $I_r$  ogni  $I_m$  definisce un'involuzione irrazionale, di grado  $\frac{m}{r}$ ; dunque  $I_r$  è sostegno di una serie continua d'involuzioni irrazionali, certo non composte con una involuzione fissata. Perciò siamo ricondotti al caso precedente, e neppure tale caso può quindi presentarsi. Cioè:

<sup>(1)</sup> Si vede però facilmente che la stessa cosa vale se la  $I_m$  è una serie lineare.

<sup>(2)</sup> Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche* (Atti della R. Acc. di Torino, t. XXIV, 1888). Del resto si vedrà che la dimostrazione seguente può generalizzarsi anche alle curve ellittiche [prendendo ivi corrispondenze  $(m, m)$  invece che  $(m-1, m-1)$ ], profittando del fatto che una tal curva possiede infinite trasformazioni birazionali in sè e che quindi  $\infty^1$  involuzioni  $I_m$  danno luogo ad  $\infty^2$  corrispondenze  $(m, m)$  fra C e  $\Gamma$ .

*Sopra una curva algebrica C non può esistere una serie continua d'involuzioni irrazionali.*

E da qui, com'è noto, ricavasi subito che

*Su una curva algebrica C ogni serie algebrica  $\infty^r$ , di gruppi di punti tale che  $r$  punti generici di C facciano parte di un solo gruppo è necessariamente lineare, se  $r > 1$ , oppure è l'insieme di tutti i possibili gruppi di  $r$  punti della curva C.*

**Fisica.** — *Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In due Note precedenti (Rendic. dell'Accad. dei Lincei, 1° sem. 1900 e 1901) indicai come, sia coll'areometro ad inclinazione variabile, sia con una bilancia con giogo e piatti di vetro, totalmente immersa nell'acqua, si possa determinare il peso apparente nell'acqua, e quindi la densità, di piccole quantità d'un solido, con una esattezza molto maggiore di quella che si potrebbe ottenere colle solite bilancie di precisione. In entrambe le Note lo spazio concesso alle medesime non mi permise di riferire nè i risultati delle determinazioni che avevo eseguito come prova del metodo e degli apparecchi, nè altri particolari relativi all'uso ed alla costruzione dei medesimi, che adesso riferisco nella presente Nota, insieme ad alcune modificazioni suggerite dall'esperienza.

*Bilancia molto sensibile per determinare il peso del solido nell'aria.* — Nelle prime determinazioni della densità di piccole quantità di un solido coll'areometro ad inclinazione variabile, m'era spesso avvenuto che la poca esattezza nella determinazione del peso nell'aria colla bilancia di precisione rendeva in gran parte inutile la grande esattezza nella determinazione del peso nell'acqua. Per evitare questo inconveniente proposi di dedurre la densità cercata determinando il peso del corpo in due liquidi di densità molto diversa coll'areometro ad inclinazione; però non potei applicare questo metodo per mancanza di un sufficiente volume del liquido più denso, inoltre in molti casi si raddoppierebbero così le difficoltà della determinazione.

In seguito, nello studio della bilancia totalmente immersa, osservai che questa, se è convenientemente costruita, in modo che non risenta quasi affatto le variazioni della densità dell'acqua, deve avere la stessa posizione d'equilibrio tanto nell'acqua che nell'aria, e nelle prove relative ebbi ad osservare che essa anche nell'aria si comportava come una bilancia molto più sensibile (almeno per piccoli pesi) di quella di precisione. Questa grande sensibilità deriva evidentemente da ciò: 1° che per effetto del piccolo peso del giogo è reso

minimo l'attrito che costituisce il principale ostacolo al buon funzionamento d'una bilancia, ed è inoltre aumentata la sensibilità, come risulta dalla nota formula; 2° che coll'uso di due punte d'appoggio invece del coltello mediano e d'una sola punta d'appoggio per ciascuno dei piatti, sono eliminati gl'inconvenienti che possono derivare da una imperfetta costruzione o collocazione dei coltelli.

Sebbene quindi sia possibile servirsi d'uno stesso giogo per le pesate nell'aria e nell'acqua, è tuttavia utile e comodo di usare due gioghi diversi adattati ciascuno allo scopo cui deve servire, e così si evita anche di dovere ad ogni determinazione togliere il giogo dell'acqua ed asciugarlo.

Le forme di giogo da me usate sono parecchie che però non differiscono essenzialmente dalla forma solita, solamente nelle bilancie a riflessione le due punte d'appoggio che sostituiscono il coltello mediano erano collocate fra il giogo e lo specchietto e l'estremità di quello erano ripiegate orizzontalmente ad angolo retto, in modo che entrambe le punte d'appoggio estreme fossero equidistanti da entrambe le punte mediane suddette.

Inoltre nelle prime esperienze il giogo era formato da un tubo di vetro di 3 mm. di diametro, ma in seguito per diminuire la flessibilità ed aumentarne la leggerezza esso era formato da una molla da orologio da tasca, ritemperata dopo averla collocata e stretta fra due liste piane di ferro, cosicchè essa si raddrizzasse e divenisse più rigida. Si possono così ottenere gioghi pesanti una frazione di grammo e pur tuttavia molto rigidi nel piano della molla che deve coincidere col piano d'oscillazione.

Credo anzi che simili gioghi fatti con molle più forti, p. es. molle da sveglie, possano servire utilmente anche per pesi superiori ai 100 grammi; si può impedire la flessione laterale o la torsione di queste molle, disponendone due parallelamente alla stessa altezza riunite solidamente nel mezzo e alle estremità da tre telaietti che portano i coltelli o le punte d'appoggio, oppure preferibilmente riunendo e fissando solidamente le estremità delle molle ma tenendole separate nel mezzo dal telaietto mediano.

Nelle prime determinazioni il giogo era lungo 30 cm., affinchè il braccio di leva su cui agiva il momento del piccolo peso ignoto fosse grande quanto era possibile e comodo, ed inoltre fosse possibile di ottenere collo spostamento sul giogo di un solo pesetto scorrevole e noto (cavaliere) piccole frazioni (millesimi) del momento massimo esercitato da esso cavaliere collocato sul piatto. In seguito usai gioghi lunghi 12 cm. meno flessibili e più rapidi; con un cavaliere di 5 mgr. spostato da un estremo all'altro del giogo potevo avere lo stesso effetto come aggiungendo o togliendo 1 cgr. da un piatto, collo spostamento di una divisione ( $\frac{1}{50}$  del braccio della bilancia) ottenevo l'effetto di  $\frac{1}{10}$  di milligrammo sul piatto e tenendo conto della inclinazione del giogo prodotta da questo peso e misurata per riflessione e di quella prodotta dal peso ignoto, potevo dedurre le frazioni di peso inferiori ad  $\frac{1}{10}$  di milli-

grammo. Rinunziai a far scorrere sul giogo pesi maggiori di 5 mgr. poichè nè la divisione era perfetta, nè i pesi s'adattavano bene sui tratti, ed uno spostamento invisibile di questi pesi avrebbe potuto causare un errore apprezzabile.

Come punte d'appoggio sia mediane che estreme usavo punte d'ago che aguzzavo accuratamente ad angolo non troppo acuto su una pietra a grana fina, perchè spesso queste punte terminavano con una piccola superficie piana (visibile col microscopio) sufficiente per impedire il buon funzionamento della bilancia. I piattelli erano formati molto semplicemente da una lamina sottile di alluminio ritagliata in forma di due dischi disuguali riuniti da una listarella, lunga circa 1 cm., e ripiegati ad angolo retto dalla stessa parte di questa lista; il disco maggiore serviva da piatto ed il disco minore, reso concavo inferiormente, da cappelletto riposante in bilico sulla punta d'ago all'estremità del giogo. Risultò inutile l'uso di cappelletti di agata, o di vetro, però questi ultimi si possono fare con facilità leggerissimi soffiando una bollicina di vetro all'estremità d'un tubo molto sottile e poscia scaldando una metà della bollicina ed aspirando leggermente nella medesima finchè il vetro fuso incurvandosi colla convessità verso l'interno, giunge molto vicino ma non a contatto della parete opposta.

A questi piattelli conviene fissare, p. es. con ceralacca, sotto al disco maggiore, un pezzetto d'ago magnetizzato, convenientemente orientato; esso è sufficiente perchè il piattello conservi stabilmente la voluta orientazione e non vada presto o tardi, come farebbe un piatto non magnetico, ad appoggiarsi colla listarella contro il giogo perdendo così la mobilità e rendendo incerto il loro punto d'applicazione sul giogo.

Conviene dire che questi piattelli così leggeri, saltano giù dal giogo con grande facilità; occorre perciò limitare la corsa del giogo in modo che questo per un eccesso di peso non acquisti troppa velocità, occorre soprattutto che i piattelli non tocchino il piano della bilancia; tale inconveniente sarebbe certamente diminuito da una costruzione regolare col meccanismo per sollevare e abbassare il giogo ed usando cappelletti più profondi.

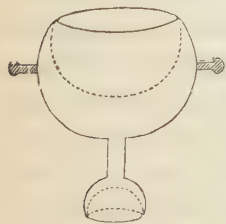
Quando si vogliono determinare solamente le densità di quantità molto piccole d'un solido, p. es. di peso inferiore al centigrammo, si può far uso di piattelli minuscoli fissati stabilmente al giogo; usai a tale scopo dischetti di alluminio di 6 a 7 mm. di diametro, leggermente concavi, fissati mediante mastice, colla concavità in alto, alle estremità di un giogo lungo 30 cm.; su questi piattelli era tracciata una linea nera perpendicolare al giogo che indicava dove doveva cadere il centro di gravità dei pesi. L'errore che poteva derivare da un inesatto apprezzamento della posizione del centro di gravità del minuscolo corpo, era inferiore a quello che poteva derivare da un inesatto apprezzamento della posizione del cavaliere lungo il giogo; mi persuasi coll'esperienza che togliendo ripetutamente il corpicciuolo dal piattello e ricol-

locandolo in modo che fosse bisecato dalla linea nera suddetta s'otteneva sempre per il peso incognito lo stesso valore. Meno soddisfacente trovai l'uso di piattelli formati da una lamina piana piegata ad angolo ottuso, collo spigolo perpendicolare al giogo, perchè molti corpi, p. es. le laminette, vi prendono posizioni evidentemente erronee dalle quali è difficile o impossibile spostarli, mentre nei piattelli leggermente concavi è facilissimo spostare il corpicciuolo spingendolo coll'estremità d'un'astina in modo che esso vada nella posizione che si ritiene più opportuna.

La teoria della bilancia lascia prevedere che la sensibilità che si può ottenere con bilancie così leggere è grandissima; così se una bilancia il cui giogo pesi 250 gr. devia di 1:200 per un eccesso di peso di 1 mgr. su uno dei piatti, una bilancia col giogo di ugual lunghezza ma pesante solo 2,5 gr. devierà ugualmente per un eccesso di peso di 0,01 mgr., oppure si potrà ottenere nei due casi la stessa sensibilità allontanando nel secondo caso il centro di gravità dal centro di sospensione, ciò che torna utile se si deducono gli eccessi di peso dalle inclinazioni del giogo.

Difatti così ottenni facilmente uno spostamento, dell'immagine della scala osservata per riflessione, che corrispondeva ad 1 cm. per millesimo di milligramma; ed inoltre la posizione d'equilibrio era notevolmente costante; come di solito esse dovevano esser accuratamente difese dalle correnti d'aria non solo mediante una vetrina non ampia, ma altresì colla costanza ed uniformità della temperatura.

*Altri particolari relativi alle determinazioni del peso del solido nell'acqua.* — Nelle ultime determinazioni mi son servito d'un giogo lungo 12 cm. simile a quello usato per le pesate nell'aria; esso aveva sui gioghi lunghi il vantaggio di assumere molto più rapidamente la posizione d'equilibrio. Le punte d'appoggio non potendo essere d'acciaio, che si sarebbe ossidato, erano di vetro, aguzzate all'estremità il più possibile (mi servii a tale scopo talvolta anche d'una pietra molare a grana finissima) e poi fuse cercando di conservare l'acutezza della punta. In un'altra Nota dimostrai che quando il raggio di curvatura dello spigolo d'un coltello da bilancia è maggiore della distanza fra il centro di curvatura ed il centro di gravità, il giogo s'inclina fortemente per effetto d'una piccola inclinazione del sostegno.



Come piattelli usai prima quelli rappresentati nella Nota precedente; solo che nella forma più semplice le astine che servivano di zavorra erano riunite formando un'ansa ed avevano fissato un frammento d'ago magnetico utile per mantenere immutata la loro orientazione. In seguito trovai che la forma rappresentata qui accanto (due bolle riunite da un'astina verticale centrata) riunisce la facilità di costruzione e la comodità nell'uso delle forme precedenti. È utile che la concavità superiore, ottenuta fondendo la bolla

alla parte superiore ed esercitando una leggera aspirazione sia così profonda, che i pesetti vi rimangano completamente immersi anche se la bolla viene a galla o si estrae dall'acqua; è utile altresì che essa bolla presenti due astine agli estremi di un diametro alle quali si possono appendere pesi in forma di cavaliere, e per le quali si può sollevare la bolla servendosi d'un uncino a due branche ricurve.

Anche questi piattelli molto facilmente saltano giù dalle punte d'appoggio, e talvolta la mobilità del giogo e quella dei due piattelli può recare qualche imbarazzo. Per evitare ciò, spesso una delle bolle era fissa al giogo, ossia questo da un lato terminava con una bolla zavorrata in modo che il suo peso apparente nell'acqua fosse nullo. Il volume del piattello mobile all'altra estremità dev'essere all'incirca uguale a quello della bolla fissa, in modo che le piccole variazioni nella densità dell'acqua non facciano variare l'inclinazione del giogo.

Nelle mie esperienze il giogo funzionava solamente come indicatore delle frazioni di centigramma; esso era regolato in modo che nell'acqua, senza piattello mobile, carico in sua vece di un peso di 5 mgr. collocato all'estremità del giogo, questo si disponeva orizzontalmente. Nello stesso recipiente o in un recipiente a parte più piccolo, caricavo il piattello di pesi finchè affondasse, ma venisse a galla togliendo 1 cgr.; portavo allora il piattello sul giogo e spostavo il peso di 5 mgr. (occorrendo fin sull'altro braccio) in modo da ottenere l'orizzontalità o una nota inclinazione del giogo; finalmente collocavo il peso ignoto sul piattello e toglievo pesi fino ad ottenere l'inclinazione precedente, e così per sostituzione ottenevo o calcolavo il valore del peso ignoto.

In tal modo è evitata la necessità di frazioni di pesi appositamente costruiti, che facilmente si perdono, o si scambiano, e sono quasi invisibili se molto minute; bastano i soliti pesi, coll'aggiunta di uno o più cavalieri di 5 mgr. di filo di platino.

*Avvertenze per la determinazione del peso nell'acqua d'un solido polverulento.* — Sebbene entrambe le suddette bilancie per le pesate nell'acqua e nell'aria possano dare esattamente sino al millesimo di milligramma o meno, il valore del peso che agisce su un piattello e diano per questo valore dei risultati concordantissimi anche se ottenuti con diversi apparecchi, tuttavia le cure necessarie per evitare le cause d'errore avventizie non possono essere lievi. Nelle determinazioni della densità d'un solido la difficoltà è aumentata dalla possibile variazione di peso della sostanza o dei recipienti che la contengono durante le manipolazioni occorrenti per le due pesate, e tale difficoltà che si riscontra anche nelle determinazioni solite, è maggiore se il corpo è polverulento, e ancora maggiore se la sua quantità inoltre è minima. Così p. es. se, avendo equilibrato sul piatto della bilancia nell'acqua un tubetto, lo toglievo, asciugavo, o se vi facevo bollire dell'acqua (operazioni

che occorrono nella determinazione della densità delle polveri) e poi lasciato raffreddare lo riportavo sulla bilancia osservavo una variazione di peso non trascurabile; questa però diventava quasi nulla se ripeteva queste operazioni parecchie volte.

Evitai completamente queste cause d'errore invertendo l'ordine solito delle operazioni necessarie per determinare la densità d'una polvere ed operando nel modo seguente:

Determinavo anzitutto il peso della polvere nell'aria, sebbene di questo peso iniziale non intendessi servirmi, poscia versata la polvere in un tubetto pieno d'acqua eseguivo su di esso tutte le operazioni necessarie a far bagnare ed affondar la polvere e a scacciar l'aria, cioè scosse ed ebollizione, o per mezzo del calore, o per mezzo della macchina pneumatica. Quindi dopo lasciato raffreddare introducevo il tubetto nell'acqua ove trovavasi la bilancia, in modo che esso si riempisse d'acqua e versavo la polvere, operando sempre sott'acqua, in una coppetta o tubetto collocato sul piatto della bilancia; questa operazione non presenta nessuna difficoltà, l'acqua distrugge quasi affatto l'adesione della polvere alle pareti ed anche i grani più minuscoli, occorrendo coll'aiuto di qualche scossa, obbediscono alla gravità tanto che potevo servirmi d'un imbuto, anch'esso sott'acqua, per evitare che essi cadessero fuori della coppetta o tubetto destinati a riceverli; i pesi che dovevo togliere dal giogo o dal piatto per ristabilire le condizioni primitive d'equilibrio mi davano il peso della polvere nell'acqua. Versavo quindi la polvere in una capsuletta immersa nell'acqua della bilancia e determinavo i pesi numerati occorrenti a ristabilire l'equilibrio, quindi versavo nuovamente la polvere sulla coppetta sul piatto della bilancia e toglievo i pesi per ristabilire l'equilibrio, ed ottenevo così di seguito una serie di valori di solito concordantissimi che davano per sostituzione un valore sicuro del peso apparente della polvere nell'acqua.

Finalmente, tolto il tubetto colla polvere dall'acqua lo portavo in una capsuletta piena d'acqua distillata, ve lo immergevo completamente e lo rovesciavo in modo da far cadere interamente la polvere al fondo della capsula, cambiavo una o due volte l'acqua distillata, decantavo l'acqua in eccesso, ne assorbivo ancora alcune gocce con carta bibula, lasciavo asciugare l'acqua e pesavo la polvere senza averne perduto la minima parte. Volendo ripetere le operazioni, converrà sempre paragonare il peso della polvere nell'acqua con quello della stessa polvere nell'aria determinato successivamente.

I pesi numerati di platino subiscono una spinta che calcolai supponendo che la densità del platino fosse 21 e che dedussi dal valore stampato sui pesi; le piccole differenze possibili nella densità suddetta sono certamente senza influenza nel maggior numero dei casi, tuttavia si potrebbe ottenere tale densità con tutta l'esattezza di cui è suscettibile la bilancia determinando nel modo solito la densità d'una gocciolina di mercurio che si può

avere facilmente puro e di densità ben nota, ed allora rimane come sola incognita la densità dei pesi di platino.

*Alcune determinazioni coll'areometro ad inclinazione variabile e colla bilancia totalmente immersa.* — Credo utile riferire alcune delle prime determinazioni eseguite coll'areometro ad inclinazione variabile, ed a riflessione. Essendo l'areometro scarico, la divisione dell'immagine della scala coincidente col reticolo del cannocchiale era inizialmente 72 mm., ed 80 mm. alla fine della determinazione per effetto del lento crescer della temperatura. Nella seguente tabella, nelle colonne Pt ed Al sono indicate le posizioni dell'immagine della scala quando l'areometro era carico successivamente ed alternativamente di un filo sottilissime di platino pesante 1,8 mgr. nell'aria e di un filo di alluminio pesante nell'aria 2,55 mgr. Nella colonna  $\delta$  si trova la differenza fra le posizioni della scala corrispondenti ai due fili:

|          |       |       |       |       |       |      |       |      |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|
| Al       | 355,0 | —     | 356,2 | —     | 357,2 | —    | 359,3 | —    | 360,7 |
| Pt       | —     | 361,0 | —     | 361,7 | —     | 363  | —     | 365  | —     |
| $\delta$ | —     | 5,40  | 5,15  | 5,00  | 5,15  | 4,75 | 4,75  | 5,00 | —     |

Quindi il peso di 1,8 mgr. (nell'acqua 1,71) produceva uno spostamento medio della scala di 287 divisioni, il filo d'alluminio produceva uno spostamento di  $287 - 5$  divisioni, ed il suo peso nell'acqua risulta  $\frac{282}{287}$  1,71 mgr.

Nonostante la variazione progressiva della temperatura, la massima differenza del valore medio di  $\delta$  è di 0,37 divisioni corrispondenti a poco più di 0,002 mgr. Il valore della densità (2,93) tuttavia risulta poco esatto per effetto dell'inesattezza dei pesi nell'aria del filo di platino e di quello di alluminio.

*Determinazione della densità d'un filo d'alluminio pesante nell'aria gr. 0,3562.* — Anche in questo caso la determinazione colla solita bilancia sarebbe riuscita poco esatta per effetto dell'azione perturbatrice prodotta dal filo di sospensione. Operai perciò con un areometro, non a riflessione, osservando con un cannocchiale gli spostamenti dell'estremità del giong sopra una scala millimetrica; un peso apparente uguale ad 1 mgr. produceva nel giong uno spostamento di 10,5 divisioni. Ecco i risultati di due determinazioni eseguite a parecchie ore d'intervallo:

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Pt | 36,7 | —    | 35,7 | —    | 35,0 | —    | 34,7 | —    | 33,6 | —    | —    |
| Al | —    | 30,7 | —    | 30,7 | —    | 29,9 | —    | 29,0 | —    | —    | —    |
| Pt | 29,3 | —    | 29,3 | —    | 29,0 | —    | 29,0 | —    | 28,8 | —    | 28,5 |
| Al | —    | 24,0 | —    | 24,0 | —    | 24,0 | —    | 24,0 | —    | 23,2 | —    |

La differenza media risultò di 5,1 divisioni corrispondenti a 0,49 mgr., quindi il peso del filo di alluminio risultò uguale a quello di platino (0,2357 gr. nell'aria. 0,2239 mgr. nell'acqua) aumentato di 0,49 mgr., cioè 0,22439 mgr. La densità cercata risulta 2,703.

*Densità di due minerali polverulenti A, B non ancora analizzati.* — Queste determinazioni furono eseguite con una bilancia totalmente immersa, a bracci disuguali, uno dei quali sopportante il piattello (della forma più complicata descritta nella Nota precedente) era lungo 35 cm. e diviso in 100 parti, mentre l'altro cortissimo terminava con una grossa bolla zavorrata; usai come pesi vari cavalieri di filo di platino, il peso dei minerali nell'aria fu determinato colla bilancia di precisione.

Il peso del minerale A nell'aria era inizialmente 34,3 mgr., dopo eseguita la determinazione 34,2 cioè in media 34,25. Il suo peso nell'acqua risultò 25,85 e 25,83 cioè in media 25,84 mgr. Densità = 4,073.

In un'altra determinazione il peso nell'aria iniziale e finale fu di 34,2 e 34,1 mgr. in media 34,15 mgr., e quello nell'acqua risultò di 25,72 e 25,64 mgr. in media 25,68. Densità = 4,070.

Quindi seguí il processo descritto nella presente Nota cioè alternativamente versai e tolsi la polvere dal piatto della bilancia senza toglierla dall'acqua, e dopo lavata la polvere con acqua distillata e lasciatala asciugare, determinai il suo peso nell'aria. Questo inizialmente era di 34,1 mgr., ma durante le operazioni persi alcuni cristallini ed il peso finale di cui solo dovevo tener conto fu di 32,4 mgr. Per il peso nell'acqua ottenni i seguenti valori: 24,4 mgr. più 5, 5, 7, 4, 7, 3, 6, 6 centesimi di milligrammo ossia in media 24,453 mgr. Densità = 4,076. Sebbene questo valore abbia maggiori guarentigie di esattezza, la differenza dalla media dei 3 valori (4,073) non apparirà grande se si considera che la differenza fra i pesi nell'aria e nell'acqua, ossia il denominatore della frazione che dà la densità, era di circa 8 mgr. e che l'errore suddetto di 3 su 4000 corrisponde a un errore di 0,006 mgr., mentre l'errore della pesata nell'aria era certamente assai più grande.

Col minerale B pesante nell'aria 124,4 mgr. e nell'acqua 68,04 mgr., l'accordo delle varie determinazioni fu completo entro i limiti della sensibilità della bilancia.

**Chimica.** — *Sopra i nitropirroli.* Nota di ANGELO ANGELI e FRANCESCO ANGELICO presentata dal Socio CIAMICIAN.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Patologia vegetale.** — *Sulla Botrytis citricola* n. sp. parassita degli agrumi. Nota del dott. UGO BRIZI, presentata dal Socio PIROTTA.

Da qualche anno alla R. Stazione di Patologia vegetale, a più riprese e da varie regioni (Ascoli, Fermo, Salerno, Firenze, Todi), pervennero molti campioni di limoni ed aranci colpiti da una malattia non molto frequente, ma che, a quanto affermano concordemente i nostri corrispondenti, produsse qua e là danni assai considerevoli.

Il carattere più saliente della malattia è la presenza di macchie rugginose infossate sparse sui frutti le quali, da principio piccolissime, si estendono, confluiscono e possono invadere l'intera superficie, cagionando la caduta dei frutti se ancora attaccati all'albero, o lo sfacelo di essi, se distaccati perchè maturi o perchè portati nei magazzini a completare la maturazione.

Per vario tempo la malattia è passata inosservata perchè di non facile studio in causa della variabilità delle sue manifestazioni, poichè i campioni che ci pervenivano, alcune volte erano già decomposti ed invasi da numerose muffe, altre non presentavano alcuno sviluppo di microrganismi ma erano ugualmente in via di putrefazione, altre volte invece, anzichè decomposti, i frutti malati che ci pervenivano erano piccoli, duri, raggrinziti, veramente mummificati e senza alcuna apparenza esteriore di muffe o di altri microrganismi.

L'osservazione attenta di questi casi di malattia così diversi, mi fece sorgere il dubbio che si trattasse sempre della stessa malattia con manifestazioni variabili, che fosse di natura parassitaria e causata da un parassita unico il quale aprisse poi la via ad altri microrganismi distruggitori.

Se si esamina un frutto così colpito al microscopio, facendo una sezione trasversa del pericarpio in corrispondenza di una delle macchie rugginose, si osserva, mediante i soliti metodi e reattivi, particolarmente col bleu Poirier all'acido lattico, che tutte le cellule sono invase da un sottile micelio ramificato septato e perciò pluricellulare, a diametro variabile, privo di veri austori, che perfora le pareti delle cellule attraversandone la cavità per cui a prima vista, si riconosce l'analogia di siffatto micelio con quello delle comuni *Botrytis*.

Il micelio invade principalmente i tessuti circostanti alle glandule oleifere di cui è ricco il pericarpio dei limoni ed aranci e talvolta occupa come una fitta rete la maggior parte delle cellule secretrici, nella cavità delle quali produce delle curiose sfrangiature, non ancora descritte per nessuna specie

del genere *Botrytis*, e molto simili alle forme coralloidi del micelio di qualche ficomicete.

Costantemente, in corrispondenza di tutte le macchie rugginose, si riscontra il micelio ora descritto e, naturalmente, quando l'intera superficie del frutto è totalmente rugginosa, il micelio si rinviene in tutto il pericarpio; spesso oltre che nel pericarpio si rinviene anche nelle grosse cellule del mesocarpio.

La presenza del micelio nei frutti di agrumi determina la produzione di un profumo assai gradevole che, nell'inizio della malattia è, si può dire, caratteristico, perchè non ho mai riscontrato tal fenomeno in altre infezioni crittogamiche degli agrumi, se non in qualche raro caso di frutti molto decomposti, con rigoglioso sviluppo di *Penicillium glaucum*, il quale era forse in tal caso associato al fungillo in questione.

Tenendo nelle solite condizioni, in termostato a temperatura costante di 18°-20° dei frutti così maculati, dopo un periodo variabile da 20 a 36 ore, in corrispondenza delle macchie rugginose e quindi delle aree infette dal micelio, si sviluppano dei ciuffetti candidissimi costituiti da ife fertili provenienti, come dimostra l'esame microscopico, dal micelio che invade il pericarpio.

Le ife sono ramificate ad alberetto a rami nettamente tricotomi, che portano alla estremità dei piccoli conidi disposti a grappolo, bianchissimi, sferici od appena ovulari, di dimensioni relativamente assai piccole.

Il fungillo sistematicamente appartiene al genere *Botrytis* e differisce sensibilmente da tutte le specie del genere fin qui descritte, ed anche dall'affine *B. griseola*, che è la sola finora rinvenuta come probabile parassita, sugli agrumi. La diagnosi della nuova specie è la seguente:

B. CITRICOLA n. sp. *Coespitulis pulvinatis densis, albis, nitentibus, conidio-phoris erectis, ramosis, ramis trichotomicè divisis, conidiis 8-10 dense aggregatis, obscure globosis, parvis* ( $\mu$ . 6-8).

*In fructibus Hesperidearum, quos necat.*

Quando i frutti di limoni o di arancio siano invasi dal micelio del fungillo, non avviene generalmente in natura una rapida formazione di conidi, giacchè è necessaria, perchè si formino quest'ultimi, una temperatura abbastanza elevata e soprattutto un ambiente molto umido, giacchè, se avviene il contrario e se trovansi invece in un ambiente asciutto, il micelio del fungillo invade tutto il mesocarpio arrivando sino ai semi, ma senza formazione di conidiofori.

Ne consegue un inaridimento del frutto che perde a poco a poco il succo senza putrefarsi, il pericarpio si prosciuga lentamente sotto l'influenza del fungo, l'epicarpio diventa bruno-scuro, cuoioso, duro, resistente e l'intero

frutto diminuisce della metà o di due terzi del volume primitivo, si mummifica completamente pur conservando il caratteristico e gradevole odore.

Così mummificati i frutti di limone ed arancio, solidi, quasi cornei, difficilissimi a tagliarsi, diventano assolutamente imputrescibili in modo quasi analogo a quanto accade nei frutti di molte pomacee e particolarmente del cotogno, sotto l'influenza del micelio della *Monilia fructigena*. Ma, mentre nel caso della *Monilia* è assai facile, in condizioni opportune, far produrre i conidi sui frutti mummificati, non è altrettanto facile nei limoni nei quali il micelio, pur essendo presente, facilmente riconoscibile nei tessuti ed in apparenza vivo, non produce affatto i rami conidiofori nelle condizioni solite.

Per questa ragione era molto difficile identificare la natura di questa strana mummificazione. Per ottenere la produzione di conidiofori mi servii di un mezzo molto semplice, allo scopo, direi quasi, di richiamare in vita il micelio del fungillo.

Lasciai i frutti mummificati e divenuti addirittura cornei e sui quali avevo constatata la presenza del micelio, per un certo tempo immersi in liquido sterilizzato, composto di acqua distillata con circa il 3 % di saccarosio, il 5 % di succo di limone tratto da frutti sani ed il 0,5 % di acido citrico, avendo cura di mantenere il liquido, in termostato, a circa 30°. Dopo 48 ore tolsi dal liquido i frutti leggermente rigonfiati per imbibizione, li lavai a lungo in acqua distillata e, dopo averli prosciugati con cura, li posi in camera umida in termostato, a temperatura costante di 25°.

Dopo 48 ore circa si iniziò lo sviluppo dei rami conidiofori e dei conidi, che divenne poi rigoglioso nello stesso modo come ho detto avvenire per i frutti non mummificati. In questa maniera potei convincermi della identità della origine parassitaria della malattia nelle sue due forme, dirò così, umida e secca.

La *Botrytis* da me studiata si può ottenere facilmente in colture artificiali seminando i conidi in diversi substrati nutritivi acidi. In un liquido costituito da succo di limone diluito in acqua distillata, coll'aggiunta del 10 % di uno zucchero fermentescibile, il micelio prende un rapidissimo ed enorme sviluppo, in modo da formare un denso velo alla superficie del liquido nel quale, fatto che mi sembra importante notare, induce una speciale fermentazione e comunicandogli un profumo alquanto simile a quello dei frutti, con formazione di una piccola quantità di alcool riconoscibile, col metodo di Lieben, per la formazione di piccolissimi cristalli di jodoformio.

L'esame microscopico del liquido, avendo dimostrato l'assenza di speciali fermenti figurati, e che d'altra parte non avrebbero avuto campo di svilupparsi per la rapida e soverchiante formazione del micelio, rendono assai probabile che a quest'ultimo soltanto sia dovuto lo sdoppiamento dello zucchero e la conseguente formazione dell'alcool.

Nelle colture in mezzo solido, ossia in gelatina acida fatta con succo di arancio gelatinizzato al 20 %, si ha pure una rigogliosa vegetazione di micelio, dal quale si sviluppano degli sporidi lunghi, filamentososi che costituiscono come un ciuffo lasso intorno all'estremità di alcuni fili micelici.

Questi conidi germinano pure rapidamente dando origine a fili di micelio, dai quali nascono nuovi sporidi ed anche direttamente ifi conidiofori come quelli descritti più sopra. Si avrebbe così in questa *Botrytis* anche una forma conidiofora intermedia, come del resto è noto accade, benchè raramente, anche in altri funghi (*Pseudopeziza tracheiphila* M. Th.).

Nessun'altra forma fungina mi riuscì di ottenere che potesse completare il ciclo di sviluppo del fungo, nè sclerozi, nè forme ascofore, nè dai frutti ammalati, nè dalle colture pure.

Sui limoni fortemente infetti si trovano talvolta delle masse sclerotiformi, ma che non diventano mai veri sclerozi, perchè mancano di una corteccia protettiva. Neppure cogli ordinari mezzi soliti ad usarsi per provocare la formazione di corpi riproduttivi nei funghi riuscii ad ottenere altre forme.

È perciò probabile che la sola forma di ibernazione del fungillo sia appunto quella del micelio nei frutti mummificati, i quali, probabilmente, cadendo a terra vi passano l'inverno, ed, inumiditi poi dalle piogge estive associate all'alta temperatura, possano dare origine ai conidiofori ed ai conidi che propagano l'infezione.

Come possa avvenire l'infezione in natura non è facile arguire, ma le esperienze che ora accennerò, avendo dimostrato che non avviene infezione nei frutti maturi senza una soluzione di continuità nell'epicarpio, e d'altra parte il fatto che negli agrumeti del salernitano la malattia s'iniziò sugli ovari dei fiori e sui frutticini appena allegati, sui quali rinvenni il micelio e riuscii, col concorso dell'umidità e dell'alta temperatura, ad ottenere la formazione dei conidiofori, può far supporre, con grande probabilità di essere nel vero, che l'infezione avvenga o s'inizii direttamente nel fiore.

Da quanto ho detto intorno al comportamento del fungillo non può sorgere dubbio sulla sua natura parassitaria. È ben vero che v'è chi dubita della natura parassitaria di tutte le *Botrytis*. Non è qui il caso di discutere se tal fungillo, analogo a molti altri, non debba chiamarsi parassita vero, pel fatto che non diventa probabilmente tale se non in certe determinate condizioni, oppure semiparassita perchè in altre può anche essere innocuo.

La questione sarà certo importante, ma il fatto comune a tutti i cosiddetti semiparassiti è questo: che occorrono sempre due circostanze, speciali disposizioni predisponenti e presenza del parassita. Le une e l'altra sono necessarie perchè nè risulti la malattia, per cui, come in questo caso del fungillo degli agrumi, è probabile che senza speciali condizioni non si avrebbe avuta la malattia, ma non è forse meno vero che senza il fungillo i frutti non sa-

rebbero caduti decomposti o mummificati; perciò, al caso pratico, poco importa che il fungillo stesso, che certo è indispensabile per produrre la malattia, si chiami parassita vero e semiparassita o parassita facoltativo.

Per confermare poi la natura parassitaria dell'infezione ho cercato di riprodurla artificialmente su frutti di limoni sani, ed ho ottenuto risultati positivi con relativa facilità anche su frutti di aranci e di mandarini immaturi.

Alcune esperienze, però, d'infezione tentate su limoni ed aranci, pennellando semplicemente la superficie esterna dei frutti con il liquido di coltura della *Botrytis* contenente conidi, tenendo i frutti stessi in camera umida a 24°, ebbero esito completamente negativo.

L'infezione invece tentata innestando nel pericarpio dei limoni sani un cilindretto di pericarpio di limone malato, diede esito sempre positivo, giacchè i numerosi frutti infettati in tal modo presentarono la caratteristica infezione rugginosa intorno al punto infettato.

L'esame microscopico confermò la presenza del micelio sui frutti sui quali, in condizioni opportune, si svilupparono i conidiofori abbondantissimi.

Ottenni anche artificialmente la mummificazione dei frutti, infettando alcuni limoni non perfettamente maturi, iniettando una goccia estremamente piccola di liquido contenente conidi di *Botrytis* sotto l'epicarpio mediante una semplice scalfittura, o meglio puntura, sulle glandule oleifere che, come è noto, formano delle piccole sporgenze bitorzolute sull'epicarpio. I frutti in tal modo infettati, rapidamente presentavano i caratteri della malattia, se tenuti in temperatura costante in camera umida, per circa 30 ore.

Se questi frutti così infettati venivano tolti dal termostato, portati alla temperatura ordinaria e lasciati all'aria ed alla luce preservandoli, per quanto era possibile, dall'umidità, non avveniva affatto formazione di conidiofori nè il conseguente sfacelo del frutto, ma si prosciugavano invece lentamente acquistando un intenso profumo e si venivano mummificando man mano.

Una perfetta mummificazione ottenni perfino con un frutto di mandarino ancora immaturo. È interessante il fatto che la mummificazione non avviene se non quando l'infezione si produce sui frutti ancora immaturi, giacchè le esperienze eseguite su frutti a perfetta maturanza non diedero mai frutti mummificati anche pel fatto che venivano facilmente attaccati da altre muffe, le quali forse venivano tenute lontane, in causa dell'ambiente eccessivamente acido, nei frutti ancora immaturi.

Non posso tralasciare di notare la grande analogia che la proprietà mummificante della *B. citricola* presenta colla *B.* dell'uva la quale, è noto, può indurre nell'uva due sorta di putrefazioni, una nobile e l'altra, per così dire, ignobile. Infatti, anche nei frutti di agrumi invasi dalla *B. citricola* come mi risulta, oltrechè dall'esperienze, anche da dati di fatto, avviene che, se la stagione corre calda ed umida, si formano rapidamente i conidiofori, i

frutti cadono a terra o vanno in rapido sfacelo coll'aiuto di altri saprofiti e specialmente del *Penicillium glaucum*. Se invece la stagione corre asciutta, come avviene nell'*Edelfaule* dell'uva, i conidiofori non si formano; il micelio resta nell'interno del frutto, concentra e modifica i succhi e finisce col mummificarlo.

Aggiungerò che, prestandosi facilmente il materiale di studio, volli tentare di ottenere di poter riprodurre la malattia o per lo meno alcuni caratteri di essa, senza la presenza del parassita, soltanto mediante le sostanze chimiche che esso elabora. Se si potesse dimostrare un tal modo sperimentalmente vera l'ipotesi che qualcuno pensa e che è davvero molto seducente, che si debbano i disturbi funzionali delle piante, e soprattutto le neoformazioni, di origine parassitaria esclusivamente a speciali sostanze chimiche secrete del parassita, si aprirebbe davvero un nuovo orizzonte alle ricerche di Patologia vegetale.

Io volli tentare qualche cosa di più modesto, di ottenere cioè non già di riprodurre caratteri della malattia senza parassita, ma di vedere se fosse stato possibile sperimentalmente, ottenere soltanto il profumo caratteristico che il parassita induce nei frutti ammalati.

Triturai e schiacciai alcuni limoni attaccati dal parassita e fortemente profumati; filtrai il liquido, prima per un filtro ordinario e poi allo Chamberland, raccogliendolo accuratamente in una fialetta sterilizzata. In tal modo si aveva nel liquido il secreto o l'enzima del fungo senza il fungo, e tal liquido iniettai con una siringa di Pravaz sotto l'epicarpio di alcuni limoni ed aranci previamente, ed accuratamente, lavati con acqua distillata e bollita. Ma l'esito fu sempre negativo, perchè per quanto tenessi i frutti in camera umida accuratamente sterilizzata, non solo non si manifestò alcun carattere di malattia, come era prevedibile, ma non ottenni neppure in minima quantità il caratteristico profumo dei frutti ammalati.

L'esito negativo di una sola ed incompleta esperienza, però, non è certo sufficiente per autorizzarmi a creder di aver dimostrata erronea la geniale ipotesi.

Riguardo ai rimedi mi è finora mancata l'opportunità di eseguire rigorose esperienze che mi riservo di eseguire e di esporre nella pubblicazione, che a suo tempo seguirà accompagnata da disegni, della completa storia naturale di questa interessante malattia.

Si può però fin da ora dire che, se realmente la infezione avviene o sui fiori, o sui frutticini appena allegati, sarà difficile dominarla. Sui frutti in via di maturazione l'esperienza dimostra che occorre, perchè l'infezione avvenga, una soluzione di continuità, prodotta probabilmente o da urti meccanici del vento, o da insetti, o grandine ecc., per cui non so se sia il caso di consigliare senz'altro l'applicazione di sostanze anticrittogamiche, d'effetto, come l'espe-

rienza dimostra, in simili casi, non sempre sicuro. Sarà certo utile, se come è probabile l'ibernazione avviene per mezzo dei frutti mummificati, praticare come si fa nei pomari per attenuare i danni della *Monilia*, la raccolta e distruzione dei frutti mummificati. Per evitare poi che nei frutti raccolti nei magazzini si propaghi la malattia, sarà opportuna un'accurata selezione, eliminando tutti quei frutti che presentano macchie rugginose infossate sull'epicarpio, e procurare che i magazzini siano freschi, ben aereati e soprattutto ben asciutti.

V. C.

---





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 3 maggio 1903.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Nota I del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

In una Nota intitolata: *Su di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali totali di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali*, da me presentata nella seduta del 3 luglio 1902 al R. Istituto Lombardo <sup>(1)</sup>, io ho dimostrato per una forma differenziale di ordine qualunque e di un'altra alle derivate parziali, l'esistenza di un invariante simultaneo, estensione di quello noto relativo alle ordinarie forme pfaffiane, ed in tale occasione ho cominciato a stabilire alcune formole fondamentali per la teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.

Riprendendo ora queste ricerche, io mi propongo con questa Nota e con altre che a questa seguiranno, di stabilire i fondamenti di questa teoria, allo scopo di giungere, fra le altre cose, anche alla risoluzione del problema di Pfaff per l'ordine qualunque, estendendo così nel modo più generale, alcune di quelle ricerche, sui differenziali di 2° ordine, da me già condotte a termine in questi ultimi tempi e pubblicate negli Annali di Matematica, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo e in quelli dell'Accademia dei Lincei.

(1) Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pp. 691-700.

In ciò che segue ci riferiremo pertanto continuamente alla Nota citata in principio.

1. *Preliminari.* — Le forme differenziali che considereremo sono dello stesso tipo di quelle che risultano formando il differenziale  $r^{mo}$  di una funzione di  $n$  variabili dipendenti, e cioè sono del tipo:

$$(1) \quad U \equiv X^{(r)} \equiv \sum_{m=1}^r \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)}$$

dove poniamo, per brevità:

$$(2) \quad \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} = \frac{1}{m!} S_j \sum_{i_1 \dots i_m} [i_1 \dots i_m] d^{i_1} x_{j_1} \dots d^{i_m} x_{j_m}$$

rappresentando con  $S_j$  l'operazione del sommare tutti i termini che si ottengono permutando le  $j_1 \dots j_m$  in tutti i modi possibili fra loro. La  $\delta$  risulta così *simmetrica nelle j*.

Per amor di chiarezza ricorderemo che

1. Le  $X_{j_1 \dots j_m}$  sono delle funzioni assegnate delle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , i cui valori sono indipendenti dall'ordine degli indici. Se esse diventano le derivate  $m^{me}$  di una funzione, la  $U$  diventa il differenziale totale  $r^{mo}$  della medesima.

2. Gli indici  $j_1 \dots j_m$  rappresentano una disposizione qualunque *con ripetizione* dei numeri  $1, 2, \dots, n$  ad  $m$  ad  $m$  e il sommatorio in (1) deve estendersi a tutte le possibili disposizioni di tale specie.

3. Gli indici  $i_1 \dots i_m$  sono  $m$  numeri interi positivi  $\geq 1$  tali che

$$(3) \quad i_1 + i_2 + \dots + i_m = r$$

e il sommatorio in (2) deve estendersi per tutti i possibili valori degli  $i$  soddisfacenti alla (3) *ma senza ripetizioni*.

4. Infine il simbolo  $[i_1 \dots i_m]$  rappresenta un certo coefficiente numerico dipendente dagli indici  $i_1 \dots i_m$ , il cui valore esplicito lo abbiamo potuto calcolare nella predetta Nota, ed è il seguente: se poniamo che fra i numeri  $i_1 \dots i_m$  ve ne siano  $q_1$  eguali fra loro, altri  $q_2$  anche eguali fra loro, ma diversi dai precedenti, e così di seguito, si ha:

$$(4) \quad [i_1 \dots i_m] = \frac{\binom{r}{i_1} \binom{r-i_1}{i_2} \binom{r-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{r-i_1-\dots-i_{m-1}}{i_m}}{q_1! q_2! \dots}$$

È bene avvertire che nella predetta Nota questo coefficiente numerico è stato rappresentato colla *parentesi rotonda* e non colla *quadrata*, come invece facciamo qui per evitare una confusione che potrebbe prodursi in seguito. Così anche nel medesimo luogo abbiamo scritto un po' diversamente

l'espressione di  $\delta$ , cioè senza l' $S_j$  e senza dividerla per  $m!$  Ma è facile vedere che introducendo questi nuovi  $\delta$  che hanno il vantaggio di essere simmetrici nelle  $j$ , la (1) non si altera.

Nella medesima Nota abbiamo poi dimostrato che, con una trasformazione di variabili, la (1) si trasforma in un'altra del medesimo tipo e propriamente in:

$$(5) \quad \sum_{\mu=1}^r \sum_{h_1 \dots h_{\mu}} Y_{h_1 \dots h_{\mu}} \delta_{h_1 \dots h_{\mu}}^{(r)}$$

dove

$$(6) \quad \delta_{h_1 \dots h_{\mu}}^{(r)} = \frac{1}{\mu!} S_h \sum_{k_1 \dots k_{\mu}} [k_1 \dots k_{\mu}] d^{k_1} y_{h_1} \dots d^{k_{\mu}} y_{h_{\mu}}$$

e i coefficienti trasformati hanno i valori

$$(7) \quad Y_{h_1 \dots h_{\mu}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}}_{xy}, \quad \begin{pmatrix} m \leq \mu \\ \mu \leq r \end{pmatrix}$$

essendo

$$(8) \quad \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}}_{xy}, \quad (m \leq \mu)$$

una certa somma di prodotti di derivate delle  $x$  di indici  $j_1 \dots j_m$  rispetto alle  $y$  di indici  $h_1 \dots h_{\mu}$ , *simmetrica* sia nei primi indici che nei secondi, e della cui costruzione abbiamo trattato nel medesimo luogo.

Ricorderemo infine che le (8) sono definite dalla formola:

$$(9) \quad \frac{\partial^{\mu} f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_{\mu}}} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}}_{xy}$$

dove  $f$  rappresenta una funzione qualunque.

2. *Identità cui soddisfa il simbolo*  $\binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}}_{xy}$ . — Tratteremo in questo § di una formola identica cui soddisfa il simbolo (8), e della quale dovremo fare in seguito spesso uso.

Deriviamo primo e secondo membro di (9) rispetto ad  $y_{h_{\mu+1}}$  e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_{\mu+1}}} &= \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}} \frac{\partial x_{j_{m+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}}_{xy} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}}_{xy}, \end{aligned}$$

e mutando nella prima parte del secondo membro  $m+1$  in  $m$ , e quindi estendendo il primo dei sommatorii da  $m=2$  sino ad  $m=\mu+1$ , e staccando dagli altri il primo e ultimo termine, cioè quelli nei quali  $m$  è eguale ad 1, o è eguale a  $\mu+1$ , possiamo scrivere:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y_{h_1} \dots \partial y_{h_{\mu+1}}} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( h_1 \dots h_{\mu} \right)_{xy} + \\ & + \sum_{m=2}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \left\{ \frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( h_1 \dots h_{\mu} \right)_{xy} + \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( h_1 \dots h_{\mu} \right)_{xy} \right\} + \\ & + \sum_{j_1 \dots j_{\mu+1}} \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{\mu+1}}} \frac{\partial x_{j_{\mu+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( h_1 \dots h_{\mu} \right)_{xy} . \end{aligned} \right.$$

Paragoniamo i termini di questa formola con quelli di (9) in cui si sia mutato  $\mu$  in  $\mu+1$ . I coefficienti delle medesime derivate della  $f$  (funzione arbitraria) in ambedue le formole devono coincidere. Osservando che  $j_1 \dots j_m$  rappresentano una disposizione (con ripetizioni) di  $m$  dei numeri  $1, 2, \dots, n$ , che mutandone l'ordine cambia la disposizione ma, essendo (8) simmetrico negli indici superiori, non cambia il valore del corrispondente termine in (9), mentre d'altra parte il sommatorio  $\sum_{j_1 \dots j_m}$  deve estendersi a

tutte le disposizioni, si ha che il coefficiente di

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}}$$

in (9) in cui si sia mutato  $\mu$  in  $\mu+1$ , è, se gli indici  $j_1 \dots j_m$  sono tutti diversi:

$$(11) \quad m! \left( h_1 \dots h_{\mu+1} \right)_{xy}$$

e se dei medesimi indici ve ne sono  $q_1$  fra loro eguali,  $q_2$  fra loro anche eguali ma diversi dai precedenti, e così di seguito, il medesimo coefficiente è lo stesso (11) ma diviso per  $q_1! q_2! \dots$ .

Il coefficiente della medesima derivata in (10), se  $2 \leq m \leq \mu$ , è intanto il risultato che si ottiene dalla parentesi della seconda riga di (10), quando si permutano le  $j_1 \dots j_m$  in tutti i modi, ovvero, al solito, tale somma divisa per  $q_1! q_2! \dots$ . Indicando perciò con  $S_{j_m}$  l'operazione di scambiare l'indice  $j_m$  con ciascuno degli  $j_1 \dots j_m$ , e di sommare gli  $m$  risultati ottenuti, il predetto coefficiente è:

$$(12) \quad (m-1)! S_{j_m} \frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( h_1 \dots h_{\mu} \right)_{xy} + m! \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( h_1 \dots h_{\mu} \right)_{xy}$$

ovvero questo medesimo diviso per  $q_1! q_2! \dots$  se gli  $j$  non sono tutti diversi.

Se poi  $m=1$  ovvero  $=\mu+1$ , il coefficiente della corrispondente derivata in (10) è rispettivamente:

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( \begin{matrix} j \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy}$$

e

$$(14) \quad \mu! S_{j_{\mu+1}} \frac{\partial x_{j_{\mu+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( \begin{matrix} j_1 \dots j_{\mu} \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy}.$$

Paragonando (11) con (12), e ricordando che  $\frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}}$  può scriversi  $\left( \begin{matrix} j_m \\ h_{\mu+1} \end{matrix} \right)_{xy}$ , si ha la formola:

$$(15) \quad \frac{1}{m} S_{j_m} \left( \begin{matrix} j_m \\ h_{\mu+1} \end{matrix} \right)_{xy} \left( \begin{matrix} j_1 \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy} + \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left( \begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy} = \left( \begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu+1} \end{matrix} \right)_{xy}$$

valevole per  $m=2, 3, \dots, \mu$ . Se poi  $m=1$  allora, come risulta da (13), bisogna nel primo membro lasciare solo il secondo termine, e se  $m=\mu+1$ , bisogna invece lasciarvi solo il primo termine, come risulta da (14).

3. *Identità relative al simbolo  $\delta$  definito dalla (2).* — Passeremo ora a stabilire altre due identità di frequente uso nelle cose che dovremo dire in seguito, e relative all'espressione  $\delta$  che entra nella formazione del differenziale  $r^{mo}$  di una funzione.

La prima si riferisce al differenziale del  $\delta$  e si ottiene nel seguente modo:

Da  $d \cdot d^r f = d^{r+1} f$ , adoperando la (1) in cui per le  $X$  si intendano le derivate di  $f$ , si deduce:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^r \sum_{j_1 \dots j_{m-1}} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m-1}}} d x_{j_m+1} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} + \sum_{m=1}^r \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} d \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} = \\ = \sum_{m=1}^{r+1} \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r+1)} \end{aligned}$$

e nel primo sommatorio mutando  $m$  in  $m-1$  e indi scambiando  $j_m$  con  $j_1 \dots j_{m-1}$ , sommando e dividendo per  $m$ , introducendo il simbolo di operazione  $S$  del paragrafo precedente e paragonando infine i coefficienti delle medesime derivate al primo e secondo membro, si ha la formola:

$$(16) \quad d \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} = \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r+1)} - \frac{1}{m} S_{j_m} d x_{j_m} \delta_{j_1 \dots j_{m-1}}^{(r)}$$

che vale per  $m=2, 3, \dots, r$ , ma non per  $m=1$ , perchè per tal caso si ha semplicemente:

$$(17) \quad d \delta_j^{(r)} = \delta_j^{(r+1)}$$

perchè  $\delta_j^{(r)} = d^r x_j$ .

Passiamo ora alla seconda formola.

Formando il differenziale  $r^{\text{mo}}$  del prodotto di due funzioni arbitrarie, e applicando alle derivate del prodotto una elementare formola di calcolo, possiamo scrivere:

$$(18) \quad d^r(f\varphi) = \sum_{\rho=1}^r \sum_{m=0}^{\rho} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{\rho-m}} \binom{\rho}{m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \frac{\partial^{\rho-m} \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{\rho-m}}} \delta_{j_1 \dots j_m i_1 \dots i_{\rho-m}}^{(r)}$$

dove osserviamo che dovendosi effettuare il sommatorio rispetto a tutti i valori delle  $i$  e  $j$  si può applicare, come abbiamo fatto, la formola di Leibnitz alla derivata

$$\frac{\partial^{\rho}(f\varphi)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{\rho-m}}}$$

spezzando le variabili in due gruppi di  $m$  e di  $\rho - m$  in un sol modo e non in tutti i modi possibili, come si dovrebbe fare in altro caso.

Intanto si può scrivere:

$$(19) \quad d^r(f\varphi) = \sum_{p=0}^r \binom{r}{p} d^p f d^{r-p} \varphi = \\ = \sum_{p=0}^r \sum_{m=1}^p \sum_{\rho=m+1}^{m+r-p} \binom{r}{p} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \frac{\partial^{\rho-m} \varphi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{\rho-m}}} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(p)} \delta_{i_1 \dots i_{\rho-m}}^{(r-p)}$$

Se poniamo da parte sia in (18) che in (19) quei termini in cui compariscono fattori  $f$  o  $\varphi$  non sottoposti a derivazioni, per gli altri termini dobbiamo in (18) estendere i sommatorii nel seguente modo:

$$\sum_{\rho=2}^r \sum_{m=1}^{\rho-1} \quad \text{che è eguale a} \quad \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{\rho=m+1}^r$$

mentre in (19) dobbiamo scrivere:

$$\sum_{p=1}^{r-1} \sum_{m=1}^p \sum_{\rho=m+1}^{m+r-p} \quad \text{che è eguale a} \quad \sum_{m=1}^{r-1} \sum_{\rho=m+1}^r \sum_{p=m}^{r+m-\rho}$$

Facendo allora questi mutamenti in (18) e (19), osservando che i termini trascurati sono fra loro identici in ambo le formole, e paragonando i coefficienti dei medesimi prodotti di derivate di  $f$  e  $\varphi$ , nei secondi membri sia di (18) che di (19), si ha la formola notevole:

$$(20) \quad \sum_{p=m}^{r+m-\rho} \binom{r}{p} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(p)} \delta_{j_1 \dots j_{\rho-m}}^{(r-p)} = \binom{\rho}{m} \delta_{j_1 \dots j_m i_1 \dots i_{\rho-m}}^{(r)}$$

valevole per  $\rho > m$ , e per qualunque sistema di indici  $j_1 \dots j_m i_1 \dots i_{\rho-m}$ .

4. *Applicazione di una trasformazione infinitesima al simbolo  $\delta$ .* — Sempre in vista di quanto dovremo esporre nelle Note seguenti, stabiliremo ora la formola che dà il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima

$$(21) \quad \Xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

all'espressione  $\delta$ . Stabiliremo *per definizione* che l'operazione rappresentata dal simbolo  $\Xi$  sia permutabile con quella rappresentata dal simbolo di differenziale  $d$ , e perciò

$$\Xi d^r f = d^r \Xi f = \sum_{i=1}^n d^r \left( \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} d^k \xi_i d^{r-k} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Sostituendo in questa formola per  $d^r f$  e per  $d^{r-k} \frac{\partial f}{\partial x_i}$  i loro valori, si ha:

$$(22) \quad \sum_{m=1}^r \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_i \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m} \partial x_i} \xi_i \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} + \sum_{m=1}^r \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \Xi \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} = \\ = \sum_{k=0}^r \sum_{m=1}^{r-k} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_i \binom{r}{k} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m} \partial x_i} d^k \xi_i \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r-k)},$$

intendendo che per  $k=r$  al secondo membro debba intendersi il termine:

$$(23) \quad \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^r \xi_i.$$

Osserviamo che al secondo membro il termine per  $k=0$  è esattamente la prima delle due parti del primo membro, mentre il termine per  $k=r$ , cioè (23) coincide con quello che la seconda parte del secondo membro, dà per  $m=1$ ; soppressi allora questi termini comuni al primo e secondo membro, mutando nel secondo  $m$  in  $m-1$ , osservando che

$$\sum_{k=1}^{r-1} \sum_{m=2}^{r-k+1} = \sum_{m=2}^r \sum_{k=1}^{r-m+1}$$

e ponendo  $i=j_m$ , si ha:

$$\sum_{m=2}^r \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \Xi \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} = \\ = \sum_{m=2}^r \sum_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \sum_{k=1}^{r-m+1} \binom{r}{k} d^k \xi_{j_m} \delta_{j_1 \dots j_{m-1}}^{(r-k)}.$$

Se ora paragoniamo i coefficienti delle medesime derivate di  $f$  al primo e secondo membro, e per ciò fare permutiamo le  $j$  fra loro in tutti i modi possibili, osserviamo che le  $\delta$  sono simmetriche negli indici inferiori, e introduciamo il simbolo  $S_{jm}$  con analogo significato che nel § 2, abbiamo infine la formola:

$$(24) \quad \Xi \delta_{j_1 \dots j_m}^{(r)} = \frac{1}{m} S_{jm} \sum_{k=1}^{r-m+1} \binom{r}{k} d^r \xi_{jm} \delta_{j_1 \dots j_{m-1}}^{(r-k)}$$

valevole per  $m = 2, 3, \dots, r$ , mentre per  $m = 1$  si ha semplicemente:

$$(25) \quad \Xi \delta_j^{(r)} = d^r \xi_j.$$

In una prossima Nota faremo le applicazioni di queste formole.

**Meccanica.** — *Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative.* Nota di A. F. DALL'ACQUA, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

Il problema che mi sono proposto è il seguente:

« Sotto quali condizioni una doppia infinità di linee (*congruenza*) in « uno spazio con tre dimensioni, possa riguardarsi come costituita dalle « traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da una forza conser- « vativa ».

Nel caso generale, con molta semplicità e senza sforzo veruno viene a completarsi a mano a mano il sistema delle equazioni del moto. Tuttavia non sembra agevole dare alle condizioni ottenute una forma elegante e di evidente significato geometrico.

In taluni casi però la questione si presenta in modo più adatto alle ricerche. Oltre al caso generale ne ho trattati tre particolari in ispecial modo interessanti.

1°. Quello in cui le traiettorie del punto siano geodetiche. « Esse, allora, coincidono con le linee di forza ».

2°. Il caso che la velocità sia costante rispetto al moto. Allora « il punto percorre delle geodetiche delle superfici equipotenziali ». Queste geodetiche sono inoltre caratterizzate dall'equazione

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s} + \varrho \gamma_{131} = 0$$

dove  $\varrho$  è il loro raggio di curvatura,  $s$  il loro arco,  $\gamma_{131}$  la curvatura della

proiezione sul piano ad esse normale delle traiettorie ortogonali alle superficie di livello.

3°. Il caso che le traiettorie costituiscano una congruenza normale. Ho trovato allora che: « Tutte le congruenze normali possono venir percorse da un punto generico sottoposto a forze conservative ». Il potenziale, quando si indichi con  $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \text{cost.}$  il parametro delle superfici ortogonali alla congruenza, è dato da

$$U = (\Delta_1 \alpha)^2 f(\alpha) + \text{cost.}$$

dove  $f$  è simbolo di funzione arbitraria.

Si ha un'altra soluzione oltre a questa quando sia normale anche la congruenza involupata dalle normali principali alle traiettorie dinamiche. In tal caso, essendo ancora  $\alpha$  il parametro delle superfici ortogonali alle traiettorie, « il parametro differenziale misto  $\nabla(\alpha, \Delta_1 \alpha)$  è funzione di  $\alpha$  e  $\Delta_1 \alpha$  soltanto ».

Indicando con  $\beta$  il parametro delle superfici ortogonali alla congruenza involupata dalle normali principali, la seconda soluzione per  $U$  è data dalla

$$U = (\Delta_1 \alpha)^2 f(\alpha) + (\Delta_1 \alpha)^2 \int \frac{d\beta}{(\Delta_1 \alpha)^2} - \beta$$

dove, risultando  $\Delta_1 \alpha$  funzione soltanto di  $\alpha$  e  $\beta$ , l'integrale del secondo membro, indica una integrazione parziale rispetto a  $\beta$ . Inoltre  $f$  è simbolo di funzione arbitraria.

1. Sia  $[\lambda]$  la congruenza costituita dalle traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da una forza conservativa: la velocità con cui le traiettorie vengono percorse sia rappresentata da un vettore  $[p]$ , tangente alla  $[\lambda]$ .

Applichiamo al nostro problema le formole generali della mia Nota sui *Moti di un punto libero, a caratteristiche indipendenti* <sup>(1)</sup> e poniamo perciò  $[\lambda] \equiv [\lambda_3]$ . Le *caratteristiche* (componenti della velocità secondo il triedro  $[\lambda_1], [\lambda_2], [\lambda_3]$ ) saranno  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $p_3 = p$ . Le equazioni del moto  $[(I), (II), \text{Nota citata}]$  si scrivono nel nostro caso

$$(I) \quad x'_r = p \lambda^{(r)}$$

$$(II) \quad P_1 = m p^2 \gamma_{313}, \quad P_2 = m p^2 \gamma_{323}, \quad P_3 = m p'.$$

Se indichiamo con  $U$  la funzione potenziale, con  $T = \frac{m p^2}{2}$  la forza

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Seduta del 15 marzo 1903.

viva, le (II) danno (ricordando le (I))

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = 2T\gamma_{313} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 2T\gamma_{323}$$

$$\frac{\partial U}{\partial s_3} = mp' = m \sum_r \frac{\partial p}{\partial x_r} x'_r + m \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial s_3} + m \frac{\partial p}{\partial t} .$$

Se, come supponiamo, il campo di forza è indipendente dal tempo, dovremo avere l'integrale delle forze vive  $T - U = h$  (cost. rispetto al moto) da cui

$$\frac{\partial U}{\partial s_3} = \frac{\partial T}{\partial s_3} .$$

Questa confrontata con la precedente espressione di  $\frac{\partial U}{\partial s_3}$ , mostra che nel nostro caso  $p$  non dipende esplicitamente dal tempo.

Le nostre equazioni si scrivono adunque, ponendo per brevità  $\gamma_{3h3} = \gamma_h$

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial s_1} = 2\gamma_1 T \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 2\gamma_2 T \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial s_3} = \frac{\partial T}{\partial s_3} .$$

Il problema meccanico che ci siamo proposti, corrisponde a questo:

“ Sotto quali condizioni, desunte da soli elementi della  $[\lambda]$ , le (1) risultino illimitatamente integrabili ”.

2. Le condizioni di integrabilità delle (1), posto  $\frac{\partial T}{\partial s_3} = \varepsilon$ , sono

$$(2) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_1} = 2T\beta_1 + 3\varepsilon\gamma_1 \quad , \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_2} = 2T\beta_2 + 3\varepsilon\gamma_2$$

$$(3) \quad \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial s_2} - \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial s_1} + T\delta + \varepsilon A = 0$$

dove  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta$  e  $\mathfrak{A}$ , che comparirà più innanzi (<sup>1</sup>), sono funzioni soltanto degli invarianti della terna  $[\lambda]$ .

Perchè queste equazioni possano esser soddisfatte, è necessario anzitutto che le (2) siano integrabili: sia cioè

$$(4) \quad \beta_1 \frac{\partial T}{\partial s_2} - \beta_2 \frac{\partial T}{\partial s_1} + T\mathfrak{A} + \frac{3}{2} \varepsilon \delta + A \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_3} = 0 .$$

(<sup>1</sup>) Le espressioni  $A$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  sono le *anormalità* delle congruenze  $[\lambda]$ ,  $[\lambda_1]$ ,  $[\lambda_2]$ , date dalle formole  $2A_h = \gamma_{h,h+1,h+2} - \gamma_{h,h+2,h+1}$ . Abbiamo posto inoltre

$$\beta_1 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_3} - \gamma_1 \gamma_{131} - 2\gamma_2 A_2 \quad , \quad \beta_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_3} - \gamma_2 \gamma_{232} + 2\gamma_1 A_1$$

$$\delta = \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} + \gamma_{212} \gamma_2 - \gamma_{121} \gamma_1 \quad , \quad \mathfrak{A} = \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} - \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \beta_2 \gamma_{212} - \beta_1 \gamma_{121} + 3(\beta_2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_2) .$$

La congruenza  $[\lambda_1]$  fino ad ora è rimasta arbitraria: approfittiamo di tale arbitrarietà per semplificare le nostre formole: assumiamo quindi per congruenza  $[\lambda_1]$  quella (e ciò è sempre possibile) che sodisfa alla relazione

$$(5) \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \sigma$$

dove indichiamo con  $\sigma$  il valore comune di questi rapporti.

Dalle (3) (4) abbiamo allora una relazione della forma

$$(2_1) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_3} = T\eta + \varepsilon \zeta \quad (1).$$

Delle condizioni di integrabilità del sistema (2) (2<sub>1</sub>), una è già soddisfatta per la (4), le altre due sono del tipo

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} \eta = T\mu_1 + \varepsilon \nu_1, \quad \frac{\partial T}{\partial s_2} \eta = T\mu_2 + \varepsilon \nu_2.$$

Da queste e dalla (3) ricaviamo allora

$$\varepsilon + T\varrho = 0.$$

Per questa le condizioni di integrabilità del sistema (1) (cioè le (2), (3) e la (4) o la equivalente (2<sub>1</sub>)) si scrivono

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} + \gamma_1(2\sigma - 3\varrho) + \frac{\varrho}{\eta}(\mu_1 - \nu_1\varrho) &= 0, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial s_2} + \gamma_2(2\sigma - 3\varrho) + \frac{\varrho}{\eta}(\mu_2 - \nu_2\varrho) &= 0, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial s_3} + \eta - \zeta\varrho - \varrho^2 &= 0. \end{aligned}$$

(1) Introducendo il simbolo  $\sigma$ ,  $\mathfrak{A}$  assume la forma:  $\mathfrak{A} = \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial s_2} - \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} + \sigma \delta$ , e ab-

biamo allora  $A\eta = \gamma_2 \frac{\partial \sigma}{\partial s_1} - \gamma_1 \frac{\partial \sigma}{\partial s_2}$ ,  $A\zeta = A\sigma - \frac{3}{2}\delta$ .

Nelle formole seguenti abbiamo posto:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \gamma_1 \left( 2 \frac{\partial \sigma}{\partial s_3} - 3\sigma \frac{\delta}{A} + 4\eta \right) - \frac{\partial \eta}{\partial s_1}, \quad \mu_2 = \gamma_2 \left( 2 \frac{\partial \sigma}{\partial s_3} - 3\sigma \frac{\delta}{A} + 4\eta \right) - \frac{\partial \eta}{\partial s_2}, \\ \nu_1 &= \gamma_1(5\sigma + \zeta) - \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}, \quad \nu_2 = \gamma_2(5\sigma + \zeta) - \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} \end{aligned}$$

da cui

$$\varrho = \frac{\delta\eta + \gamma_1\mu_2 - \gamma_2\mu_1}{A\eta + \gamma_1\nu_2 - \gamma_2\nu_1} = \frac{\delta\eta - \gamma_1 \frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial \eta}{\partial s_1}}{A\eta - \gamma_1 \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}}.$$

Queste, poichè le  $[\lambda_1]$   $[\lambda_2]$  non sono più arbitrarie, non contengono elementi indipendenti dalla  $[\lambda]$  e sono quindi le condizioni cercate.

Così il nostro problema analitico è risolto. Come dicemmo, non riesce però facile di dare nel caso generale una forma semplice e una semplice interpretazione geometrica alle (6).

Questo ci riuscirà invece nei casi a cui abbiamo accennato.

3. Il primo caso è il più semplice di tutti <sup>(1)</sup>. La geodeticità della  $[\lambda]$  è caratterizzata dall'annullarsi simultaneo degli invarianti  $\gamma_1, \gamma_2$ . Le (1) allora diventano

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 0$$

(omessa l'ultima che può sempre esser soddisfatta per un conveniente valore di  $T$ ). Queste mostrano che le congruenze  $[\lambda_1]$   $[\lambda_2]$  giacciono sulle superficie  $U = \text{cost.}$  La  $[\lambda]$  adunque riesce normale a tali superficie.

E poichè le  $U = \text{cost.}$  sono le superficie equipotenziali, ne viene che le traiettorie dal punto mobile, coincidono con le linee di forza.

4. Un caso che presenta alcune analogie col precedente, è quello in cui la velocità (e quindi la forza viva) sia costante lungo le traiettorie del punto. Lungo queste allora (ricorda le (1), oppure l'integrale delle forze vive) sarà anche costante il potenziale: cioè il punto si muove sopra le superficie equipotenziali.

Poichè la forza è normale a queste superficie, potremo considerare il punto come non sollecitato da forze, ma sottoposto al legame di dover rimanere sopra una superficie data (*equipotenziale*). Esso percorrerà quindi una geodetica di questa.

La sua velocità dovrà essere inoltre costante, rispetto al movimento. Se indichiamo con  $[\lambda_1]$  la congruenza ortogonale alle superficie equipotenziali, che riuscirà per ciò che si è detto, normale principale alla  $[\lambda]$ , sarà <sup>(2)</sup>  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = c$ ,  $c$  curvatura della  $[\lambda]$ . Avremo per le (1)

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial s_1} = T,$$

e perchè  $T$  sia costante durante il movimento  $\left(\frac{\partial T}{\partial s_3} = 0\right)$

(1) Esso venne escluso dalla trattazione generale, insieme col caso delle congruenze normali, perchè nelle posizioni della pagina precedente figurano come divisori quantità che si annullano in tali casi.

(2) Confr. la mia Memoria *Sulla teoria delle congruenze di curve*, ecc. Annali di Matematica. S. III, T. VI.

$$c \frac{\partial}{\partial s_3} \frac{\partial U}{\partial s_1} - \frac{\partial U}{\partial s_1} \frac{\partial c}{\partial s_3} = 0$$

cioè (1)

$$\frac{\partial \log c}{\partial s_3} = \gamma_{131}$$

che indicando con  $\varrho = \frac{1}{c}$  il raggio di curvatura della  $[\lambda]$ , assume la forma che le abbiamo data nella introduzione.

5. Veniamo al caso delle congruenze normali (non geodetiche,  $A = 0$ ,  $c \neq 0$ ) e supponiamo ancora la  $[\lambda_1]$  normale principale alla  $[\lambda]$  ( $\gamma_1 = c$ ,  $\gamma_2 = 0$ ). Le (1) si scrivono

$$(1') \quad \frac{\partial U}{\partial s_1} = 2cT, \quad \frac{\partial U}{\partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial s_3} = \frac{\partial T}{\partial s_3}.$$

Insieme con queste varrà ancora la (3). Postovi  $A = 0$ ,  $\gamma_1 = c$ ,  $\gamma_2 = 0$ ; essa si scriverà (2)  $\frac{\partial T}{\partial s_2} = 0$ .

Da questa e dalle (1') abbiamo

$$(7) \quad \frac{\partial(T - U)}{\partial s_2} = 0, \quad \frac{\partial(T - U)}{\partial s_3} = 0.$$

Quindi: o  $T - U$  è costante in tutto lo spazio, e si avrà anche per le (1')

$$(8) \quad \frac{\partial \log T}{\partial s_1} = 2c, \quad \frac{\partial \log T}{\partial s_2} = 0.$$

oppure la congruenza  $[\lambda_1]$  è anch'essa normale, e  $T - U$  è un parametro delle superficie ortogonali ad essa.

(1) Fra le derivate seconde di una funzione passa la relazione (condizione di integrabilità)

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial U}{\partial s_3} - \frac{\partial}{\partial s_3} \frac{\partial U}{\partial s_1} + \gamma_{131} \frac{\partial U}{\partial s_1} + 2A_3 \frac{\partial U}{\partial s_2} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial s_3} = 0$$

e che nel nostro caso (per le (1)) assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial s_3} \frac{\partial U}{\partial s_1} = \gamma_{131} \frac{\partial U}{\partial s_1}.$$

(2) Per la nota relazione simbolica  $\gamma_{12} - \gamma_{21} = 0$  (v. p. e. Nota citata), si ha nel nostro caso

$$\frac{\partial c}{\partial s_2} - c\gamma_{131} = 2 \frac{\partial A}{\partial s_3} + 4AH = 0.$$

Per questa il coefficiente  $\delta$  nella (3) si annulla.

Nel primo caso, indichiamo con  $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \text{cost.}$ , l'equazione delle superficie ortogonali alla  $[\lambda]$ . È noto allora <sup>(1)</sup> che le linee lungo cui si intersecano le superficie  $\alpha = \text{cost.}$ , con le  $\Delta_1 \alpha = \text{cost.}$ , riescono binormali alla  $[\lambda]$ , costituiscono cioè la  $[\lambda_2]$ . Ed è noto pure che si ha

$$(9) \quad \frac{\partial \log \Delta_1 \alpha}{\partial s_1} = c, \quad \frac{\partial \log \Delta_1 \alpha}{\partial s_2} = 0.$$

Da queste e dalle (8)

$$\frac{\partial (\log T - 2 \log \Delta_1 \alpha)}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial (\log T - 2 \log \Delta_1 \alpha)}{\partial s_2} = 0.$$

Queste ci mostrano che  $\log T - 2 \log \Delta_1 \alpha$  e quindi  $\frac{T}{(\Delta_1 \alpha)^2}$  è costante sulle superficie ortogonali alla  $[\lambda]$  cioè sulle  $\alpha = \text{cost.}$ : ne sarà adunque un parametro. Potremo indicarlo con  $f(\alpha)$ , e sarà

$$T = (\Delta_1 \alpha)^2 f(\alpha).$$

Per la osservazione precedente,  $U = T + C$  da cui

$$U = (\Delta_1 \alpha)^2 f(\alpha) + C$$

dove  $C$  rappresenta una costante assoluta.

6. Consideriamo il secondo caso. La  $[\lambda_1]$  è normale, sia  $\beta = \text{cost.}$  l'equazione delle superficie ortogonali alla  $[\lambda_1]$ :  $T - U$  è un parametro di queste, che potremo identificare con  $\beta$

$$T - U = \beta.$$

Per la prima delle (9), la prima delle (1') si scrive

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = \frac{2}{\Delta_1 \alpha} \frac{\partial \Delta_1 \alpha}{\partial s_1} (U + \beta)$$

od anche

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \frac{U}{(\Delta_1 \alpha)^2} = 2\beta \frac{1}{(\Delta_1 \alpha)^3} \frac{\partial \Delta_1 \alpha}{\partial s_1} = -\beta \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{(\Delta_1 \alpha)^2}.$$

La  $\frac{U}{(\Delta_1 \alpha)^2}$ , e la  $\frac{1}{(\Delta_1 \alpha)^2}$  sono funzioni soltanto di  $\alpha$  e  $\beta$ . Invero dalla

(1) Cfr. Memoria citata, pag. 34.

seconda delle (1) e dalla seconda delle (9) si trae che  $U$  e  $\Delta_1 \alpha$  sono costanti lungo la  $[\lambda_2]$ , sono cioè funzioni soltanto dei parametri ( $\alpha$  e  $\beta$ ) delle superficie che si intersecano lungo la  $[\lambda_2]$ .

Sarà perciò (1)

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{U}{(\Delta_1 \alpha)^2} = - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{(\Delta_1 \alpha)^2}$$

e integrando per parti

$$U = -\beta + (\Delta_1 \alpha)^2 \int \frac{d\beta}{(\Delta_1 \alpha)^2} + (\Delta_1 \alpha)^2 f.$$

La  $f$  rappresenta la costante rispetto a  $\beta$  relativa all'integrale del secondo membro: essa perciò non deve contener  $\beta$ : ma poichè  $U$  è funzione solo di  $\alpha$  e  $\beta$ , essa riuscirà funzione di  $\alpha$  soltanto.

7. Per esaurire la nostra ricerca, procuriamo di determinare tutte le  $[\lambda]$  che soddisfanno alla doppia condizione di esser normali e involuppare con le loro normali principali una congruenza normale. Indicando ancora con  $\alpha$  e  $\beta$  i parametri delle superficie ortogonali alla  $[\lambda]$  e alla sua normale principale, dovrà valere la relazione

$$(10) \quad \nabla(\alpha, \beta) = 0$$

(con che le  $\beta = \text{cost.}$  riescono ortogonali alle  $\alpha = \text{cost.}$ ), e valere inoltre la  $\frac{\partial \Delta \alpha}{\partial s_2} = 0$  (con che le linee ortogonali alle  $\beta = \text{cost.}$  riescono normali principali rispetto alla  $[\lambda]$ );  $\Delta_1 \alpha$  è perciò funzione solo di  $\alpha$  e  $\beta$ , o ciò che è lo stesso  $\beta$  è funzione di  $\alpha$  e  $\Delta \alpha$  soltanto.

Tenendo conto di ciò la (10) si scrive (2)

$$\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} (\Delta_1 \alpha)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial (\Delta_1 \alpha)} \nabla(\alpha, \Delta_1 \alpha) = 0.$$

(1) In generale si avrà

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial s_1} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s_1} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s_1}.$$

Ma si ha  $\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = 0$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial s_1} \neq 0$ , per cui  $\frac{\partial F}{\partial s_1} : \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \frac{\partial F}{\partial \beta}$ .

$$(2) \quad \nabla(\alpha, \beta) = \sum_r \alpha^{(r)} \beta_r = \sum_r \alpha^{(r)} \left[ \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \alpha_r + \frac{\partial \beta}{\partial \Delta_1 \alpha} (\Delta_1 \alpha)_r \right] =$$

$$= \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \sum_r \alpha^{(r)} \alpha_r + \frac{\partial \beta}{\partial \Delta_1 \alpha} \sum_r \alpha^{(r)} (\Delta_1 \alpha)_r = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} (\Delta_1 \alpha)^2 + \frac{\partial \beta}{\partial \Delta_1 \alpha} \nabla(\alpha, \Delta_1 \alpha).$$

Perchè questa sia integrabile è necessario e sufficiente che si abbia

$$\nabla(\alpha, \Delta_1 \alpha) = F(\alpha, \Delta_1 \alpha).$$

Ad ogni integrale di questa ultima corrisponderà adunque una congruenza del tipo cercato.

**Fisica.** — *Sensibilità del ferro alle onde elettriche nell'isteresi magneto-elastica.* Nota di A. SELLA, presentata dal Socio BLASERNA.

Rutherford mostrava nel 1897 (Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London, 189) che fili sottili di acciaio magnetizzati a saturazione possono costituire un rivelatore sensibile di onde elettriche, poichè essi si smagnetizzano parzialmente, quando le onde vengano fatte passare sia in un avvolgimento solenoidale intorno al filo, sia longitudinalmente per il filo stesso.

Marconi ha recentemente mostrato (Proc. Roy. Soc. London, 1902) che una variazione della magnetizzazione di un filo di ferro ha sempre luogo sotto l'azione di onde elettriche condotte intorno ad esso, mentre il filo percorre un ciclo magnetico sotto l'azione di un campo esterno variabile ed in generale in un punto qualunque di questo ciclo. La brusca variazione di energia magnetica del filo prodotta dall'onda viene accusata da un telefono in serie con un avvolgimento intorno al filo di ferro. Con questa doppia e radicale modificazione, il *detector* magnetico è diventato nelle mani del Marconi, come è noto, un apparecchio di grande sensibilità.

Era naturale il pensare che questa sensibilità di un filo di ferro alle onde elettriche si dovesse ritrovare quando l'isteresi magnetica fosse generata invece che da un cambiamento del campo esterno, da un altro processo, come per esempio da una deformazione elastica. E si riesce infatti molto facilmente a dimostrare che le cose stanno così.

Un fascio di fili di ferro saldati insieme alle due estremità è infilato in un tubo di vetro, intorno a cui sono disposti due avvolgimenti di filo di rame sottile; di cui l'uno è destinato ad accogliere il passaggio delle onde elettriche, mentre l'altro è chiuso su di un telefono. Se ora il fascio è stato previamente magnetizzato e lo si sottopone ad un processo di torsione alternativamente da una parte e dall'altra, esso è molto sensibile in queste condizioni ad onde elettriche lanciate nel primo avvolgimento.

L'isteresi magneto-elastica per torsione è un fenomeno molto complesso ed anche la sensibilità alle onde elettriche del filo di ferro dipende fortemente dalle sue condizioni momentanee e dalla sua storia precedente, sia magnetica, sia elastica.

Gli stessi fatti si osservano se il fascio di fili, posto in un campo magnetico, viene alternativamente stirato sino ad un certo punto e poi allentato; ossia nel caso di isteresi magnetica per trazione.

Le osservazioni riferite dimostrano che la sensibilità magnetica del ferro alle onde elettriche nelle condizioni enunciate dal Rutherford e dal Marconi si ritrova *in generale*, ogni qual volta entra in giuoco un fenomeno di isteresi, qualunque poi sia il processo adoperato.

**Fisica.** — *Variazione dell'attrito interno dei liquidi magnetici in campo magnetico* <sup>(1)</sup>. Nota di CAMILLO CARPINI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. Le esperienze di Walter König nel 1885 <sup>(2)</sup> misero in luce la indipendenza dell'attrito interno dei liquidi coibenti dal campo elettrostatico, e la indipendenza dell'attrito interno dei liquidi magnetici dal campo magnetico. Mentre per i liquidi coibenti non mancarono ulteriori ricerche, come quelle del Quinke <sup>(3)</sup>, del Duff <sup>(4)</sup>, del Pacher e Sozzani <sup>(5)</sup>, le quali condussero a risultati contraddittori, mancano invece del tutto per i liquidi magnetici, se si eccettuano le brevi ricerche del König sul solfato di manganese.

Mi è sembrato quindi interessante eseguire una serie di esperienze su diversi liquidi magnetici, per porre in luce la dipendenza od indipendenza dell'attrito interno dal campo magnetico.

Il metodo adoperato fu di far scorrere il liquido attraverso ad un capillare, e di vedere se esistesse o no una variazione nel tempo necessario per il passaggio di una certa quantità di liquido attraverso al capillare quando questo si trovava in un campo magnetico, e quando invece il campo non esisteva.

2. Mi sono a tale scopo servito del seguente apparecchio:

Un tubo *AB* di diametro interno eguale a mm. 10,5, e lungo cm. 34, aveva due strozzature capillari *A* e *B*, distanti cm. 16. Nella parte inferiore era saldato con un tubo capillare ad *U*, lungo cm. 17, e del diametro interno di mm. 0,6. Simmetricamente al primo tubo se ne aveva un altro senza strozzature. Tale apparecchio si trovava entro un grande recipiente cilindrico *E*, della capacità di litri 32, che aveva nel fondo un prolungamento a scatola di ottone molto schiacciata, e precisamente con le due pareti distanti mm. 15. In questa parte del recipiente penetrava il tubo capillare *F*; si regolava l'altezza dell'intero tubo in guisa che il tratto orizzontale fosse situato fra le espansioni polari di una elettro-calamita Ruhmkorff *D*. Tali

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.

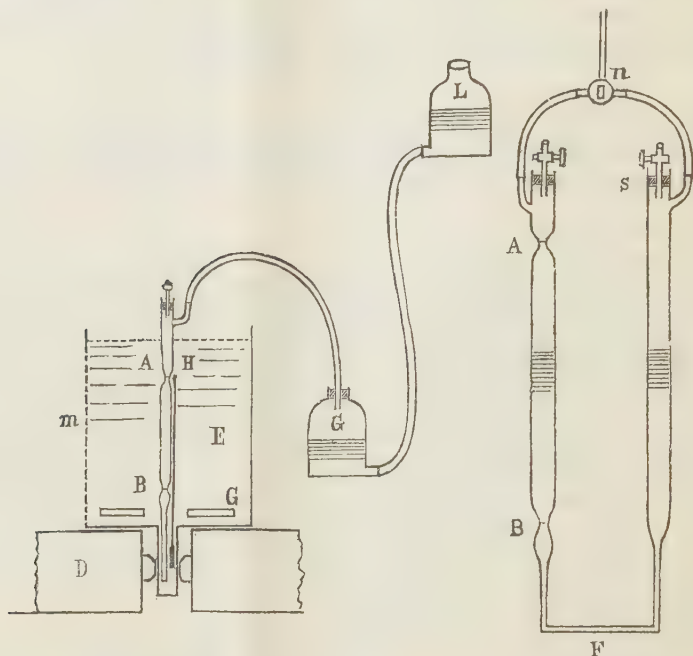
(2) Wied. Ann., 25, pag. 624, 1885.

(3) Ibid. 62, pag. 1, 1897.

(4) The Physical Review, pag. 23, 1896.

(5) Nuovo Cimento, II, pag. 290, 1900.

espansioni erano state tagliate a forma lineare in guisa da concentrare il campo lungo una linea; la lunghezza di tali espansioni era minore del tratto orizzontale del tubo capillare, dimodochè di questo ultimo solo il tratto di mezzo era immerso nel campo magnetico, che poteva ritenersi uniforme.



Il liquido passava dal tubo di sinistra in quello di destra per effetto della pressione esercitata su esso dall'aria di un recipiente *G*, compressa da una colonna liquida costituita dall'acqua contenuta nel tubo di gomma e nel recipiente *L* situato ad un livello superiore.

Il recipiente *E* era pieno di acqua, che durante le esperienze veniva continuamente e lentamente agitata da un agitatore *C*. Attraverso alla finestra di vetro *M* si poteva vedere il tubo *AB*, ed un termometro pronto e sensibile, che dava il decimo di grado, segnava l'andamento della temperatura. Poichè questa ha una grande influenza sulla durata del deflusso, le esperienze si facevano in una camera chiusa e solo nelle ore in cui si avevano le più piccole variazioni di temperatura.

3. Ecco come eran condotte:

Dopo aver sollevato il liquido al di sopra del segno *A*, allo scopo di partire sempre dalla stessa pressione iniziale, si poneva il recipiente *L* sullo stesso piano di *G*, fino a che l'acqua avesse in entrambi lo stesso livello; poscia si sollevava *L* ad una altezza determinata, e si stabiliva con il rubinetto *n* la comunicazione di *G* con il ramo *AB* del tubo; contemporaneamente si apriva anche il rubinetto *s*. Il liquido cominciava allora a fluire; si osservava l'istante in cui il menisco passava per il segno *A*, notando il tempo

con un buon cronometro, che batteva il mezzo secondo; si osservava poscia l'altro passaggio al punto *B*, ottenendo così dalla differenza la durata di passaggio di una determinata quantità di liquido.

Si ripetevan poscia le stesse operazioni avendo prima lanciata la corrente nell'elettro-calamita. Durante il tempo del passaggio del liquido si sorvegliava l'andamento della temperatura, che nelle ultime esperienze decisive variò a meno di un decimo di grado.

La corrente dell'elettro-calamita era fornita da 10-12 accumulatori, con una intensità variabile da 9 a 10 Ampère; l'intensità del campo magnetico variava da 6000 ad 8000 U. As.

4. Ho sperimentato sui seguenti liquidi: cloruro ferrico, solfato manganoso, solfato ferroso, solfato di nikel. Ho creduto opportuno aggiungere anche il ferro dializzato, sebbene debolmente magnetico, per vedere se il fenomeno Majorana della birifrangenza magnetica <sup>(1)</sup> fosse collegato all'attrito interno, quantunque il campione da me adoperato, di preparazione recente, non presentasse la birifrangenza in modo spiccato.

Ho avuto i seguenti risultati:

| Liquido                  | Densità | Senza campo |           | Con campo |          | Differenza |
|--------------------------|---------|-------------|-----------|-----------|----------|------------|
|                          |         | Temp.       | Durata    | Temp.     | Durata   |            |
| Cloruro ferrico . . . .  | 1,281   | 19°,05      | 22' 3'',6 | 19°,06    | 22' 7''  | + 3'',4    |
| Solfato manganoso . . .  | 1,250   | 19,59       | 19 55     | 19,61     | 19 56 ,2 | + 1 ,5     |
| "    ferroso . . . .     | 1,176   | 19 ,45      | 13 39     | 19 ,45    | 13 39 ,5 | + 0 ,5     |
| "    nikel . . . . .     | 1,146   | 20 ,05      | 18 57     | 20 ,05    | 19 1 ,2  | + 4 ,2     |
| Ferro dializzato . . . . | 1,031   | 18 ,78      | 18 29     | 18 ,80    | 18 28 ,4 | — 0 ,6     |

Dalla precedente tabella risulta che, ad eccezione del ferro dializzato, la durata di deflusso è più grande quando esiste il campo magnetico.

Per vedere se tale variazione del tempo è dovuta ad una variazione dell'attrito interno dobbiamo tener conto di alcune cause di errore.

Il leggiero aumento di temperatura, avutosi con il campo, produrrebbe una diminuzione di tempo, anzichè un aumento, sulla durata del deflusso.

Tale aumento di temperatura produce però una dilatazione del volume AB; ho calcolato che nel mio caso un decimo di grado produrrebbe una variazione di volume di cm<sup>3</sup> 0,00004; il che importerebbe un aumento di secondi 0,00003.

La inevitabile dissimetria del campo magnetico, nelle due parti del tubo, influisce sulla durata del deflusso perchè produce una pressione. Una differenza di *H* unità assolute, tra i valori del campo nei due rami del tubo, produrrebbe una pressione data da:

$$(2) \quad h = H^2 \frac{\mu - \mu_0}{8\pi \rho g}$$

in cui *h* è la pressione in centimetri del liquido studiato, *ρ* la sua densità,

(1) Rend. Acc. Lincei, 1902.

(2) Drude, Physik des Aethers, pag. 146.

$\mu$  e  $\mu_0$  le costanti di permeabilità del liquido e dell'aria. Ho calcolato che con il cloruro ferrico, di densità  $\rho = 1,5$  e permeabilità  $\mu = 1 + 7,5 \cdot 10^{-4}$  una pressione di cm. 0,15 sarebbe prodotta da una differenza del campo di 1686 unità assolute; tale differenza importerebbe una variazione di 4" sulla durata del deflusso. Si vede da ciò che l'influenza della dissimetria, che effettivamente si poteva avere, era del tutto trascurabile.

Le precedenti cause di errore influiscono così poco nella durata del deflusso, che il piccolo aumento avutosi con il campo non può ascriversi ad esse.

Dobbiamo però tener conto del fatto che essendo il liquido conduttore, succede l'effetto Foucault; allo scopo di scindere un tale effetto dal supposto effetto magnetico mi preparai una soluzione di nitrato di potassio, che avesse la stessa conduttività della soluzione di solfato di manganese adoperata: le esperienze eseguite con questa soluzione danno il seguente risultato:

| Senza campo |           | Con campo |          |
|-------------|-----------|-----------|----------|
| Temp.       | Durata    | Temp.     | Durata   |
| 21°,70      | 10' 24",5 | 21°,73    | 10' 27". |

L'aumento nel tempo di 2",5 è pressochè eguale a quello ottenuto con il solfato di manganese, la cui costante di permeabilità è assai più grande di quella del nitrato di potassio: da questo fatto, e dall'esser tale aumento pressochè nullo per il ferro dializzato, che non è certamente tra i migliori conduttori, rende probabile l'ipotesi che l'aumento di tempo avutosi con il campo sia esclusivamente dovuto all'effetto Foucault, e che l'attrito interno dei liquidi magnetici sia indipendente dal campo magnetico.

**Chimica.** — *Sopra i nitropirroli* (1). Nota di ANGELO ANGELI e FRANCESCO ANGELICO, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Il pirrolo, l'indolo ed i suoi omologhi vengono, come è noto, nella maggior parte dei casi facilmente e profondamente decomposti dall'acido nitrico e perciò i pochi nitroderivati di questa serie che finora si conoscono vennero in gran parte preparati per via indiretta, facendo reagire cioè l'acido nitrico sopra i pirroli sostituiti con radicali negativi quali l'acetile ed il carbosile (2). I derivati binitrici sono quelli che si formano di preferenza.

Per la preparazione dei nitropirroli e soprattutto dei mononitroderivati era quindi necessario abbandonare l'antico metodo di nitratura diretta per

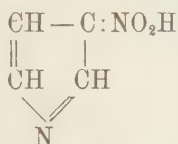
(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

(2) Ciamician, *Il pirrolo ed i suoi derivati*. Roma, 1888.

mezzo dell'acido nitrico (che nelle altre serie e specialmente nell'aromatica è d'impiego generale) e ricorrere a nuove reazioni ed a nuovi artifizi.

A tale scopo ancora lo scorso anno noi abbiamo iniziata una serie di esperienze, giovandoci del nuovo metodo di nitrurazione che ha permesso ad uno di noi<sup>(1)</sup> di preparare i sali dell'acido nitroidrossilamminico. Come è noto, questo metodo consiste nel far reagire invece dell'acido nitrico libero il *nitrato di etile in presenza di etilato sodico* ovvero di sodio metallico. La reazione procede netta, a bassa temperatura, e permette di ottenere invece dei nitroderivati liberi i sali sodici dei corrispondenti acidi nitronici, i quali molte volte sono di gran lunga più stabili.

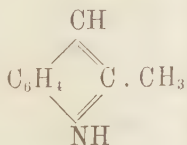
Per tale trattamento il pirrolo, come lo scorso anno abbiamo accennato in questi Rendiconti<sup>(2)</sup>, fornisce un composto il quale con tutta probabilità è da considerarsi come il sale sodico dell'acido pirrolnitronico:



Le numerose esperienze che noi abbiamo in seguito fatte ci hanno ben presto dimostrato che la nuova reazione è di indole generale e che si applica egualmente bene anche agli indoli. Facciamo però notare che noi finora abbiamo preso in esame solamente pirroli ed indoli che hanno libero almeno un atomo di idrogeno in posizione  $\beta$ ; ulteriori ricerche ci dimostreranno se tale comportamento sia comune anche a quei pirroli ed indoli che abbiano liberi solamente atomi di idrogeno in posizione  $\alpha$ .

Trattandosi di una reazione nuova e che conduce a composti dotati di caratteri speciali, era dapprima necessario stabilire se i prodotti che per tale mezzo si ottengono siano da considerarsi come veri nitroderivati, identici cioè a quelli che finora vennero esclusivamente preparati per diretta azione dell'acido nitrico.

Come termine di studio noi abbiamo giudicato opportuno dare la preferenza all' $\alpha$ -metilindolo (metilchetolo):

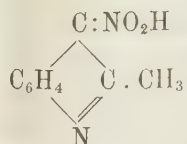


Per azione del nitrato di etile in presenza di sodio metallico (in soluzione eterea) questa sostanza fornisce, con rendimento di circa il 50 %, il

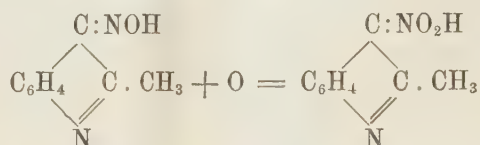
(1) Angeli, questi Rendiconti, anno 1896, 1° sem., pag. 120.

(2) Questi Rendiconti, anno 1902, 2° sem., pag. 16.

sale sodico di un acido nitronico, al quale con grande probabilità spetta la struttura:

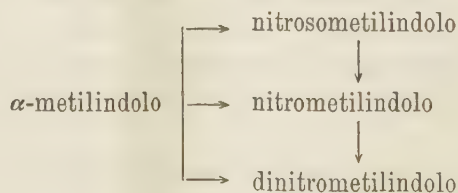


l'acido cristallizza in grandi squame gialle che presentano bellissimi riflessi metallici di color violetto ed è identico al prodotto che noi abbiamo preparato due anni or sono ossidando con permanganato, in soluzione alcalina, il nitroso- $\alpha$ -metilindolo da noi scoperto:



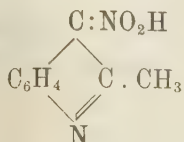
Per trattamento con poco acido nitrico (diluito con molto acido acetico glaciale) fornisce un dinitrocomposto che a sua volta è identico con il dinitrometilindolo, ottenuto molti anni addietro da Zatti facendo reagire l'acido nitrico fumante sopra l' $\alpha$ -metilindolo. L'identità di questi prodotti, ottenuti per diverse vie e per mezzo di reazioni completamente diverse, dimostra che le sostanze che si preparano col nitrato di etile sono da considerarsi come veri nitrocomposti.

Il seguente schema illustra meglio i passaggi che riuscimmo ad effettuare:

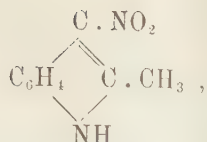


Senza dubbio saranno possibili anche le trasformazioni reciproche, ma non ce ne siamo occupati giacchè queste per noi presentavano un interesse secondario.

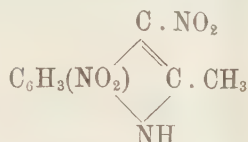
Al prodotto ottenuto dal metilechetolo sarà perciò da assegnarsi la formula:



ovvero la tautomera:



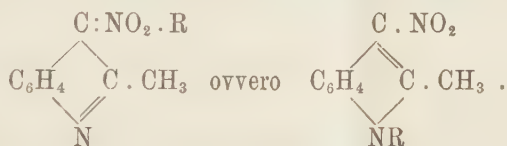
ed al dinitrometilindolo di Zatti spetta la struttura:



oppure la forma tautomera (acido nitronico).

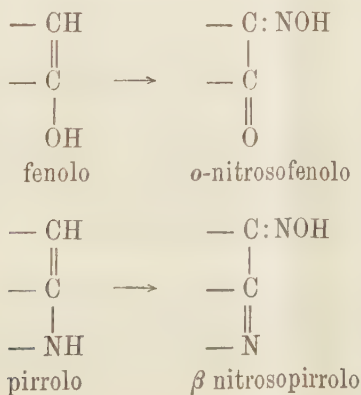
I sali di questi mononitroderivati, per azione dei ioduri alcoolici, forniscono con tutta facilità i corrispondenti eteri, i quali sono sostanze molto stabili e per lo più caratterizzate per la tendenza a fornire bellissimi cristalli.

Ulteriori ricerche ci permetteranno di stabilire quale delle due forme sia da assegnarsi p. e. all'etere che si ottiene dal nitrometilindolo:



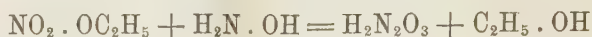
Come risulta dalle nostre ricerche precedenti, finora ci è stato possibile di preparare i nitrosoderivati solamente da quei pirroli ed indoli che hanno libero un atomo di idrogeno in posizione  $\beta$ , e molto probabilmente la stessa regola vale anche per il caso dei nitrocomposti.

I fenoli, come è noto, possono fornire gli ortonitrosocomposti come pure i paraderivati, ed a questo riguardo faremo osservare che i  $\beta$ -nitrosopirroli corrispondono agli ortonitrosafenoli, scoperti da Adolfo von Baeyer:

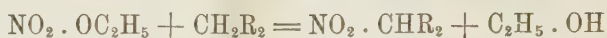


Quello che imprime l'analogia fra i fenoli ed i pirroli è l'ossidrile da una parte e l'immino dall'altra; la sola differenza risiede nel fatto che nei pirroli una valenza dell'azoto concorre alla formazione dell'anello chiuso. Da ciò ne segue che nel caso dei pirroli non sono possibili nitrosoderivati paragonabili ai paranitrosofenoli.

Il metodo di nitrizzazione per mezzo del nitrato di etile da noi proposto, e che ci ha permesso di unire azoto ad azoto come nel caso dell'acido nitroidrossilamminico:



oppure azoto a carbonio come nelle reazioni descritte nella presente Nota:



presenta una grande rassomiglianza con la celebre reazione di Claisen per saldare carbonio a carbonio:



Gli eteri dell'acido nitrico reagiscono quindi in modo analogo agli eteri degli acidi carbossilici.

Nella Gazzetta Chimica Italiana faremo a suo tempo seguire la descrizione delle esperienze che si riferiscono al presente lavoro.

**Chimica.** — *Nuove ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo.* Nota di G. BRUNI e M. PADOA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In un lavoro presentato nel 1900 alla Accademia delle Scienze di Amsterdam <sup>(1)</sup>, ma venuto a nostra conoscenza solo pochi mesi or sono <sup>(2)</sup> C. van Eyk ha constatato che il joduro talloso può dare cristalli misti col nitrato corrispondente. Sciogliendo il joduro (che fonde a 422°) nel nitrato che fonde a 206° si ha un innalzamento del punto di congelamento fino dalle più basse concentrazioni; i cristalli misti formano due serie: gli uni corrispondenti alla forma del nitrato, gli altri a quella del joduro.

<sup>(1)</sup> Versl. Kon. Ak. Wet. Amsterdam, IX, 44-46 (1900).

<sup>(2)</sup> Zeitschr. f. physik. Chemie 41, 750, Ref. Un sunto pubblicato nei Wiedemann's Beiblätter 1900, pag. 1266, è per la estrema brevità e per i grossolani errori di stampa, assolutamente incomprensibile.

D'altra parte per cortese privata comunicazione del nostro amico prof. F. Garrelli, ci era già anteriormente noto come sino dal 1900 egli e Calzolari avessero osservato che sciogliendo bromuro e joduro potassico nel salnitro fuso si hanno fenomeni del tutto analoghi a quelli sopra accennati.

In questi casi si tratta evidentemente di isodimorfismo; casi di isomorfismo puro e semplice fra nitrati e joduri, bromuri o cloruri inorganici non sono finora noti. Nella letteratura cristallografica, abbiamo riscontrato però un bel caso di isomorfismo fra bromuro e nitrato di un ammonio quaternario organico. Beckenkamp <sup>(1)</sup> misurando i cristalli del bromuro e del nitrato di p. nitrofeniltrimetilammonio, trovò che essi sono geometricamente isomorfi:



Anche l'abito esterno dei cristalli e tutti i valori angolari si corrispondono in modo assai soddisfacente. Apparece ora assai interessante di esaminare le forme cristalline del maggior numero di sali corrispondenti analoghi, e noi siamo ora occupati nella preparazione di un gran numero di nitrati di ammonii quaternarii che per la massima parte non sono noti, allo scopo di sottoporli ad un esame cristallografico in confronto coi rispettivi joduri.

La conoscenza dei fatti sopraesposti ci indusse a ricercare se fenomeni di isomorfismo e di formazione di cristalli misti potessero verificarsi anche fra composti organici che contenessero da un lato un atomo di cloro, bromo o jodio e dall'altro il residuo nitrico  $\text{NO}_2$ . Riferiamo qui brevemente i primi risultati ottenuti nelle ricerche a questo proposito intraprese, il cui resoconto dettagliato sarà più tardi pubblicato nella Gazzetta chimica italiana.

Abbiamo anzitutto ricercato se nella letteratura cristallografica si trovassero casi di isomorfismo o di relazioni morfotropiche fra nitroderivati e i composti alogenati corrispondenti. Diamo qui alcuni esempi, nei quali queste relazioni cristallografiche risultano più evidenti:

|                                                                   | $a : b : c$ | 110:1 $\bar{1}$ 0 | 011:0 $\bar{1}$ 1 |
|-------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------|-------------------|
| Biclorocanfora <sup>(2)</sup> : rombico; 0,8074:1:0,5448          |             | 77,50'            | 57,50'            |
| Clorobromocanfora <sup>(2)</sup> " 0,8040:1:0,5228                |             | 77,36             | 55,12             |
| Bibromocanfora <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> " 0,7925:1:0,5143    |             | 76,47             | 54,26             |
| Cloronitrocenfora <sup>(2)</sup> " 0,7463:1:0,4971                |             | 73,28             | 52,22             |
| Bromonitrocenfora <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> " 0,7390:1:0,4757 |             | 72,55             | 50,53.            |

(1) Zeitschr. f. Krystallographie, 33, 604-605.

(2) Cazeneuve e Morel, Bull. Soc. chim., 44, 161 segg.

(3) V. Zepharowich, Sitzb. Akad. Wien, 82, 53; 85, 141; 91, 107. Cfr. Negri, Rivista di cristall. e miner., IX, 37-38.

$$a : b : c$$

Acido  $\beta$ . bromomesitilenico <sup>(1)</sup>: monoclinico; 1,1932:1:0,7599;  $\beta = 108,57^\circ$   
 Acido  $\beta$ . nitromesitilenico <sup>(1)</sup> " 1,1777:1:0,8131; 110,5.

Trinitromesitilene <sup>(2)</sup>: triclino;  $a:b:c = 1,0081:1:0,4958$ ;  $\alpha = 84,21^\circ$ ;  
 $\beta = 108,06'$ ;  $\gamma = 60,53'$ ;  $110:010 = 63,34'$ .

Tribromomesitilene <sup>(3)</sup>: triclino;  $a:b:c = 0,5798:1:0,4942$ ;  $\alpha = 83,19'$ ;  
 $\beta = 111,58'$ ;  $\gamma = 90,10'$ ;  $110:010 = 63,22'$ .

m. Dinitrobenzolo <sup>(4)</sup>: rombico;  $a:b:c = 0,5302:1:0,2855$

m. Cloronitrobenzolo <sup>(5)</sup>: "  $a:b:\frac{1}{2}c = 0,4975:1:0,2804$

m. Bromonitrobenzolo <sup>(5)</sup>: "  $a:b:\frac{1}{2}c = 0,4957:1:0,2774$

Anche in varî altri casi si hanno relazioni morfotropiche per quanto non così spiccate. Dopo essersi così accertati che fra derivati alogenati e nitrici, possa sussistere anche l'isomorfismo cristallografico dovevamo ricercare se essi siano in generale capaci di dare cristalli misti, poichè solo per questa via si può arrivare a conclusioni definitive; la misura cristallografica può essere decisiva solo quando conduca a risultati affermativi, mentre l'assenza di relazioni nella forma cristallina non può mai escludere la presenza di casi di isodimorfismo e la possibilità di dare cristalli misti.

Noi abbiamo quindi eseguito una serie di determinazioni crioscopiche con derivati aromatici alogenati e nitrici da cui come risultati generali, possiamo trarre le conclusioni seguenti:

1) Sciogliendo i nitroderivati nei cloro —, bromo — e jododerivati corrispondenti, si ha in generale formazione di soluzione solida caratterizzata da una anomalia assai spiccata.

2) Sciogliendo invece inversamente i derivati alogenati nei rispettivi nitrocomposti si hanno, valori assai debolmente anormali o normali addirittura.

Si deve notare che i nitroderivati fondono tutti a temperatura notevolmente più elevata dei composti alogenati corrispondenti, ciò che deve — come sempre — contribuire a rendere più spiccate le anomalie crioscopiche nel caso 1) e meno spiccate nel caso 2).

(1) Calderon, Zeitschr. f. Krystallographie, IV, 235 segg.

(2) Friedländer, Zeitschr. f. Kryst. III, 169. Cfr. Negri, l. c. 48-49.

(3) Henniges, Zeitschr. f. Kryst. VII, 524.

(4) Bodewig, Pogg. Ann. 158, 241.

(5) Bodewig, Zeitschr. f. Kryst. I, 587.

Ecco ora i risultati delle singole esperienze:

I. — *Derivati monosostituiti del benzolo.*

| Concentrazioni                                      | Abbassamenti termometrici | Pesi molecolari |
|-----------------------------------------------------|---------------------------|-----------------|
| Clorobenzolo in nitrobenzolo (p. fus. + 5°, K = 70) |                           |                 |
| $C_6H_5Cl = 112,5$                                  |                           |                 |
| 1,072                                               | 0,67°                     | 112             |
| 1,827                                               | 1,125                     | 113             |
| 3,061                                               | 1,82                      | 118             |

Bromobenzolo in nitrobenzolo

|                  |       |     |
|------------------|-------|-----|
| $C_6H_5Br = 157$ |       |     |
| 1,368            | 1,56° | 171 |
| 2,965            | 1,16  | 179 |
| 5,011            | 1,97  | 178 |

Jodiobenzolo in nitrobenzolo

|                 |        |     |
|-----------------|--------|-----|
| $C_6H_5I = 204$ |        |     |
| 1,320           | 0,425° | 217 |
| 2,361           | 0,81   | 204 |
| 4,205           | 1,39   | 211 |
| 1,397           | 0,47   | 208 |
| 3,571           | 1,18   | 211 |
| 6,026           | 1,92   | 220 |

Nessuno dei composti di questa serie è accessibile alle misure cristallografiche a causa del bassissimo punto di fusione, e per la stessa ragione nessuno dei composti alogenati si presta ad essere usato come solvente.

II. — *Derivati bisostituiti del benzolo.*

| Concentrazioni                                                                  | Abbassamenti termometrici | Pesi molecolari |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------|
| p. cloronitrobenzolo (p. fus. 83°) in p. biclorobenzolo (p. fus. 53°, K = 74,8) |                           |                 |
| $C_6H_4O_2NCl = 157,5$                                                          |                           |                 |
| 1,080                                                                           | 0,34°                     | 237             |
| 2,141                                                                           | 0,69                      | 232             |
| 3,065                                                                           | 0,94                      | 234             |

p. bromonitrobenzolo (p. fus. 126°) in p. bibromobenzolo (p. fus. 89°,  $K = 124$ )

Concentrazioni      Abbassamenti termometrici      Pesì molecolari



|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| 0,772 | 0,175 | 547 |
| 1,621 | 0,40  | 503 |
| 2,556 | 0,635 | 499 |

L'anomalia è qui delle più spiccate. Per la seconda coppia di sostanze abbiamo anche tentato di eseguire una determinazione quantitativa col metodo di van Bijlert impiegando come terza sostanza il fenolo. Quest'ultimo veniva dosato volumetricamente col metodo di Küster; il nitroderivato veniva dosato mediante una determinazione d'azoto col metodo di Dumas.

Partimmo da una soluzione contenente circa 10 % di bromonitrobenzolo ed altrettanto di fenolo; i metodi analitici impiegati e soprattutto la determinazione d'azoto non presentano una sensibilità sufficiente per ottenere il valore del coefficiente di ripartizione in modo abbastanza esatto per poterlo impiegare nella correzione dei pesi molecolari; dai risultati ottenuti tuttavia sicuro ed evidente la formazione di cristalli misti.

La forma cristallina di queste sostanze venne studiata da parecchi autori: il p.biclorobenzolo ed il p.bibromobenzolo sono fra loro isomorfi, e così pure il p.cloronitrobenzolo e il p.bromonitrobenzolo; fra le due serie non esistono però relazioni cristallografiche molto spiccate ed anche il p.dinitrobenzolo mostra una forma cristallina che si scosta notevolmente da quelle dei corpi suddetti:

$$a : b : c = \quad \beta =$$

|                                      |            |                     |        |
|--------------------------------------|------------|---------------------|--------|
| p.Biclorobenzolo <sup>(1)</sup> :    | monoclino; | 2,5193 : 1 : 1,3920 | 67,30' |
| p.Bibromobenzolo <sup>(2)</sup>      | "          | 2,6660 : 1 : 1,4179 | 67,22  |
| p.Cloronitrobenzolo <sup>(3)</sup>   | "          | 1,9577 : 1 : 1,1203 | 97,11  |
| p.Bromonitrobenzolo <sup>(3)</sup> : | "          | 1,9336 : 1 : ?      | 97,57  |
| p.Dinitrobenzolo <sup>(4)</sup> :    | "          | 2,0383 : 1 : 1,0432 | 92,18  |

Era nostra intenzione di eseguire misure crioscopiche anche sui derivati delle serie *orto* e *meta*, ma da esperienze eseguite col meta-cloronitrobenzolo e cogli orto- e meta-bromonitrobenzolo ci risultò che tutti questi corpi sono assolutamente inadatti ad essere usati come solventi a causa delle eccessive soprafusioni che essi forniscono e della lentezza estrema colla quale cristallizzano. Tra i derivati della serie *meta* esistono notevoli relazioni morfotropiche che

(<sup>1</sup>) Des Cloizeaux, Ann. chim. phys. [4], XV, 232, 255.

(<sup>2</sup>) Boeris, Gazz. chim. ital. 1900, II, 131.

(<sup>3</sup>) Fels, Zeitschr. f. Kryst. 32, 412.

(<sup>4</sup>) Bodewig, Pogg. Ann. 158, 239-241.

noi abbiamo posto in rilievo più sopra; per quelli della serie *orto* non si hanno misure.

III. — *Derivati monosostituiti del toluolo.*

Concentrazioni      Abbassamenti termometrici      Pesì molecolari  
p.Nitrotoluolo (p.fus. 54°) in p.bromotoluolo (p. fus. 28, K = 82)  
 $C_7H_8O_2N = 137$

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| 0,967 | 0,47° | 169 |
| 2,045 | 0,97  | 173 |
| 2,965 | 1,41  | 172 |

p.Nitrotoluolo (p.fus. 54°) in p.jodotoluolo (p.fus. 34°, K = 100)

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| 1,217 | 0,66° | 186 |
| 2,376 | 1,20  | 198 |
| 3,516 | 1,77  | 198 |
| 1,274 | 0,67  | 190 |
| 2,420 | 1,16  | 208 |
| 3,537 | 1,72  | 205 |

Dei tre corpi studiati solamente il p.nitrotoluolo venne caratterizzato cristallograficamente.

IV. — *Derivati dell'acido benzoico.*

Concentrazioni      Abbassamenti termometrici      Pesì molecolari  
p. Nitrobenzoato metilico (p. fus. 96°) in p. bromobenzoato metilico  
(p.fus. 81°, K = 84)  
 $C_8H_7O_4N = 181$

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| 1,225 | 0,49° | 210 |
| 2,237 | 0,94  | 200 |
| 3,222 | 1,36  | 199 |

Speriamo di poter comunicare presto i risultati delle misure cristallografiche di queste due sostanze.

V. — *Derivati della naftalina*

Concentrazioni      Abbassamenti termometrici      Pesì molecolari  
 $\alpha$ . Bromonaftalina (p. fus. 5°) in  $\alpha$ . nitronaftalina (p. fus. 61°, K = 91)  
 $C_{10}H_9Br = 207$

|       |       |     |
|-------|-------|-----|
| 1,284 | 0,55° | 212 |
| 2,925 | 1,23  | 216 |
| 4,058 | 1,67  | 221 |

Era nostra intenzione di ripetere l'esperienza invertendola e sciogliendo cioè la nitronaftalina nella bromonaftalina. Quest'ultimo corpo presenta però la proprietà di dare soprafusioni così enormi e persistenti, che l'impiegarla come solvente crioscopico diventa assolutamente impossibile.

Le misure cristallografiche non possono servire in questa serie perchè i derivati alogenati sono liquidi a temperatura ordinaria.

Esperimentammo poi sui derivati nella serie  $\beta$  sciogliendo la  $\beta$ .nitronaftalina nei composti alogenati corrispondenti:

| Concentrazioni                                                                            | Abbassamenti termometrici | Pesi molecolari |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------|
| $\beta$ .Nitronaftalina (p.fus. 79°) in $\beta$ .cloronaftalina (p.fus. 54°, $K = 97,6$ ) |                           |                 |
| $C_{10}H_7O_2N = 173$                                                                     |                           |                 |

|       |      |     |
|-------|------|-----|
| 1,066 | 0,50 | 208 |
| 1,982 | 0,90 | 215 |
| 2,959 | 1,27 | 228 |

$\beta$ .Nitronaftalina in  $\beta$ .bromonaftalina (p. fus. 59°,  $K = 124$ )

|       |      |     |
|-------|------|-----|
| 0,852 | 0,51 | 207 |
| 1,632 | 0,98 | 208 |
| 2,505 | 1,48 | 210 |

$\beta$ .Nitronaftalina in  $\beta$ .jodionaftalina (p.fus. 54°,  $K = 150$ )

|       |      |     |
|-------|------|-----|
| 0,539 | 0,47 | 172 |
| 1,147 | 1,01 | 170 |
| 1,939 | 1,66 | 175 |

Il comportamento completamente normale della  $\beta$ .nitronaftalina nella jodionaftalina rappresenta la sola eccezione da noi trovata alle regole enunciate più sopra. Facciamo notare che la  $\beta$ .jodionaftalina per il suo punto di fusione si scosta dalle regolarità che si osservano in generale nei valori di tali costanti fisiche pei composti alogenati.

Le misure cristallografiche mancano completamente in questa serie e noi ci proponiamo di farle eseguire.

Noi abbiamo in corso altre esperienze su altre sostanze e completeremo quelle qui descritte, determinando completamente le curve di congelamento di alcune coppie di sostanze; i risultati dettagliati saranno esposti più tardi nella Gazzetta chimica, come pure tutti i dettagli relativi alla determinazione delle costanti molecolari di abbassamento dei singoli solventi impiegati qui per la prima volta.

Dai risultati ottenuti si può dedurre però in modo sicuro che fra gli atomi e gruppi isomorfogeni della I<sup>a</sup> serie (corpi organici) (1) agli alogeni ed al cianogeno deve essere aggiunto il residuo nitrico NO<sub>2</sub> il quale nei composti aromatici funziona in genere come isomorfogeno o come isodimorfogeno cogli alogeni.

**Mineralogia.** — *Sopra alcuni minerali del granito di Montorfano* (2). Nota di E. TACCONI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Mentre il granito di Baveno fu sempre ed è tuttora oggetto di accurate ricerche da parte dei mineralisti, tanto che si conosce una lunga serie di minerali trovati in quella località, la massa granitica di Montorfano, che pur dista di pochi chilometri da quella di Baveno, pare sia stata trascurata, poichè tutto quanto si conosce di sicuro sui minerali in essa contenuti, lo dobbiamo ad alcune brevi Note del prof. Strüver, la più recente delle quali data dal 1871 (3). D'allora in poi nessuno, che io mi sappia, si è mai occupato in modo particolare dal punto di vista mineralogico di detto granito.

Può nascere il dubbio che alcuni autori abbiano compreso sotto l'unica denominazione *Baveno*, anche il giacimento di Montorfano, ma questa supposizione sembrami poco probabile, perchè gli autori che effettivamente estesero le loro ricerche anche alla massa granitica di Montorfano distinsero le due località (es.: Barelli (4), Strüver (5), Jervis (6)).

È bensì vero che nel granito di Montorfano non si trovano numerose quelle geodi, tappezzate da vistosi cristalli di quarzo e di feldispato, abbastanza frequenti a Baveno, che invogliano anche i cavatori a raccogliarle ed a conservarle; ma ricercando attentamente sulle superfici di litoclasti, piuttosto comuni a Montorfano, dove la roccia assume carattere alquanto pegmatitico, non è raro trovare cristalli ben conformati di quarzo e di feldispato,

(1) G. Bruni, *Ueber feste Lösungen*, Ahrens's Sammlung, pag. 40.

(2) Lavoro eseguito nel Gabinetto mineralogico della R. Università di Pavia.

(3) G. Strüver, *Minerali dei graniti di Baveno e di Montorfano*. Atti R. Acc. delle Scienze, Torino 1866, pag. 395; *Sopra alcuni minerali italiani*. Atti soprac. Torino 1867, pag. 123; *Note mineralogiche*, Atti soprac. Torino 1871, pag. 368.

(4) V. Barelli, *Cenni di statistica mineralogica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna*. Torino 1865.

(5) G. Strüver, op. cit.

(6) G. Jervis, *I tesori sotterranei dell'Italia*. Torino 1873. A pag. 183 della *parte prima* sono citati fra i minerali di Montorfano, oltre quelli trovati dallo Strüver, anche l'*apatite* e l'*anfibolo*. Ma siccome sopra questi minerali non si hanno altre notizie, nè anteriori nè posteriori, credo che tale presenza, come ben a proposito il prof. Artini dice per alcuni minerali di Baveno (*Osservazioni sopra alcuni minerali del granito di Baveno*. Questi Atti 1902, vol. XI, II), debba essere nuovamente confermata prima di poterla ammettere con certezza.

spesso accompagnati da altri minerali. Ed appunto in una gita compiuta alle cave di Montorfano sullo scorcio del passato anno, fui tanto fortunato di raccogliere non soltanto campioni dei minerali già citati dal prof. Strüver, ma di constatare anche la presenza di altre interessanti specie minerali, per cui mi sembra che il granito di Montorfano abbia ad acquistare nuova importanza quale giacimento mineralogico.

I minerali già conosciuti, oltre quelli costituenti la roccia sono i seguenti: albite, laumontite, cabasite, stilbite, calcare, pirite, pirrotina ed arsenopirite. A questi posso ora aggiungerne altri tra cui la *gadolinite*, la *tormalina* e la *fluorite*.

In questa breve Nota preventiva mi limiterò a riferire soltanto le più importanti osservazioni fatte, riserbandomi di dare una completa descrizione dei minerali di Montorfano a quando ulteriori ricerche, avranno messo a mia disposizione una maggior copia di materiale.

Accenno innanzi tutto alla *gadolinite*, della quale raccolsi un unico esemplare costituito da un cristallo alquanto deformato, compreso in una massa quarzoso-feldispatica, dalla quale potei quasi completamente isolarlo con non poche difficoltà.

Sulle faccie, contorte e striate, ha colore bruno-nero con lucentezza tendente alla metallica, mentre sulle fratture fresche il colore è verde-olivo carico, con lucentezza tra la vitrea e la grassa. In complesso è freschissimo, solo si presenta alquanto alterato alla periferia.

Data la piccolezza del campione, non potei eseguirne l'analisi chimica, e solo dovetti limitarmi a ricerche per le quali occorresse una piccolissima quantità di sostanza.

Mediante un frammentino immerso nel liquido di Rohrbach, potei constatarne l'elevato peso specifico, certamente superiore a 3,5, poichè il minerale precipitava rapidamente al fondo della provetta contenente il liquido di Rohrbach.

In causa della mancanza di sfaldatura non si poterono avere buone lamine per le osservazioni microscopiche, però facilmente si potè constatare che la *gadolinite* di Montorfano è birifrangente biassica, con carattere ottico probabilmente positivo ed angolo degli assi ottici molto grande. I granuli non troppo piccoli hanno colore verde-olivo, quelli minutissimi sono leggermente giallognoli od incolori; il pleocroismo è debolissimo. I frammentini di minerale alterato si presentano invece colorati nettamente in bruno-giallastro, anch'essi però con pleocroismo appena sensibile.

Con un preparato in joduro di metilene osservai che gli indici di rifrazione del minerale erano in ogni frammentino notevolmente superiori a quelli del liquido ( $n = 1,729$  per luce rossa,  $1,738$  per luce verde e  $1,775$  per luce azzurro-indaco a  $15^\circ$  <sup>(1)</sup>); in un frammento pressochè nor-

(1) Questi indici vennero determinati col metodo della deviazione minima per colori rosso, verde ed azzurro-indaco dati da un vetro di cobalto fortemente colorato.

male ad un asse ottico potei constatare ciò esattamente per  $n_m$ . Il potere rifrangente deve quindi essere assai elevato poichè, usando del metodo di Schroeder van der Kolk (1), non si osservò mai i bordi colorati intorno ai granuli, indicanti che, almeno per uno dei colori dello spettro, vi ha coincidenza fra indici del minerale ed indice del liquido. Se ora si pone mente alla fortissima dispersione dello joduro di metilene si deve concludere che tutti gli indici di rifrazione del minerale sono per lo meno più elevati di 1,775. Ciò concorda coi dati di Levy-Lacroix (2) e di Rosenbusch (3), i primi dei quali danno per  $n_p$  ed il secondo per  $\frac{n_p + n_m + n_g}{3}$  un valore maggiore di 1,78.

La parte di minerale alterata mostra caratteri alquanto diversi, specialmente la rifrangenza che è inferiore ai valori citati.

Tutti i caratteri sopradetti concordano con quelli dei campioni di gadolinite esistenti nel Museo mineralogico dell'Università di Pavia.

Per assicurarmi maggiormente che il minerale in questione fosse gadolinite, ho creduto opportuno di tentare qualche prova microchimica, facendo saggi paralleli anche con gadolinite di Ytterby e di Fahlun, per la determinazione dell'ittrio, secondo le indicazioni di Haushofer (4) e di Behrens (5). I risultati si mostrarono perfettamente concordi ed, in complesso, analoghi a quelli ottenuti con una soluzione molto diluita di nitrato d'ittrio.

Da tutti i risultati ottenuti nelle suesposte ricerche, credo di non poter più dubitare nello stabilire che il minerale sia effettivamente gadolinite.

*Tormalina.* — Si presenta in masserelle di color verde-cupo, bruno o nero, con lucentezza vitrea, comprese di preferenza in una massa feldispatica, accompagnata da quarzo, fluorite in piccola quantità, mica muscovite e clorite. Si osservano anche cristalli molto allungati secondo l'asse  $z$ , senza terminazione, compressi parallelamente all'allungamento, talvolta rotti o contorti, quasi avessero subito una forte pressione. In causa di ciò e dall'essere i cristalli fortemente striati parallelamente agli spigoli del prisma, è impossibile alcuna misura geometrica.

Il peso specifico di questa tormalina, che determinai colla bilancia di Westphal e una soluzione di joduro di metilene, è piuttosto elevato; la media di parecchie determinazioni risultò di 3,24 a 14°.

(1) Schroeder van der Kolk, *Tabellen zur mikroskopischen Bestimmung der Mineralien nach ihrem Brechungsindex*. Wiesbaden 1900.

(2) Levy-Lacroix, *Les minéraux des roches*, Parigi 1888, pag. 214.

(3) H. Rosenbusch, *Hülftabellen zur mikroskopischen Mineralbestimmung*. Stuttgart 1888.

(4) K. Haushofer, *Mikroskopische Reactionen*. Brunsvich 1885.

(5) H. Behrens, *Mikrochemischen Analysen*. Amburgo e Lipsia 1895.

Al microscopio potei osservare il pleocroismo:

$\varepsilon$  = bruno-chiaro fino a incolore;

$\omega$  = bleu sporco fino a bruno-cupo.

Gli indici di rifrazione sono assai elevati; da osservazioni fatte a luce monocromatica ( $N_a$ ) ebbi:

$\varepsilon = 1,633$  circa ( $\alpha$  monobromonaft. in miscela con essenza di cannella —  $14^\circ$ )  $N_a$ ;

$\omega \approx 1,658$  (monobromonaftalina —  $14^\circ$ )  $N_a$ .

Per  $\varepsilon$  i bordi colorati che si osservano a luce bianca col metodo di Schroeder van der Kolk, dimostrano che per uno dei colori dello spettro vi è identità di rifrazione fra liquido e minerale. Questo colore, come dimostra l'osservazione fatta a luce monocromatica, deve essere vicino al giallo.

*Fluorite*. — È piuttosto rara ed accompagna generalmente la tormalina; si presenta in piccoli cubi perfettamente incolori, oppure leggermente colorati in verde-bluastrò od in giallognolo.

I campioni dei minerali da me raccolti non sono certamente vistosi come quelli che si trovano a Baveno, però spero che anche a Montorfano si potranno raccogliere belli esemplari, ed a ciò sono portato dal fatto che raccolsi in questa località uno splendido cristallo di feldispato, di dimensioni abbastanza ragguardevoli.

I caratteri che ho potuto determinare (indici di rifrazione e specialmente la geminazione caratteristica e l'estinzione positiva di  $15^\circ$ ) sopra parecchie lamine di sfaldatura secondo (001) le fanno riconoscere per *microclino*; però altre lamine presentano caratteri diversi, ma la profonda alterazione non mi permise di compiere altre ed esatte ricerche per la loro precisa e sicura determinazione; da ciò risulta però che si tratta di un accrescimento regolare di microclino con un altro feldispato.

Il cristallo è un geminato tipico di Baveno, di colore perfettamente bianco, allungato secondo l'asse  $x$  e misura mm.  $50 \times 23 \times 23$ ; ciascun individuo risulta dalla combinazione  $\{010\}$ ,  $\{110\}$ ,  $\{021\}$  e  $\{\bar{1}11\}$ . Certamente non è un esemplare che possa reggere il confronto cogli splendidi geminati di microclino roseo del granito di Cala Francese dell'Isola Maddalena, raccolti e studiati dal dott. Riva, però ho creduto opportuno di ricordarlo perchè non credo che neanche a Baveno siano molto frequenti i cristalli di feldispato così perfetti e di tali dimensioni. Inoltre sono anche interessanti le sue condizioni di giacitura. Trovasi immerso in una massa pulverulenta, costituita quasi esclusivamente da laumontite, in piccola parte ancora fresca ed in cristalli di abito prismatico, e nel resto alterata e pressochè farinosa. In questa massa zeolitica, oltre al microclino, si trovano grossi romboedri di calcite e cristalli di quarzo abbastanza voluminosi, i quali presentano il

fenomeno interessante di essere finamente fessurati e fratturati, per cui facilmente si sgretolano e vanno in frantumi.

Innanzi di chiudere questa breve Nota accennerò anche alla probabile presenza di un altro minerale in questa località, minerale che finora, credo, non sia ancora noto a Baveno.

In una piccola geodina, immersi in prodotti di alterazione cloritici, pulverulenti, rinvenni, associati a numerosissimi cristallini di laumontite ed a poca stilbite, quattro minutissimi cristalli, con abito prismatico, di un minerale che mi pare possa essere *baritina*. Infatti dal prodotto della fusione di un paio di cristallini polverizzati, con carbonato alcalino, ottenni la reazione del bario e dell'acido solforico; le misure però conducono a risultati che mi sembrano alquanto strani, cosicchè credo prudente aspettare quando avrò raccolto maggior copia di materiale, prima di dare per certa la presenza di questo minerale nelle cave di granito di Montorfano.

Botanica. — *La nutrizione dell'embrione delle Cucurbita operata per mezzo del tubetto pollinico*. Nota del dott. B. LONGO, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Dopo che lo Schacht nel 1855 <sup>(1)</sup> ebbe messo in evidenza che nel *Tropaeolum majus* il sospenditore dell'embrione fuoresce dall'ovulo ed ebbe veduto in questo fatto la possibilità di uno speciale modo di presa di materiali nutritizi per il giovane embrione, sono comparsi soltanto pochi altri lavori mettenti in luce dei fatti analoghi, altri casi cioè in cui la nutrizione dell'embrione non si compie nel modo ordinario. Ricordo a questo proposito le interessanti ricerche del Treub <sup>(2)</sup>, il quale diede la dimostrazione che in certe Orchidee il sospenditore dell'embrione, che fuoresce dal micropilo, va ad attingere materiali nutritizi per l'embrione dal funicolo e dalla placenta. Lo stesso autore <sup>(3)</sup> stabilì inoltre che nell'*Avicennia officinalis* la presa di sostanze nutritizie per l'embrione viene operata da una cellula speciale (*cotiloide*), che, partendo dal sacco embrionale, penetra, ramificandosi, nei tessuti dell'ovulo e della placenta. Ricordo ancora che la Balicka-Iwanowska <sup>(4)</sup>

(1) Schacht H., *Ueber die Entstehung des Keimes von Tropaeolum majus*. Bot. Zeit. 13 Jahrg. (1855), pag. 641. [Trad. in Ann. d. Sc. Nat. (Bot.) Sér. IV, T. IV, 1855, pag. 47].

(2) Treub M., *Notes sur l'embryogénie de quelques Orchidées*. Verhand. d. Kon. Akad. v. Wetensch. (Natuurk). Dl. XIX, Amsterdam, 1879; *Notes sur l'embryon, le sac embryonnaire et l'ovule*. Ann. d. Jard. Bot. d. Buitenzorg. Vol. III (1883), pag. 76-79.

(3) Treub M., *Notes sur l'embryon* ecc., op. cit. pag. 79-85.

(4) Balicka-Iwanowska G., *Contribution à l'étude du sac embryonnaire chez certains Gamopétales*. Flora, Bd. 86 (1899) pag. 47.

illustrò il caso presentato da parecchie piante, specialmente *Scrophulariaceae*, in cui dal sacco embrionale partono degli austori, quasi esclusivamente di origine endospermica, i quali vanno ad attingere da speciali tessuti sostanze nutritizie per l'embrione.

Nel dicembre dell'anno testè decorso in una Memoria sulle *Cucurbitaceae* <sup>(1)</sup> da me presentata alla R. Accademia dei Lincei, scrissi come alcuni fatti da me osservati studiando il percorso del tubetto pollinico nelle *Cucurbita* mi avessero indotto ad ammettere che, con tutta probabilità, il tubetto pollinico in queste piante avrebbe anche avuta la funzione di coadiuvare alla nutrizione dell'embrione. Era quindi naturale che io continuassi le ricerche in proposito allo scopo di stabilire, con la maggiore sicurezza possibile, fino a qual punto il tubetto pollinico di queste piante avesse importanza per la nutrizione dell'embrione. Le ricerche fatte sopra ovuli fecondati della *Cucurbita Pepo* Lin. e della *C. foetidissima* H. B. et K. (delle quali soltanto mi son trovato fissato il materiale occorrente) in stadi di sviluppo più avanzati che non quelli che avevo esaminati allora, non solo hanno confermato quanto allora avevo ammesso, ma mi hanno anzi condotto a stabilire che l'importanza del tubetto pollinico nella nutrizione dell'embrione in queste piante è di gran lunga maggiore di quello che io non avessi allora creduto.

Non ritorno sulle particolarità di struttura dell'ovulo, nè sulle modalità del percorso del tubetto pollinico nelle *Cucurbita*, poichè me ne sono già occupato diffusamente nel mio precedente lavoro su ricordato, nel quale appunto ho principalmente trattato del percorso che il tubetto pollinico segue nelle *Cucurbitaceae* in rapporto anche con la speciale struttura dell'ovulo. Credo tuttavia opportuno ricordare che nelle *Cucurbita*, penetrato nel collo della nucella e giunto alla base di esso, il tubetto pollinico si rigonfia in una bolla di diametro considerevole, maggiore anche di quello del sacco embrionale e dalla quale bolla partono dei rami a fondo cieco più o meno sviluppati, spesso anche più o meno ramificati, che, traforata la nucella e il tegumento interno, scorrono fra i due tegumenti penetrando anche frequentemente in quello esterno e mettendosi così in stretto rapporto con gli strati più interni del tegumento esterno. Questi strati interni si differenziano da quelli più esterni — e la differenziazione diventa sempre più marcata mano a mano che procede la trasformazione dell'ovulo in seme — per essere costituiti da elementi ricchi di contenuto plasmatico ed anche di amido. L'amido però, abbondante verso la base della nucella, va riducendosi fin quasi a scomparire mano a mano che si sale verso il collo di essa, dove, in corrispondenza cioè della bolla, questi strati ricchi di contenuto diventano più nu-

(1) Longo B., *Ricerche sulle Cucurbitaceae ed il significato del percorso intercellulare (endotropico) del tubetto pollinico.*

merosi. Altro carattere differenziale è che in questi strati interni gli elementi sono a contatto e con pareti che si presentano sempre di cellulosi anche nei semi maturi, mentre negli strati sovrastanti le pareti si lignificano presentandosi più o meno spesse e con sculture a reticolo ed in altro modo e gli elementi lasciano fra loro spazi intercellulari più o meno ampi. Questi fatti insieme con l'altra osservazione dell'abbondante contenuto trovato sempre sia nella bolla, sia nei rami emananti da essa, sono appunto quelli che, come già dissi nel mio lavoro su citato, mi avevano già allora indotto ad ammettere che vi doveva essere uno stretto rapporto fra la nutrizione dell'embrione ed il tubetto pollinico.

Ma, come ho su detto, nuovi fatti interessanti e convincenti sono venuti fuori dalle mie ulteriori ricerche. Dirò anzi tutto che il fascio vascolare, che penetra pel funicolo nell'ovulo e che si conserva indiviso, giunto in corrispondenza della calaza non si arresta nè si sfiocca, ma continua ininterrotto il suo percorso nella parte del tegumento esterno che non è unita al funicolo per terminare in essa all'altezza dell'apice della nucella. Esso si presenta inoltre in rapporto con gli strati interni su ricordati del tegumento esterno.

I fatti più interessanti però dal nostro punto di vista si osservano nella nucella. Già presto, dopo avvenuta la fecondazione, le pareti esterne delle cellule epidermiche della nucella, al di sotto della bolla, cominciano a cutinizzarsi e questa cutinizzazione presto si estende all'ingiù a tutta la epidermide della nucella. Questa cutinizzazione è molto marcata, presentandosi la cuticola non solo spessa, ma penetrando a mo' di cuneo nelle pareti radiali. Inoltre ancor più notevole è il fatto che alla base della nucella, cioè in corrispondenza della regione calaziale, le pareti cellulari si suberificano qualche tempo dopo avvenuta la fecondazione in modo da venire a costituire una specie di calotta: nella *Cucurbita foetidissima* H. B. et K. questa suberificazione è già differenziata quando ancora l'embrione è allo stato di sfera. Anche l'embrione allo stato di sfera si presenta cutinizzato alla superficie, salvo che nella parte per la quale è in rapporto col tubetto pollinico.

Mentre si osservano tutti questi fatti, il tubetto pollinico con la bolla ed i suoi rami si conserva sempre pervio, a pareti sempre di cellulosi, sempre ricco di contenuto plasmatico e talora anche di amido transitorio. Nel seme maturo il tubetto pollinico non presenta più contenuto, come pure svuotati si presentano gli elementi degli strati interni del tegumento esterno. Tuttavia non ho potuto, per ora, stabilire con quale stadio di sviluppo dell'embrione coincida lo svuotamento del tubetto pollinico, mancandomi appunto nel materiale che mi trovo a disposizione gli stadi che precedono la maturità del seme.

Se ora colleghiamo fra loro tutti questi fatti morfologici su descritti risulta come logica conseguenza che la corrente trofica non può giungere all'embrione in via di sviluppo per la via ordinaria, vale a dire attraverso la regione calaziale della nucella, a causa della suberificazione di essa. Nè può giungervi attraverso gli altri punti del ventre della nucella, a ciò opponendosi la marcata cutinizzazione delle pareti esterne delle sue cellule epidermiche. Unico punto pervio è la base del collo della nucella ove appunto si trova la bolla con i suoi rami a fondo cieco e quel piccolo tratto del tubetto pollinico che collega la bolla medesima col sacco embrionale. Dagli stretti rapporti poi esistenti fra i rami a fondo cieco emananti dalla bolla e gli strati interni ricchi di sostanze plastiche del tegumento esterno — strati, che appunto in corrispondenza della bolla diventano più numerosi — risulta inoltre che la corrente trofica, che affluisce per mezzo del tubetto pollinico al sacco embrionale, proviene da questa parte interna del tegumento esterno, che possiamo chiamare *nutritizia* e che a sua volta viene nutrita dal fascio vascolare.

Di più se si considera che quella parte del tubetto pollinico, che è in relazione col tessuto conduttore, si presenta fornita di contenuto anche alquanto tempo dopo avvenuta la fecondazione, possiamo dedurre che anche questo tratto del tubetto pollinico coadiuvi al trasporto di materiali nutritizi al sacco embrionale.

Ciò posto, basandoci sull'interpretazione data ai fenomeni su descritti, possiamo spiegarci alcuni altri fatti, di cui già parlai nella mia Memoria su ricordata: perchè, per esempio, il tessuto conduttore sia così spesso nelle *Cucurbita*; perchè il diametro del tubetto pollinico sia molto grande in confronto di quello dei nuclei riproduttivi; perchè la bolla prodotta dal tubetto pollinico sia così grande <sup>(1)</sup> da essere spesso persino visibile ad occhio nudo; e possiamo anche dire che i rami a fondo cieco che si dipartono dalla bolla e che a tutta prima avrebbero potuto interpretarsi come semplici tentativi fatti dal tubetto pollinico prima di trovare la via per giungere al sacco embrionale, hanno invece tutt'altro significato fisiologico: il tubetto pollinico non solo rende possibile la fecondazione, ma mandando questi rami — come austeri di una pianta parassita — a sfruttare dei tessuti nutritizi, assicura anche lo sviluppo del prodotto stesso della fecondazione.

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente BLASERNA dà il doloroso annuncio della morte del Corrispondente prof. EUSEBIO OEHL, avvenuta il 5 aprile 1903; apparteneva il defunto all'Accademia sino dal 16 luglio 1897.

(1) Nella *Cucurbita Pepo* Lin. ho trovato che il suo diametro può raggiungere i 164  $\mu$ .

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci RIGHI, TARAMELLI, BECCARI, PASCAL, LOCKYER, PFLUEGER e PICKERING; fa inoltre menzione di alcune Note autobiografiche di Jac. Berzelius pubblicate, per cura dell'Accademia delle scienze di Stoccolma, dal sig. SÖDERBAUM.

Il Corrispondente G. GRASSI fa omaggio d'una sua pubblicazione intitolata: *Effetti della dispersione e della reattanza nel funzionamento dei trasformatori. Metodi di misura ed applicazioni.*

## AFFARI DIVERSI

All'aprirsi della seduta, il Vicepresidente BLASERNA annunzia che sono presenti gli onorevoli Ministri della Pubblica Istruzione e delle Poste e Telegrafi.

Durante la seduta giunge GUGLIELMO MARCONI, che il Vicepresidente presenta all'Assemblea e che è accolto con vivi applausi dai Soci e dal pubblico.

Il Vicepresidente BLASERNA gli dà il benvenuto; dice che l'Accademia non sarebbe la sede adatta per una conferenza, perchè essa raccoglie soltanto e pubblica le cose nuove. Domanda tuttavia al sig. Marconi se sia disposto a fare una comunicazione concernente le ultime sue esperienze eseguite a Poldhu, sulla sintonia.

Il sig. Marconi ringrazia l'Accademia della sua accoglienza e risponde di essere ben lieto di soddisfare al desiderio espresso dal Vicepresidente, per quanto la ristrettezza del tempo glie lo consente. Egli entra in molti particolari relativi alle ultime esperienze da lui eseguite a Poldhu, e su domanda del Vicepresidente spiega anche le ragioni della forma data ai suoi impianti ultrapotenti.

Il Vicepresidente ringrazia il sig. Marconi a nome dell'Accademia, e rileva con piacere che l'importante questione della sintonia può ritenersi felicemente risolta.

## CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

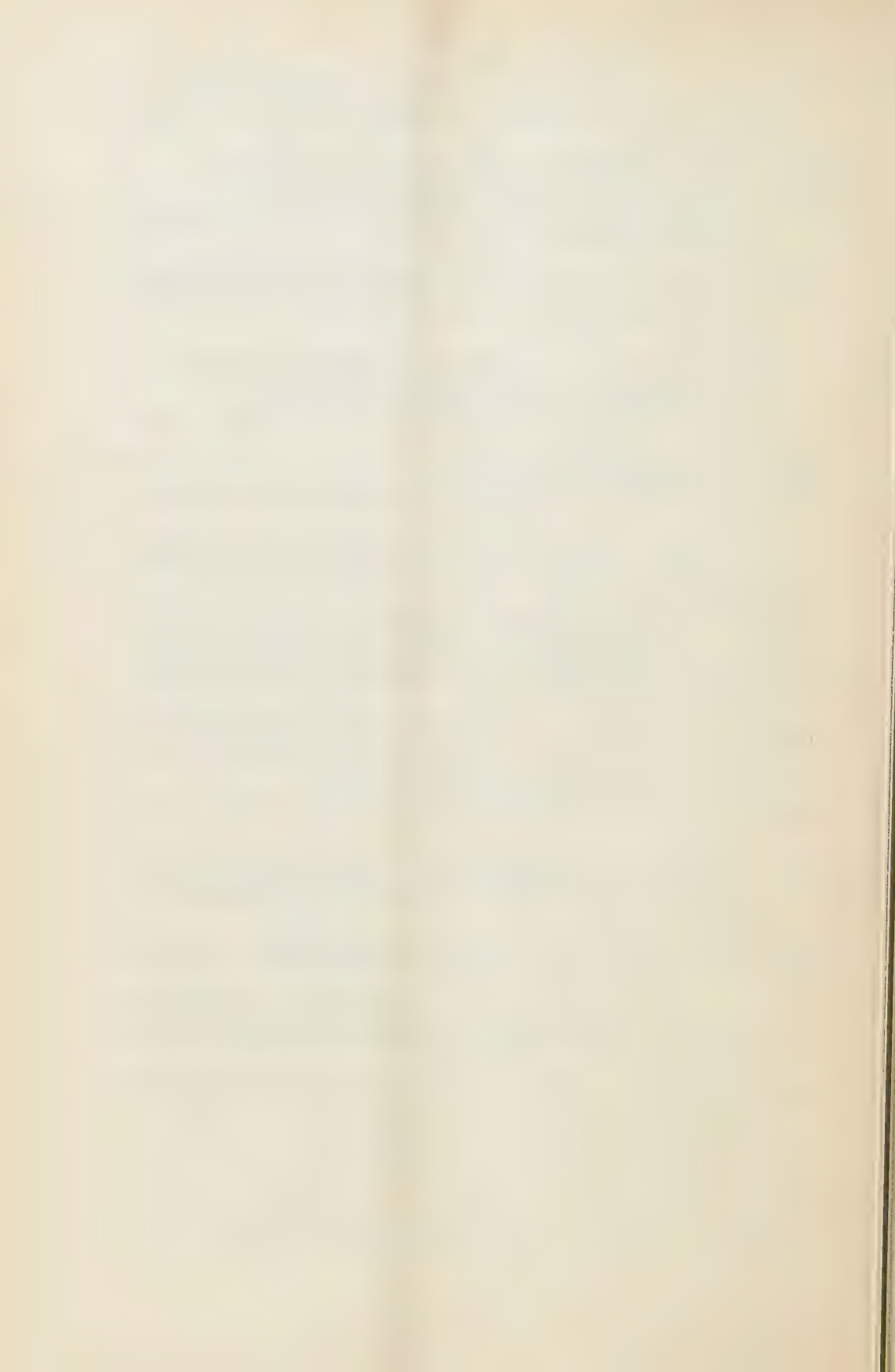
La R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società Khédiviale di geografia del Cairo; la R. Società geologica di Amsterdam; la Società geologica di Sydney; la Società australiana per l'avanzamento della scienza; il Museo di scienze ed arti dell'Università di Pensilvania; le Università di Upsala e di Tokyo.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA  
*presentate nella seduta del 3 maggio 1903.*

- Studi fisico-chimici sul sangue. — Clinica medica generale di Padova diretta da Achille De Giovanni. Lavori dell'Istituto. Vol. primo. Padova, 1903. 8°.
- Minnesfesten öfver Berzelius den 7 Oktober 1898. Stockholm, s. a. 8°.
- Osservazioni meteoriche fatte nel R. Osservatorio di Capodimonte nell'anno 1902, s. l. ed a. 8°.
- University of Colorado. Quarto-centennial Celebration. Colorado, 1902. 8°.
- Abderhalden E.* — Darstellung von Harnstoff durch Oxydation von Eiweiss mit Permanganat nach A. Jolles (Recens). Strassburg, 1903. 8°.
- Id.* — Hydrolyse des Edestins. Strassburg, 1903. 8°.
- Id.* — Hydrolyse des kristallisirten Serumalbumins aus Pferdeblut. Strassburg, 1903. 8°.
- Id.* — Hydrolyse des kristallisirten Oxyhämoglobins aus Pferdeblut. Strassburg, 1903. 8°.
- Ahlenius K.* — Ångermanälvens flodområde. Uppsala, 1903. 8°.
- Alberti V.* — Su la determinazione grafica dell'orbita reale nella teoria delle stelle doppie. Napoli, 1903. 8°.
- Bargagli P.* — Adolfo Targioni Tozzetti. Ricordi. Firenze, 1903. 8°.
- Beccari O.* — L'Istituto di Studi superiori di Firenze, la chiusura del Museo Botanico e le sue peripezie. Rocca S. Casciano, 1903. 8°.
- Bertelli A.* — Ricerche d'areonautica. (Brescia), 1903. 8°.
- Berzelius Jac.* — Själfbiografiska Anteckningar. Utgifna af Kongl. Svenska Vetenskapsakademien genom H. G. Söderbaum. Stockholm, 1901. 8°.
- Brédikhine Th.* — Sur le rôle de Jupiter dans la formation des radiants simples. s. l. 1903. 8°.
- Ceresole Giulio.* — Della necessità di modificare il sistema di Pulizia Stradale di Venezia in riguardo all'igiene. Venezia, 1903. 8°.
- Colomba L.* — Cloromelanite e Pirosseni cloromelonitoidi. Padova, 1903. 8°.
- Id.* — Zeoliti dell'Isola del Principe Rodolfo, Osservazioni. Milano, 1903. 8°.

- Contarino F.* — Determinazioni assolute dell'Inclinazione magnetica nel R. Osservatorio di Capodimonte, eseguite negli anni 1898, 1899 e 1900. Napoli, 1902. 8°.
- Décombe L.* — La Compressibilité des Gaz réels. Paris, 1903. 8°.
- Dunér N. C.* — Tal Vid K. Vetenskaps-Akademiens Minnesfest den 24 Oktober 1901 trehundraärsdagen af Tycho Brahes död Stockholm, 1903. 8°.
- Grassi G.* — Effetti della dispersione e della reattanza nel funzionamento dei trasformatori. — Metodi di misura ed applicazioni. Memoria. Torino, 1903. 8°.
- Lockyer N. and W. J. S.* — The Relation between Solar Prominences and Terrestrial Magnetism (Proceed. of the R. Society, vol. 71).
- Pascal E.* — Eugenio Beltrami (Sonderabdruck aus Mathem. Annalen. LVII Band. 1 Heft . . .). Leipzig,
- Pflüger E.* — Glykogen. Bonn, 1903. 8°.
- Pickering E.* — A plan for the endowment astronomical research. Cambridge, 1903. 8°.
- Попова. Н. М — Шесть лекцій о прогрессивномъ параличѣ помѣшанныхъ. Казань, 1901. 9°.
- Reynolds O.* — The Sub-Mechanics of the Universe. Cambridge, 1903. 8°.
- Righi A.* — Il moto dei ioni nelle scariche elettriche. Bologna, 1902.
- Id.* — Sulla ionizzazione dell'aria prodotta da una punta elettrizzata. Memoria, Bologna, 1903. 8°.
- Sinigaglia F.* — Prolusione al Corso di Tecnologia meccanica nella Sezione Industriale della R. Scuola d'applicazione per gl'ingegneri di Napoli, letta nel giorno 2 marzo 1903. Napoli 1903, 4°.
- Taramelli T.* — Di alcune sorgenti nella Garfagnana e presso Gorizia. Milano, 1903. 8°.
- Id.* — Risposte ad alcuni quesiti della spettabile Amministrazione civica della città di Gorizia, riguardante il provvedimento dell'acqua potabile. Pavia, 1903. 8°.
- Teiro* — La guarigione della tubercolosi polmonare in tutti gli stadi. Acqui, 1903. 8°.
- Viola C.* — Die Minimalablenkungen des Lichtes durch doppeltbrechende Prismen und die Totalreflexion der optisch zweiaxigen Kristalle. Leipzig, 1903. 8°.
- Willcocks W.* — The restoration of the ancient irrigation works on the Tigris, or the re-creation of Chaldea. Cairo, 1893. 8°.

V. C.







# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

~~~~~  
Seduta del 17 maggio 1903.

P. VILLARI, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla costruzione dei simboli a carattere invariante nella teoria delle forme differenziali di ordine qualunque.* Nota II del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Nella teoria invariante delle forme differenziali di una determinata specie si presentano sempre certe espressioni, più o meno complesse, formate mediante i coefficienti della forma e le loro derivate, e che hanno un'importanza fondamentale, tale che può quasi dirsi che è intorno ad esse e alle loro relazioni che si svolge e si aggira tutta la teoria. Così, per le forme pfaffiane tali espressioni sono quelle che si rappresentano col noto simbolo (i, j) , per le ordinarie forme differenziali quadratiche esse si riducono ai simboli di Christoffel, e infine per il caso più generale delle forme differenziali di 2° ordine, esse sono state da me trovate e studiate in varî sensi nei parecchi lavori che ho su questo argomento pubblicato negli ultimi tempi.

La presente Nota, che fa seguito all'altra da me pubblicata recentemente in questi medesimi Rendiconti ⁽¹⁾, ha per iscopo di costruire e studiare siffatte espressioni per il caso generale delle forme differenziali di ordine qualsiasi.

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei (5), t. XII, 1903, pagg. 325-332.

di cui però la (3) è in sostanza la stessa della (2) quando vi si faccia uno spostamento di termini e un mutamento di nomi agli indici.

Il secondo membro della (2) è di una formazione analoga a quella della (1) per $m = 1$; propriamente se in luogo degli elementi X , consideriamo gli elementi

$$Z_{hk \dots}^{(j_1 \dots j_{m-1})} = ((hk \dots, j_1 \dots j_{m-1}))_x$$

il secondo membro di (2) non è che il simbolo

$$((i_1 \dots i_v, j_m))_z$$

formato cogli elementi Z .

Riapplicando la stessa (2) si ha:

$$\begin{aligned} ((i_1 \dots i_v, j_1 \dots j_m)) &= \frac{\partial^2}{\partial x_{j_{m-1}} \partial x_{j_m}} ((i_1 \dots i_v, j_1 \dots j_{m-2})) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_{j_{m-1}}} ((i_1 \dots i_v, j_m, j_1 \dots j_{m-2})) - \frac{\partial}{\partial x_{j_m}} ((i_1 \dots i_v, j_{m-1}, j_1 \dots j_{m-2})) + \\ &+ ((i_1 \dots i_v, j_{m-1}, j_m, j_1 \dots j_{m-2})) \end{aligned}$$

e il secondo membro non è altro che

$$((i_1 \dots i_v, j_{m-1}, j_m))_z$$

quando questo simbolo si calcoli prendendo per elementi, anzichè le X , le

$$Z_{hk \dots}^{(j_1 \dots j_{m-2})} = ((hk \dots, j_1 \dots j_{m-2}))_x.$$

Così in generale si ha l'importante risultato che: *il simbolo*

$$((i_1 \dots i_v, j_1 \dots j_m))_x$$

è eguale al simbolo

$$((i_1 \dots i_v, j_{m-s+1} \dots j_m))_z$$

calcolato, anzichè per le X , per le

$$Z_{hk \dots}^{(j_1 \dots j_{m-s})} = ((hk \dots, j_1 \dots j_{m-s}))_x.$$

Così un simbolo (1) di cui il gruppo dei secondi indici sia formato di m indici, si può rappresentare (e in vari modi) come simbolo in cui il numero degli indici del secondo gruppo sia minore di m .

La considerazione fatta per la (2) può ripetersi per la (3), che p. es. riapplicata ancora una volta, dà:

$$\begin{aligned} ((i_1 \dots i_v, j_1 \dots j_m)) &= \frac{\partial^2}{\partial x_{i_{v-1}} \partial x_{i_v}} ((i_1 \dots i_{v-2}, j_1 \dots j_m)) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x_{i_{v-1}}} ((i_1 \dots i_{v-2}, j_1 \dots j_m i_v)) - \frac{\partial}{\partial x_{i_v}} ((i_1 \dots i_{v-2}, j_1 \dots j_m i_{v-1})) + \\ &+ ((i_1 \dots i_{v-2}, j_1 \dots j_m i_{v-1} i_v)), \end{aligned}$$

di cui il secondo membro è $((j_1 \dots j_m, i_{v-1} i_v))_Y$ calcolato per gli elementi

$$Y_{hk \dots}^{(i_1 \dots i_{v-2})} = ((i_1 \dots i_{v-2}, hk \dots))_X$$

ovvero, più generalmente, è anche $((j_{m-s+1} \dots j_m, i_{v-1} i_v))_T$ calcolato per gli elementi

$$T_{hk \dots}^{(i_1 \dots i_{v-2}, j_1 \dots j_{m-s})} = ((i_1 \dots i_{v-2}, j_1 \dots j_{m-s} hk \dots))_X$$

dove s è qualunque, e gli indici $h, k \dots$ sono al solito i variabili, mentre gli altri si intendono fissi per uno stesso sistema di elementi T .

In generale possiamo dire: *il simbolo $((i_1 \dots i_v, j_1 \dots j_m))_X$ si può anche rappresentare come simbolo del tipo $((j_{m-s+1} \dots j_m, i_{v-t+1} \dots i_v))_T$ calcolato però, anziché per le X , per gli elementi:*

$$T_{hk \dots}^{(i_1 \dots i_{v-t}, j_1 \dots j_{m-s})} = ((i_1 \dots i_{v-t}, j_1 \dots j_{m-s} hk \dots))_X$$

in cui s, t sono arbitrari.

Ponendo $m=0$, osservando che allora $((i_1 \dots i_v i, j_1 \dots j_m))_X$ diventa $X_{i_1 \dots i_v i}$ e applicando il precedente teorema per $s=0$, e $t=v$, si ha la formola:

$$\begin{aligned} (4) \quad X_{i_1 \dots i_v i} &= \frac{\partial^v X_i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_v}} - S_{i_1} \frac{\partial^{v-1}}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_v}} ((i, i_1)) + \\ &+ S_{i_1 i_2} \frac{\partial^{v-2}}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_v}} ((i, i_1 i_2)) - \dots + (-1)^v ((i, i_1 \dots i_v)) \end{aligned}$$

dove le S hanno il significato operativo già stabilito alla precedente Nota, e cioè S_{i_1} significa che bisogna permutare i_1 con $i_2 \dots i_v$ e poi sommare i risultati, $S_{i_1 i_2}$ significa che bisogna permutare $i_1 i_2$ con due altri qualunque degli altri indici e poi sommare tutti i risultati, e così di seguito.

2. *Costruzione dei simboli principali.* — Di simboli principali ne considereremo due specie; quelli di prima specie li rappresenteremo colle parentesi rotonde ordinarie, a quelli di seconda specie colle parentesi $\{ \}$.

Porremo :

$$(5) \quad \begin{cases} (i j) = ((i, j)) - ((j, i)) \\ (i h j) = ((i h, j)) + ((j, i h)) \\ (i h k j) = ((i h k, j)) - ((j, i h k)) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

e invece

$$(6) \quad \begin{cases} \{i j\} = ((i, j)) + ((j, i)) \\ \{i h j\} = ((i h, j)) - ((j, i h)) \\ \{i h k j\} = ((i h k, j)) + ((j, i h k)) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

e così di seguito con una legge semplice ed evidente.

È da notare che il simbolo ora denotato con $(i h j)$ è lo stesso di quello che nella teoria delle forme di secondo ordine era stato da noi denotato con $\{i h j\}$: qui abbiamo dovuto mutare la notazione per porre quel simbolo di accordo colle notazioni adottate per gli altri.

Sviluppando i (5) si vede che essi risultano formati mediante solo le *derivate* delle X, e in essi non compaiono mai le X non sottoposte a derivazione; invece nei (6) comparisce sempre un termine in cui c'è la X avente per indici tutti quelli del simbolo stesso, e non sottoposto a derivazione.

Per una forma differenziale di ordine r, di simboli principali di 1^a specie (i(5)) ne esistono sino a quelli con r+1 indici; di simboli principali di 2^a specie (i(6)) ne esistono fino a quelli con r indici.

Se da una forma differenziale di ordine r si passa ad una dell'ordine r+1, si viene ad introdurre una nuova categoria di ciascuna delle due specie di simboli, e cioè i simboli di 1^a specie a r+2 indici, e quelli di 2^a specie a r+1 indici.

3. *Formole di trasformazione dei simboli secondari.* — Passiamo ora a ricercare le formole di trasformazione dei simboli e cominceremo naturalmente dai secondari, perchè da esse poi immediatamente si troveranno le altre.

Il risultato importante cui giungeremo è il seguente:

Il simbolo $((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma))$ si trasforma esattamente come si trasformerebbe il prodotto $X_{h_1 \dots h_\mu} X_{k_1 \dots k_\sigma}$.

Indichiamo con $((h_1 \dots, k_1 \dots))'$ i simboli secondari calcolati per i coefficienti trasformati Y dati dalla formola (7) della Nota precedente, e ricerchiamo prima la formola di trasformazione per il caso particolare in cui il gruppo dei secondi indici del simbolo sia formato di un indice solo.

Si ha:

$$((h_1 \dots h_\mu, h_{\mu+1}))' = \frac{\partial Y_{h_1 \dots h_\mu}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} - Y_{h_1 \dots h_{\mu+1}},$$

cioè

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &= \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_{j_{m+1}}} \frac{\partial x_{j_{m+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \frac{\partial}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy} - \\ &- \sum_{m=1}^{\mu+1} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu+1} \end{matrix} \right)_{xy}. \end{aligned} \right.$$

I termini per $m=1$ della seconda riga si distruggono con quelli per $m=1$ della terza riga, come è facile riconoscere; quelli per $m=2, 3, \dots, \mu$ della seconda e terza riga, in forza dell'identità (15) della Nota precedente si riducono a

$$- \frac{1}{m} \sum_{m=2}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} S_{j_m} \frac{\partial x_{j_m}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_{m-1} \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy}.$$

Ora essendo $X_{j_1 \dots j_m}$ simmetrico negli indici, si può porre il simbolo di operazione S_{j_m} avanti la X , e inoltre evidentemente

$$\frac{1}{m} \sum_{j_1 \dots j_m} S_{j_m} \equiv \sum_{j_1 \dots j_m};$$

onde, mutando m in $m+1$, l'ultima espressione può scriversi:

$$(8) \quad - \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{j_1 \dots j_{m+1}} X_{j_1 \dots j_{m+1}} \frac{\partial x_{j_{m+1}}}{\partial y_{h_{\mu+1}}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy}.$$

Bisogna poi ancora sottrarre il termine che risulta dalla terza riga di (7) per $m=\mu+1$; ma tal termine può, come è facile vedere, porsi sotto la forma che si otterrebbe da (8) per $m=\mu$. Raccogliendo perciò la prima riga di (7) colla (8) estesa da $m=1$ ad $m=\mu$, e chiamando rispettivamente i e k gli indici j_{m+1} e $h_{\mu+1}$, si ha infine:

$$(9) \quad ((h_1 \dots h_{\mu}, k))' = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_i \sum_{j_1 \dots j_m} ((j_1 \dots j_m, i)) \binom{i}{k}_{xy} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_{\mu} \end{matrix} \right)_{xy}.$$

Passiamo ora alla formola per il caso generale in cui il gruppo dei secondi indici sia formato di più di uno.

Dico che si ha in generale:

$$(10) ((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma))' = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix}_{xy} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}_{xy}$$

formola che per $\sigma = 1$ si riduce alla (9), e che noi dimostreremo per induzione facendo vedere che se essa si verifica per σ si verifica per $\sigma + 1$.

Serviamoci della formola (2) che scriveremo:

$$(11) ((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma k))' = \frac{\partial}{\partial y_k} ((h_1 \dots h_\mu, k_1 \dots k_\sigma))' - ((h_1 \dots h_\mu k, k_1 \dots k_\sigma))'$$

e calcoliamo il secondo membro di questa espressione mediante la (10) che vale, per ipotesi, per ciascuno dei termini di quel secondo membro, perchè in essi il gruppo dei secondi indici è formato da σ indici.

Otteniamo (tralasciando da ora in poi, per brevità, di segnare gli indici x, y in basso alle parentesi che figurano in (10))

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{s+1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{s+1}}} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \cdot \begin{pmatrix} i_{s+1} \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} \right] \\ & - \sum_{m=1}^{\mu+1} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \dots j_m \\ h_1 \dots h_\mu k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Ora per $m = 1$ la seconda e terza riga dà:

$$\sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1, i_1 \dots i_s)) \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}$$

osservando che

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 \\ h_1 \dots h_\mu k \end{pmatrix}.$$

Se $s = 1$ possiamo ancora scrivere $\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \dots k_\sigma k \end{pmatrix}$, e se

$s > 1$, mediante la formola (15) della precedente Nota, scriviamo invece:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_s \\ k_1 \dots k_\sigma k \end{pmatrix} - \frac{1}{s} S_{i_s} \begin{pmatrix} i_s \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{s-1} \\ k_1 \dots k_\sigma \end{pmatrix}$$

e quindi abbiamo (osservando al solito che $\frac{1}{s} \sum_{i_1 \dots i_s} S_{i_s} = \sum_{i_1 \dots i_s}$)

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1}^{\sigma} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1, i_1 \dots i_s)) \binom{j_1}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma} k} - \\ & - \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1}^{\sigma} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1, i_1 \dots i_s)) \binom{i_s}{k} \binom{j_1}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_{\sigma}}. \end{aligned} \right.$$

Se poi è $m > 1$ allora, sempre mediante la (15) della Nota precedente, possiamo scrivere (per $s > 1$):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma}} - \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu} k} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma}} = \\ & = -\frac{1}{m} S_{j_m} \binom{i_m}{k} \binom{j_1 \dots j_{m-1}}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma}} + \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma} k} - \\ & \quad - \frac{1}{s} S_{i_s} \binom{i_s}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_{\sigma}} \end{aligned}$$

e per $s = 1$ una formola simile priva però dell'ultimo termine; per cui la seconda e terza riga di (12) da $m = 1$ sino a $m = \mu$ danno (aggiungendo i termini (13)):

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma} k} - \\ & - \sum_{m=2}^{\mu} \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \binom{j_m}{k} \binom{j_1 \dots j_{m-1}}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma}} - \\ & - \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=2}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \binom{i_s}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_{\sigma}}. \end{aligned} \right.$$

A questi termini bisogna poi aggiungere ancora quelli della prima riga di (12) che, con mutamenti di indici, scriveremo così:

$$(15) \quad \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{s=2}^{\sigma+1} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_{s-1})) \binom{i_s}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_{\sigma}}$$

mentre nella seconda riga di (14) mutando m in $m+1$, s in $s-1$, e ponendo infine i_s in luogo di j_{m+1} ⁽¹⁾, si ha

$$(16) \quad - \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{s=2}^{\sigma-1} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m i_s, i_1 \dots i_{s-1})) \binom{i_s}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_{\sigma}}.$$

(1) Questi cangiamenti possono farsi perchè questi indici sono sottoposti ai sommatore.

Ora i termini dell'ultima riga di (14), di (15) e di (16), estendendo i sommatori da $m = 1$ ad $m = \mu$ (cioè scrivendo (16) sotto la forma $-\sum_{m=1}^{\mu} + \sum_{\mu}^{\mu}$) e da $s = 2$ ad $s = \sigma$ danno per risultato zero, perchè si raccolgono col fattore

$$\frac{\partial}{\partial x_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_{s-1})) - ((j_1 \dots j_m i_s, i_1 \dots i_{s-1})) - ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s))$$

che è zero.

Resta quindi (ricordando che bisogna ancora scrivere la terza riga di (12) per $m = \mu + 1$):

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{\sigma+1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma+1}}} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_{\sigma})) \binom{i_{\sigma+1}}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{\sigma}}{k_1 \dots k_{\sigma}} \\ & - \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_{\mu}} \sum_{i_1 \dots i_{\sigma+1}} ((j_1 \dots j_m i_{\sigma+1}, i_1 \dots i_{\sigma})) \binom{i_{\sigma+1}}{k} \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{\sigma}}{k_1 \dots k_{\sigma}} \\ & + \sum_{s=2}^{\sigma+1} \sum_{j_1 \dots j_{\mu}} \sum_{j_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_{\mu} i_s, i_1 \dots i_{s-1})) \binom{i_s}{k} \binom{j_1 \dots j_{\mu}}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{s-1}}{k_1 \dots k_{\sigma}} \\ & - \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{j_1 \dots j_{\mu+1}} \sum_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_{\mu+1}, i_1 \dots i_s)) \binom{j_1 \dots j_{\mu+1}}{h_1 \dots h_{\mu} k} \binom{i_1 \dots i_s}{k_1 \dots k_{\sigma}}. \end{aligned}$$

I termini della terza e quarta riga si distruggono fra loro, come si vede mutando nella quarta riga s in $s - 1$, ponendovi i_s al posto di $j_{\mu+1}$, e tenendo conto che è identicamente

$$\binom{j_1 \dots j_{\mu} i_s}{h_1 \dots h_{\mu} k} = \binom{j_1 \dots j_{\mu}}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_s}{k}.$$

I termini delle due prime righe, mediante la solita identità (15) della Nota precedente, possono combinarsi a due a due, e scriversi:

$$(17) \quad \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{\sigma+1}} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_{\sigma+1})) \binom{j_1 \dots j_m}{h_1 \dots h_{\mu}} \binom{i_1 \dots i_{\sigma+1}}{k_1 \dots k_{\sigma} k}$$

e a questi termini bisogna poi infine aggiungere quelli della prima riga di (14). Ora si vede che (17) è ciò che si otterrebbe da tal prima riga di (14) per $s = \sigma + 1$, quindi il risultato finale che si ha è che il primo membro di (11) si esprime con una formola come la (10) ma mutandovi σ in $\sigma + 1$. Resta così, per induzione, provata la (10) medesima.

Ricordando poi la formola (7) della Nota precedente, ed osservando la (10) resta senz'altro anche provato il teorema enunciato al principio di questo paragrafo.

4. *Formole di trasformazione dei simboli principali.* — Servendoci delle formole (5), (6) e della (10) siamo ora finalmente in grado di scrivere le formole di trasformazione dei simboli principali di prima e seconda specie.

Si hanno le formole:

$$(18) \quad (h_1 \dots h_\mu k)' = \sum_i \sum_j \binom{i}{k}_{xy} \left[(j_1 \dots j_\mu i) \binom{j_1 \dots j_\mu}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \right. \\ \left. + \{j_1 \dots j_{\mu-1} i\} \binom{j_1 \dots j_{\mu-1}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \right. \\ \left. + (j_1 \dots j_{\mu-2} i) \binom{j_1 \dots j_{\mu-2}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right]$$

con una legge evidente; si alternano al secondo membro i simboli principali di prima specie con quelli di seconda, e l'ultimo termine sarà perciò:

$$(j_1 i) \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \quad \text{se } \mu \text{ è dispari}$$

ovvero

$$\{j_1 i\} \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \quad \text{se } \mu \text{ è pari.}$$

Similmente è:

$$(19) \quad \{h_1 \dots h_\mu k\}' = \sum_i \sum_j \binom{i}{k}_{xy} \left[\{j_1 \dots j_\mu i\} \binom{j_1 \dots j_\mu}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \right. \\ \left. + (j_1 \dots j_{\mu-1} i) \binom{j_1 \dots j_{\mu-1}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \right. \\ \left. + \{j_1 \dots j_{\mu-2} i\} \binom{j_1 \dots j_{\mu-2}}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} + \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right].$$

essendo l'ultimo termine

$$\{j_1 i\} \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \quad \text{se } \mu \text{ è dispari}$$

ovvero

$$(j_1 i) \binom{j_1}{h_1 \dots h_\mu}_{xy} \quad \text{se } \mu \text{ è pari.}$$

Da queste formole e dalle precedenti appare che i trasformati dei simboli secondari si esprimono mediante combinazione lineare degli antichi simboli secondari, e lo stesso fanno per conto loro i nuovi simboli principali mediante gli antichi, ed è in tal senso che bisogna intendere il carattere invariantivo della totalità dei simboli, secondari e principali, al quale abbiamo accennato nell'introduzione.

Servendosi delle precedenti formole di trasformazione, da me comunicategli, il dott. Sinigallia ⁽¹⁾ ha potuto ora dimostrare l'invariantività delle caratteristiche delle matrici costruite con i simboli principali relativi ad una forma differenziale di ordine r , estendendo così un risultato che per il second'ordine io avea trovato in precedenti lavori.

5. *Simboli relativi alle forme differenziali di primo ordine e di r^{mo} grado.* — Se immaginiamo eguali a zero tutte le X di cui il numero degli indici sia inferiore ad r , che è l'ordine della forma differenziale, questa acquista il tipo di una forma differenziale di primo ordine e di r^{mo} grado, mentre d'altra parte è evidente (vedi le (7) della Nota precedente) che le poste relazioni costituiscono una totalità di relazioni di carattere invariantivo.

I simboli principali, da noi sopra introdotti in generale, diventano in questo caso una più diretta, ma naturalmente meno ampia, estensione di quei simboli che per le forme differenziali quadratiche vanno sotto il nome di Christoffel. È facile riconoscere che i simboli principali che non si annullano identicamente sono allora solo quelli contenenti il massimo numero di indici, cioè $r + 1$ indici se di prima specie, e r indici se di seconda specie. Questi ultimi si riducono eguali rispettivamente ai coefficienti X stessi, mentre gli altri, che vorremo, per analogia colla notazione adottata pei simboli di Christoffel, indicare col simbolo $\left[\begin{smallmatrix} j_1 \dots j_r \\ i \end{smallmatrix} \right]$, risultano

$$\left[\begin{smallmatrix} j_1 \dots j_r \\ i \end{smallmatrix} \right] = \frac{\partial X_{j_1 \dots j_r}}{\partial x_i} - \frac{\partial X_{ij_2 \dots j_r}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial X_{ij_1 j_3 \dots j_r}}{\partial x_{j_2}} - \dots - \frac{\partial X_{ij_1 \dots j_{r-1}}}{\partial x_{j_r}}.$$

Le formole di trasformazione per questi si potrebbero ricavare come caso particolare da quelle del paragrafo precedente.

Matematica. — *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni.* Nota del Corrispondente G. RICCI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Rend. Ist. Lomb. (2), t. 36, 1903.

Fisiologia. — *Analisi dei gas del sangue a differenti pressioni barometriche.* Nota del Socio ANGELO MOSSO e di GIACOMO MARRO.

Fisiologia. — *L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica.* Nota del Socio ANGELO MOSSO e di GIACOMO MARRO.

Fisiologia. — *Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa.* Nota del Socio ANGELO MOSSO e di GIACOMO MARRO.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari.* Nota del prof. FRANCESCO PALATINI, presentata dal Socio SEGRE.

In una recente Nota ⁽¹⁾ ho applicato alla ricerca del minimo numero di cubi con la somma dei quali possa rappresentarsi la cubica quinquaria generica, un metodo che, come ho osservato alla fine di quello scritto, lasciava sperare di poter raggiungere risultati di una qualche generalità sul numero di potenze n^{me} necessario e sufficiente per esprimere una forma generica di ordine n . Applicherò ora al caso delle forme ternarie di qualsiasi ordine codesto metodo, che per comodità del lettore qui riassumerò.

Le varietà V di dimensione $r-1$ ed ordine n dello spazio S_r si rappresentino linearmente coi punti di S_m essendo $m = \binom{n+r}{r} - 1$. Si consideri in S_m la varietà M di dimensione r ed ordine n' i cui punti corrispondono alle V ridotte ad iperpiani n -pli e la quale altro non è che la varietà di S_m rappresentata in S_r da tutte le varietà di dimensione $r-1$ e ordine n di questo spazio. Ora l'equazione di una V generica si potrà porre sotto la forma

$$a_1 A_1^n + a_2 A_2^n + \dots + a_k A_k^n = 0$$

(1) *Sulla rappresentazione delle forme ecc.*, Atti Accad. Torino, 1902.

essendo le A forme lineari di dimensione r fra loro indipendenti, quando (e solo allora) considerando tutti i sistemi lineari della forma

$$\lambda_1 X_1^n + \lambda_2 X_2^n + \cdots + \lambda_k X_k^n = 0$$

essi comprendono tutte le V , cioè, ricorrendo all'anzidetta rappresentazione, quando (e solo quando) gli S_{k-1} , che sono k -secanti della M riempiono S_m .

Abbiamo nel caso attuale $r=2$, $m=\frac{n(n+3)}{2}$ e la M è di ordine n^2 . Si tratta di vedere se accade che gli spazî determinati ognuno da $\frac{(n+1)(n+2)+\eta}{6}$ punti della M riempiono S_m , dove η deve avere un valor tale che il numeratore riesca multiplo di 6, cioè uno dei valori 0, 4, e noi diremo che deve avere il valore 4ε ($\varepsilon=0, 1$). Gli spazî in discorso formano un'infinità di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3}$, quindi, essendo ciascuno di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6} - 1$, contengono complessivamente un numero di punti la cui infinità è di dimensione $\frac{n(n+3)}{2} + 2\varepsilon$, cosicchè parrebbe che per ogni punto di S_m ne dovesse passare un numero finito o ∞^2 secondo che è $\varepsilon=0$, $\varepsilon=1$. Senonchè sappiamo già che per $n=2$, $n=4$ non è questa la conclusione cui si arriva, giacchè in questi casi per ogni punto di S_m per cui passa uno degli spazî anzidetti ne passano infiniti, cosicchè nessuno ne passa per un punto generico.

Prendiamo uno dei nostri spazî di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6} - 1$ determinato da $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti di M e vediamo quanti sono gli spazî congeneri che lo incontrano in un punto. Ricorrendo alla rappresentazione di M coi punti del piano, abbiamo che all' S scelto, cioè all'infinità di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)-2\varepsilon}{3} - 1$ di iperpiani passanti per esso, corrisponde l'insieme S' di altrettante C^n passanti per gli $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{6}$ punti del piano che corrispondono a quelli scelti sulla M . Se quell' S ed un altro S_1 s'incontrano in un punto, essi appartengono ad uno spazio Σ di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3} - 2$, che è $\frac{(n+1)(n+2)+4\varepsilon}{3} - 2$ secante della M , al quale, cioè all'infinità di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)-8\varepsilon}{6}$ di iperpiani passanti per esso, corrisponde un sistema Σ' altrettanto infinito

di C^n passanti per gli $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$ punti del piano corrispondenti a quelli in cui la M è segata da Σ . Ma siccome un siffatto numero di punti, se essi sono indipendenti, determina un sistema di C^n di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3} - 1$, così vuol dire che Σ' ha la sovrabbondanza 1. Ora

per $n=2, 4, 5$ il grado di un sistema di C^n passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$ punti è rispettivamente 0, 6, 11, cioè maggiore di $2p-2$ (essendo p il genere), perciò per un noto teorema ⁽¹⁾ il sistema è regolare, il che prova che in siffatti casi non vi sono spazî Σ di dimensione $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3} - 2$

seganti la M in $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$ punti. Anche per $n=3$ non possono prendersi 8 punti in modo che le cubiche passanti per 7 di essi passino di conseguenza anche per l'ottavo. Dalle considerazioni che ora faremo, s'intenderanno esclusi questi casi.

Ogni Σ passante per un S incontra M , oltre che nei $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti che questa ha in comune con S , in altri $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti i quali determinano un S_1 della stessa specie di S e ad esso incidente. Se l'infinità dei Σ passanti per un S generico è uguale alla dimensione di questo aumentata di 2ϵ , vorrà dire che per ogni suo punto generico non può passare che un numero $\infty^{2\epsilon}$ ($\infty^0 =$ numero finito) di spazî S_1 ; in altre parole si ha allora che per ogni punto (generico) di S_m per il quale passa un S passa al più un numero $\infty^{2\epsilon}$ di spazî siffatti, quindi gli S riempiono S_m e perciò la forma ternaria generica di grado n è rappresentabile mediante la somma delle potenze n^{me} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ forme lineari.

Il fatto di essere l'infinità dei Σ passanti per un S generico uguale alla dimensione di questo aumentata di 2ϵ , avverrà quando nel piano l'infinità dei sistemi Σ' formati dalle C^n passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti generici sia uguale a $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$.

P. e. per $n=7$ ($\epsilon=0$) si abbiano 12 punti generici ed un sistema Σ' di curve C^7 passanti per essi e per altri 12 punti in modo che il sistema (dotato di 24 punti base semplici) abbia la sovrabbondanza 1. Allora considerando la cubica determinata da 9 dei primi 12 punti, una quartica che

⁽¹⁾ Segre, *Sui sistemi lineari ecc.*, Rend. Circ. mat. di Palermo, t. I.

passi per i secondi 12 e per 2 dei rimanenti 3 passa anche per il terzo, dovendo ogni C^7 che passa per 23 dei punti dati passare anche per il 24^{mo}. Si vede subito di qui, variando convenientemente i 9 punti che si sono scelti per determinare la cubica, che i 24 punti base di Σ' trovansi sopra una quartica; siccome poi per questi passano sempre delle sestiche ⁽¹⁾, così risulta che essi sono la completa intersezione di una quartica con una sestica. Reciprocamente poi, per un ben noto teorema di Cayley, ogni gruppo di 24 punti che sia l'intersezione di una quartica ed una sestica è tale che ogni C^7 passante per 23 di essi passa pure per il rimanente. Presa dunque una C^4 passante per i 12 punti dati, le C^6 passanti per questi vi segano una serie lineare g_{24}^6 ad ogni gruppo della quale corrisponde un sistema Σ' e siccome sono ∞^2 le C^4 che consideriamo, così è 11 l'infinità dei sistemi Σ' (passanti per i 12 punti dati), cioè precisamente $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$. Lo

stesso ragionamento si applica al caso di $n=8$ ($\epsilon=0$) nel quale la base di un Σ' risulta come intersezione di una C^5 ed una C^3 , ed a quello di $n=6$ ($\epsilon=1$) nel quale la base di un Σ' è l'intersezione di una C^4 con una C^5 , ed in entrambi questi casi si trova che l'infinità dei Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti generici è $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$.

Possiamo dunque concludere che per $n=6, 7, 8$ la forma ternaria generica di grado n è rappresentabile con la somma delle potenze n^{me} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ forme lineari.

Passando ad $n=9$ ($\epsilon=1$), applicando un metodo sviluppato dal sig. F. S. Macaulay ⁽²⁾ abbiamo che un sistema Σ' di curve C^9 con 38 punti base semplici ha la sovrabbondanza 1, quando quei 38 punti sono le intersezioni di due C^7 passanti entrambi per gli stessi 11 punti di una conica.

Vediamo quanti sono i sistemi Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} = 19$ punti dati generici. Per aver la base di un Σ' bisogna fissare una conica e su essa 11 punti e condurre per questi due C^7 le quali si taglieranno ulteriormente nella base cercata di 38 punti. Per gli 11 punti ora detti passano ∞^{24} C^7 formanti ∞^{48} coppie; variando gli 11 punti sulla conica e poi variando questa, di

(1) E una generica di queste sestiche non contiene la C^4 come parte, giacchè il suo passaggio per i 24 punti è determinato dal passaggio per 21 dei medesimi. Difatti condotta una retta per 2 dei 24 punti, una sestica passante per 21 dei rimanenti 22 passa anche per il ventiduesimo, ed essa passa per tutti e 24, come si vede variando opportunamente la retta. Considerazioni analoghe valgono per i casi che verranno menzionati poco sotto.

(2) *Point-Groups in relation to Curves*, n. 26. Proc. of the London Math. Soc., vol. XXVI, 1895.

tali coppie ne otteniamo ∞^{64} . Però per 38 punti siffatti passano $\infty^3 C^7$ (perchè per 5 di essi passa una conica e le C^7 passanti per 32 dei rimanenti 33 passano per tutti i 38 ⁽¹⁾ e formano un sistema ∞^3) che danno luogo ad ∞^6 coppie, cosicchè i sistemi Σ' in tutto sono ∞^{58} , quindi l'infinità di quelli che passano per 19 punti generici dati è $20 = \frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$.

Parimenti per $n = 10, 11, 12, 13, 14, 15 \dots$ è applicabile lo stesso metodo e si trova che la base di un sistema Σ' è data dall'intersezione rispettivamente di due C^7, C^8, C^9, C^{10} , di una C^{10} con una C^{12} , di una C^{11} con una C^{13}, \dots passanti rispettivamente per 5 punti collineari, per 12 punti di una conica, per 19 di una cubica, per 30 di una quartica, per 40 di una quintica, per 51 di una sestica..... e sempre si trova con lo stesso procedimento tenuto per $n = 9$ che l'infinità dei Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti generici dati è $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$.

Passando al caso di n qualunque, ed applicando il citato metodo del Macaulay, sia C^{n-k} la minima curva passante per $N = \frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$ punti semplici formanti la base di un sistema Σ' di sovrabbondanza 1, sì che le C^{n-k} passanti per il gruppo N formino un sistema di dimensione maggiore di zero (come avviene p. e. per $n = 9, 10, 11, 12, 13$), per cui sarà

$$(1) \quad \frac{k(k+3)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+3)}{2} > \frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3} - 1$$

donde

$$(1') \quad k(n-k) < \frac{(n+1)(n+2)-8\epsilon}{6}$$

e precisamente k è il massimo valore non superiore ad $\frac{n}{2}$ che soddisfa questa relazione.

La base di un sistema Σ' si compone di $N = \frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$ punti che sono l'intersezione di due C^{n-k} passanti per $N' = (n-k)^2 - \frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$ punti di una $C^{l+m-n-\epsilon}$ ($l = m = n - k$) $\equiv C^{n-2k-3}$.

Dopo ciò procedendo in modo identico a quello tenuto per $n = 9$, si può constatare che in virtù delle (1), (1') nessuna delle operazioni geometriche che si presentano offre mai particolarità tali da far modificare in qualche punto le conclusioni cui quel procedimento conduceva per $n = 9$, e si trova

⁽¹⁾ V. il ragionamento fatto per $n = 7$.

precisamente che l'infinità dei sistemi Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti generici dati è $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$.

Se poi per il gruppo N passa una sola C^{n-k} (come avviene p. e. per $n = 14, 15$), nel qual caso è

$$(2) \quad k(n-k) = \frac{(n+1)(n+2) - 8\epsilon}{6}$$

e se è C^{n-k+h} la minima curva passante per N e non contenente C^{n-k} come parte, si ottiene la base di un sistema Σ' come intersezione di una C^{n-k} ed una C^{n-k+h} passanti entrambi per $N' = (n-k)(n-k+h) - \frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3}$

punti di una $C^{l+m-n-3} \equiv C^{n-2k+h-3}$, ($m = n-k$, $l = n-k+h$). Dopo ciò, sempre con lo stesso procedimento, si trova che l'infinità dei Σ' passanti per $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ punti generici dati è $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{3} - k(n-k) - 1$,

il qual numero, in virtù della (2), è appunto eguale a $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} - 1 + 2\epsilon$.

Dopo ciò possiamo concludere: *Per $n > 5$ la forma ternaria generica di ordine n è rappresentabile in $\infty^{2\epsilon}$ modi (∞^0 = numero finito) mediante la somma delle potenze n^{me} di $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6}$ forme lineari, essendo $\epsilon = 0$ od $\epsilon = 1$ secondo che n non è od è multiplo di 3.*

Dei casi che si hanno per $n \leq 5$ ci conviene trattare soltanto quello di $n = 5$ essendo ben noti gli altri. La M è in questo caso una superficie di ordine 25 di S_{20} ed è $\frac{(n+1)(n+2)+4\epsilon}{6} = 7$. Alle cubiche del piano

corrispondono in M delle C^{15} normali appartenenti a spazi S_{14} . Fissiamo un S_6 determinato da 7 punti della M per i quali passa una rete di C^{15} e quindi per quel S_6 passano ∞^2 dei nostri S_{14} . L' S_{14} di una C^{15} generica della M incontrerà S_6 in un punto A che sarà un punto generico di S_6 (gli S_{14} sono ∞^0 , quindi per ogni punto generico di S_6 ne passeranno ∞^3 ; tuttavia si potrebbe dubitare che A non sia un punto generico di M , che cioè le intersezioni di S_6 coi nostri S_{14} diversi da quelli passanti per esso si accentrino in certi punti di S_6 per ognuno dei quali ne passerebbe allora un'infinità di dimensione maggiore di 3; in tal caso si ha senz'altro che per ogni punto generico di S_6 non passa alcun altro spazio congenere) e gli ∞^3 S_{14} (contenenti curve C^{15}) passanti per A sono quelli cui appartengono le curve del sistema triplo determinato dalla C^{15} e dalla rete considerate. Fra questi ∞^3 S_{14} non ve ne sono ∞^2 passanti per un altro S_6 7-secante di M , od in altre parole nel considerato sistema triplo di C^{15} non vi è

un'altra rete come quella fissata sopra. Basta perciò osservare che data nel piano una rete (C) di cubiche passanti per 7 punti ed un'altra cubica generica C_1 , il sistema triplo che ne riesce determinato non contiene un'altra rete come la (C). Difatti siccome la C_1 per ipotesi non passa per alcun punto della base di (C), lo stesso avviene per ogni curva del sistema la quale non appartenga a (C). Ora una qualunque rete del sistema, diversa da (C), è determinata da un fascio di (C) e da una curva C_2 , non appartenente a (C), ed essa non è certo formata da curve passanti per 7 punti fissi perchè questi dovrebbero trovarsi fra i 9 punti base del fascio e perciò dovrebbero fra essi trovarsi anche alcuni dei 7 punti base della (C) (almeno 5), mentre la C_2 abbiamo visto che non passa per nessuno di questi. Ne segue che per ogni punto generico di un S_6 7-secante di M non passa alcun altro spazio siffatto, il che vuol dire che gli S_6 7-secanti di M riempiono S_{20} per ogni punto generico del quale ne passa uno. Dunque: *La forma ternaria quintica generica è rappresentabile, ed in un solo modo, con la somma delle quinte potenze di 7 forme lineari.*

Osserverò, nel chiudere questo scritto, che attualmente si può già prevedere che l'impossibilità di rappresentare una forma s-aria generica con la somma di potenze di forme lineari contenenti un numero di costanti non inferiore a quello contenuto nella forma considerata, si avrà soltanto in casi particolari. Di questi uno solo mi si è presentato, oltre a quelli già noti, e vale, per la sua importanza, la pena di accennarlo: è quello della quartica quinquaria ($r=4$, $n=4$, $m=69$) che contiene 70 costanti. Consideriamo in S_{69} gli S_{13} 14-secanti della M, i quali complessivamente hanno ∞^{70} punti. Siccome 14 punti di S_4 vi determinano una quadrica, così i nostri S_{13} appartengono agli spazi contenenti le varietà di M corrispondenti alle quadriche di S_4 . Ora nel sistema di tutte le V_3^4 ve ne sono ∞^{14} che contengono una data Q_3^2 , quindi la dimensione della serie segata dalle V_3^4 in Q_3^2 è 54, il che vuol dire che gli spazi cui appartengono in S_{69} le varietà di M corrispondenti alle quadriche di S_4 sono di dimensioni 54, per cui i nostri S_{13} essendo contenuti in questi, che complessivamente hanno ∞^{68} punti, non riempiono S_{69} . Ne deriva: *La forma quartica quinquaria generica non è rappresentabile con la somma delle quarte potenze di 14 forme lineari.*

Meccanica. — *Sulle vibrazioni trasversali di una lamina, che dipendono da due soli parametri.* Nota del dott. G. BISCONCINI, presentata dal Socio VOLTERRA.

1. Seguendo le orme di una Memoria del prof. Levi-Civita ⁽¹⁾ e approfittando in buona parte dei risultati ivi racchiusi, ci siamo proposti, data l'equazione

$$(1) \quad \square w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

di determinare la forma di tutte le possibili sostituzioni

$$q_1 = q_1(x, y, t) \quad , \quad q_2 = q_2(x, y, t)$$

tali, che, posto arbitrariamente

$$q_3 = q_3(x, y, t) ,$$

(colla sola condizione, che le funzioni q_1, q_2, q_3 sieno indipendenti) ed espressa la (1) mediante q_1, q_2, q_3 , la equazione trasformata, posto in essa $\frac{\partial w}{\partial q_3} = 0$ e moltiplicata al più per un conveniente fattore dipendente da q_3 , non contenga più esplicitamente questa variabile.

La funzione w definita dall'equazione $\square w = 0$, così ottenuta, risulta dunque una funzione dei soli parametri q_1, q_2 .

Ricordando poi, che l'equazione (1) definisce, scelta convenientemente l'unità di tempo, le vibrazioni trasversali di una membrana, risulta giustificato il significato attribuito ai risultati ottenuti, quale apparisce dal titolo della presente Nota.

2. Osserviamo intanto, che, considerata l'equazione dei potenziali

$$(1') \quad \Delta_2 w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

ed eseguita la trasformazione:

$$q_1 = q_1(x, y, z) \quad , \quad q_2 = q_2(x, y, z) \quad , \quad q_3 = q_3(x, y, z) ,$$

è possibile ottenere, col procedimento più sopra indicato, una equazione $\overline{\Delta_2 w} = 0$, che definisca w come funzione delle sole q_1 e q_2 , solo quando la con-

⁽¹⁾ *Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate.* (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, s. II, Tom. XLIX, a. 1899).

gruenza $q_1 = \text{cost.}$, $q_2 = \text{cost.}$ sia isotropa o risulti costituita dalle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini ⁽¹⁾.

Potremo poi asserire, che, siccome dalla (1) si passa alla (1') collo scambio di z in it , così, se $q_1 = q_1(x, y, z)$, $q_2 = q_2(x, y, z)$ costituiscono l'integrale generale di una congruenza equipotenziale, le equazioni $q_1 = q_1(x, y, it)$, $q_2 = q_2(x, y, it)$ definiscono, indipendentemente dalla condizione di realtà, i parametri q_1 e q_2 , dai quali soltanto dipenderanno le vibrazioni trasversali della lamina ⁽²⁾.

Operando in tal guisa, risulta immediatamente, che l'equazione dei potenziali isotropi $\frac{\partial^2 w}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial q_2^2} = 0$ è anche l'equazione delle vibrazioni, che nel caso corrispondente dipendono solo da q_1 e q_2 .

Nei rimanenti casi abbiamo dovuto iniziare la ricerca dei sottogruppi ∞^1 reali del gruppo G_7 delle similitudini nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$, le cui trasformazioni infinitesime sono (usando delle notazioni ben note del Lie):

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} = p, & X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial y} = q, & X_3 f &= \frac{\partial f}{\partial t} = s, & Uf &= xp + yp + ts, \\ S_1 f &= ys + tp, & S_2 f &= tp + xs, & S_3 f &= xq - yp, \end{aligned}$$

coll'avvertenza di considerare equivalenti due sottogruppi ∞^1 riducibili l'uno all'altro soltanto mediante due trasformazioni di G_7 non involgenti in ufficio scambievole le tre variabili x, y, t ⁽³⁾.

Scartati inoltre i sottogruppi, le equazioni delle cui traiettorie non risultavano indipendenti rispetto alle variabili x, y (condizione, che come apparisce subito, è essenziale), abbiamo trovato di dover ritenere distinti i sottogruppi ∞^1 definiti dalle seguenti trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned} & X_1 f + c X_3 f \quad (c \neq 0), \quad Uf; \\ & q + S_2 f, \quad c Uf + S_2 f, \quad s \pm Uf + S_2 f, \quad p \pm Uf + S_2 f; \\ & c Uf + S_3 f - S_1 f, \quad s + S_3 f - S_1 f, \quad p + S_3 f - S_1 f; \\ & c Uf + S_3 f \quad (c \neq 0), \quad s + S_3 f; \end{aligned}$$

nelle quali il parametro c è essenziale.

⁽¹⁾ Loc. cit. § 8, pag. 149.

⁽²⁾ Se q_1 e q_2 non fossero reali, si potrà sempre sostituire ad essi altri parametri q'_1, q'_2 , funzioni soltanto di q_1 e q_2 , i quali risultino reali.

⁽³⁾ È ovvia la ragione di questa avvertenza: nel caso attuale infatti la variabile t sta a rappresentarci il tempo, che non si può trattare nello stesso modo come le variabili di spazio x e y .

3. Integrate le equazioni differenziali corrispondenti, e trasformata la equazione $\square w = 0$ come è stato indicato al n. 1, abbiamo trovato nei diversi casi enumerati come equazioni delle vibrazioni della lamina, le seguenti:

$$(I) \quad \overline{\square w} \equiv (c^2 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} = 0,$$

dove:

$$\varrho_1 = cx - t, \quad \varrho_2 = y.$$

$$(II) \quad \overline{\square w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{1}{\sin^2 i \varrho_1} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + i \cotg i \varrho_1 \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0,$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{i} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{it} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varrho_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$(III) \quad \overline{\square w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \left(1 + \frac{1}{\varrho_1^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{t^2 - x^2}, \quad \varrho_2 = y + \log \sqrt{\frac{t-x}{t+x}}.$$

$$(IV) \quad \overline{\square w} \equiv \left(1 - \frac{c^2}{\sin^2 i \varrho_2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1} \left(2 - \frac{c^2}{\sin^2 i \varrho_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1^2} i \cotg i \varrho_2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - t^2} \left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{\frac{c}{2}} \varrho_2 = \frac{1}{i} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{y}.$$

$$(V) \quad \overline{\square w} \equiv 4\varrho_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \varrho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} - 2\varrho_2 (2\varrho_1 - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} + 6\varrho_1 \frac{\partial w}{\partial \varrho_1},$$

$$\varrho_1 = \frac{2(x \pm t) + 1}{4y^2}, \quad \varrho_2 = y e^{\alpha \mp t}.$$

$$(VI) \quad \overline{\square w} \equiv 4\varrho_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \varrho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + 2\varrho_2 (2\varrho_1 + 1) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} - 6\varrho_1 \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0,$$

$$\varrho_1 = \frac{2(x \pm t) + 1}{4y^2}, \quad \varrho_2 = y e^{-\alpha \mp t}.$$

$$(VII) \quad \overline{\square w} \equiv 2\varrho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - c^2 \varrho_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + 2\varrho_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} + \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} - c^2 \varrho_2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0,$$

$$\varrho_1 = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{2(x+t)^2}, \quad \varrho_2 = (x+t) e^{\frac{cy}{x+t}}.$$

$$(VIII) \quad \overline{\square w} \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\varrho_1 - 1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} = 0,$$

$$\varrho_1 = (x+t)^2 + 2y, \quad \varrho_2 = \frac{1}{3}(x+t)^3 + y(x+t) - x.$$

$$(IX) \quad \overline{\square} w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\varrho_1 + 1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} = 0,$$

$$\varrho_1 = (x + t)^2 + 2y, \quad \varrho_2 = \frac{1}{3} (x + t)^3 + y (x + t) + t.$$

$$(X) \quad \overline{\square} w \equiv \left(1 + \frac{c^2}{\sin^2 i \varrho_2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} - \frac{1}{\varrho_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1} \left(2 + \frac{c^2}{\sin^2 i \varrho_2}\right) \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} - \\ - \frac{1}{\varrho_1^2} i \cotg i \varrho_2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - t^2} \left(\frac{x + iy}{x - iy}\right)^{\frac{ic}{2}}, \quad \varrho_2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{t}.$$

$$(XI) \quad \overline{\square} w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1^2} + \left(\frac{1}{\varrho_1^2} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial w}{\partial \varrho_1} = 0,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varrho_2 = t + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Notiamo, che per valori particolari della costante, ch'entra in qualcuno dei sottogruppi, potrà essere opportuno sostituire ai parametri ϱ_1 e ϱ_2 certe loro combinazioni opportunamente scelte, e trasformare l'equazione $\square w = 0$ servendosi di esse, anzichè porre quel valore particolare nella equazione corrispondente $\overline{\square} w = 0$. Così p. es., se nel caso (VII) per $c = 0$ si scelgono le variabili ϱ_1, ϱ_2 date dalle equazioni:

$$\varrho_1 = x + t, \quad \varrho_2^2 = x^2 + y^2 - t^2,$$

anzichè quelle date dalle equazioni $\varrho_1 = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2(x + t)}$, $\varrho_2 = x + t$, (che si deducono dalle formule generali ponendo $c = 0$) si trova come equazione delle vibrazioni

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + 2\varrho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} + 2 \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0,$$

che s'integra immediatamente e porge $w = F(\varrho_1) + \frac{1}{\varrho_1} F_2(\log \sqrt{\varrho_1} - \varrho_2)$, F_1 ed F_2 essendo simboli di funzioni arbitrarie.

4. Per esaurire la questione ci manca da considerare le congruenze di linee di lunghezza nulla nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Questo caso escluso a priori nella Memoria del Levi-Civita non si poteva escludere nel caso attuale, perchè a quelle congruenze corrispondono in generale congruenze reali nello spazio $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$.

Ci risparmiamo di riportare qui i calcoli eseguiti; solo diremo che, seguendo in questo caso la strada battuta dal Levi-Civita per determinare

la condizione, cui doveva soddisfare una congruenza di linee $X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ per essere equipotenziale, siamo potuti arrivare al seguente risultato:

L'equazione delle vibrazioni, che dipendono da due soli parametri è:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho_2^2} + \frac{2}{\varrho_2} \frac{\partial w}{\partial \varrho_2} = 0,$$

il cui integrale generale è $w = \psi(\varrho_1) + \frac{1}{\varrho_2} \chi(\varrho_1)$, le variabili ϱ_1 e ϱ_2 essendo definite dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x \cos \varrho_1 + y \sin \varrho_1 - \varphi(\varrho_1) &= t, \\ \varrho_2 + x \sin \varrho_2 - y \cos \varrho_1 + \frac{d}{d\varrho_1} \varphi(\varrho_1) &= 0, \end{aligned}$$

dove con φ, ψ, χ si indichino delle funzioni arbitrarie.

Radiotelegrafia. — *Relazione sommaria sull'esperimento di radiotelegrafia sintonica eseguito a Spezia fra le stazioni di S. Vito, Palmaria e Livorno* ⁽¹⁾, presentata dal Socio BLASERNA.

Per lo sviluppo crescente della rete radiotelegrafica, allo scopo di evitare il reciproco disturbo delle stazioni, si è imposta la necessità di sperimentare, sia i dispositivi tendenti a ridurre l'energia delle onde emesse dal radiatore delle stazioni di secondaria importanza, sia i dispositivi relativi alla sintonizzazione con apparecchi già forniti dal Marconi alla R. Marina e provveduti di due toni, l'uno detto tono A, della portata di 150 Km., e l'altro tono B della portata di 300.

Perciò il capitano di corvetta Bonomo, direttore delle esperienze radiotelegrafiche della R. Marina, concretò un programma di esperienze, affidandone lo svolgimento al tenente di vascello Villarey.

Gli esperimenti si svolsero a Spezia fra le stazioni di S. Vito, Palmaria e Livorno, queste ultime due distanti dalla prima rispettivamente 5 e 70 Km.

Gli apparati che si sono adoperati sono quelli forniti recentemente dal Marconi alla R. Marina, con i quali per ottenere il tono A, e cioè quello

(1) Comunicazione del Ministero della Marina. Direzione Generale di artiglieria ed armamenti.

che produce onde di minor lunghezza, si impiegano capacità e sorgenti di energia elettrica inferiori della metà circa di quelle del tono B.

Nell'ultima fase delle esperienze nelle tre stazioni si disponeva di aerei di circa 54 metri di altezza, quello di Livorno costituito da un filo semplice, e quelli di Palmaria e S. Vito da 4 fili riuniti in quantità e distanti tra loro metri 1,50 (in modo cioè da formare un prisma a sezione quadrata di m. 1,50 di lato).

A S. Vito i due ricevitori tono A e B con le relative macchine Morse, erano in derivazione sull'aereo unico nell'interno della stazione.

Fu innanzi tutto sperimentata la sintonia degli apparati, trasmettendo da Livorno col tono B e da Palmaria col tono A, e ciò mettendosi nelle condizioni più favorevoli per quanto riguarda la distribuzione della energia, avendo assegnato a Livorno, più distante, il tono di maggior portata.

Queste prime esperienze sortirono esito felice, inquantochè a S. Vito si poté contemporaneamente e chiaramente ricevere sia l'una che l'altra trasmissione.

Il sig. Bonomo, incoraggiato da questi risultati preliminari, soddisfacenti, pensò di ripetere le prove nelle condizioni più sfavorevoli, e cioè assegnando alla stazione più lontana (Livorno) il tono di azione più limitata, per accertarsi che la sintonia degli apparecchi potesse realizzarsi anche in questo caso.

Per attenuare gli effetti dell'eccesso di energia trasmessa dalla Palmaria fu necessario, nella stazione di S. Vito, di fare opportunamente uso di capacità e induttanze variabili, mettendole sia in serie che in derivazione fra i serrafile dei ricevitori e sull'estremità dell'aereo.

I risultati furono coronati da pieno successo, e si procederà oltre negli esperimenti per tentare di ottenere eziandio la trasmissione simultanea coi due toni.

Radiotelegrafia. — *Sulle esperienze di sintonia eseguite dalla R. Marina a Spezia.* Lettera del Comandante A. POUCHAIN, presentata dal Socio BLASERNA.

Ho l'onore di comunicare all'Accademia che il giorno 14 m. c. a Spezia si riuscì a trasmettere da S. Vito, con antenna unica e simultaneamente, nitidissimi radiotelegrammi a Livorno ed alla Palmaria.

I dispositivi erano gli stessi che per le precedenti esperienze, già comunicate all'Accademia.

Per tal fatto l'esperimento della sintonizzazione con i moderni apparati marconiani può considerarsi completo ed esauriente.

Chimica. — *Nuove ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo.* Nota di M. PADOA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

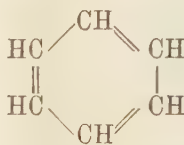
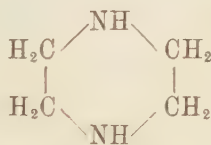
È noto da esperienze dovute principalmente a Garelli ed a Bruni che l'azoto ($N \equiv$) e il gruppo $CH \equiv$ si comportano come isomorfogeni in composti a catena aperta e chiusa.

Così danno soluzioni solide piridina e benzolo ⁽¹⁾, chinolina e isochinolina con naftalina ⁽²⁾, trifenilmetano e trifenilammina ⁽³⁾.

Tuttavia, all'infuori del caso dell'azobenzolo $C_6H_5 \cdot N \equiv N \cdot C_6H_5$ che dà miscele isomorfe con lo stilbene $C_6H_5 \cdot CH = CH \cdot C_6H_5$ ⁽⁴⁾, tutte le sostanze sperimentate contenevano nella molecola un solo atomo di azoto sostituyente un gruppo $CH \equiv$.

Io mi proposi di ricercare se l'isomorfismo si mantiene anche fra composti eterociclici poliazotati ed i corrispondenti composti omociclici.

Esperienze in questo senso vennero bensì tentate, ma con esito negativo: Bruni ⁽⁵⁾, pensando che la piperazina dovrebbe dare soluzioni solide col benzolo:



tentò di fare esperienze crioscopiche impiegando quest'ultimo come solvente: ma la piperazina non vi è solubile.

Garelli e Montanari ⁽⁶⁾ sciogliendo la fenantrolina in fenantrene:



ottennero poi pesi molecolari dei valori completamente normali.

⁽¹⁾ Paternò, *Gazzetta Chim. Ital.*, 1889, I, 663 — Van't Hoff, *Zeitschr. für physik. Ch.* V, 336 — Bruni, *Gazz. Chim. Ital.* 1898, I, 259.

⁽²⁾ Garelli, *Gazz. Chim. Ital.* 1893, II, 233.

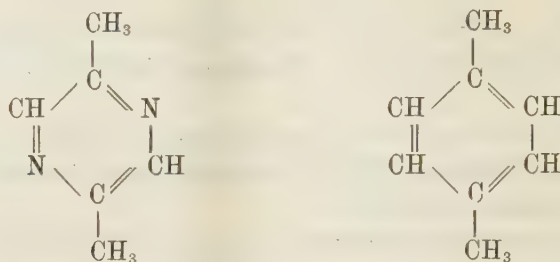
⁽³⁾ Garelli e Calzolari, *idem.* 1899, II, 283.

⁽⁴⁾ Bruni e Gorni, *idem.* 1900, I, 76.

⁽⁵⁾ *Idem.* 1898, I, 268.

⁽⁶⁾ *Gazz. Chim. Ital.* 1894, II, 233.

Io cominciai le mie esperienze impiegando la dimetilpirazina, la quale, per quanto ho detto, dovrebbe dare soluzioni solide col p.xilolo:



La dimetilpirazina fu preparata distillando una miscela di glicerina anidra con cloruro e fosfato ammonico; il distillato, seccato con potassa, venne sottoposto a distillazione frazionata. La dimetilpirazina passava a 155°; è un liquido incolore, ma può cristallizzare e fonde a 15°.

Dalle esperienze crioscopiche ebbi i seguenti risultati:

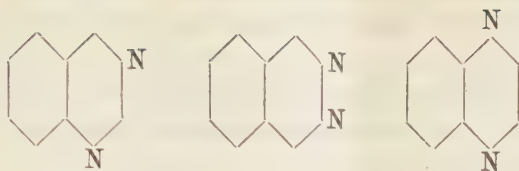
Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Pesi molecolari
Dimetilpirazina in p.xilolo (K = 43)		
$\text{C}_6\text{H}_8\text{N}_2 = 108$		
1,924	0,64	129
4,937	1,58	134
7,304	2,36	133
2,296	0,58	135
3,185	1,04	132
6,012	1,90	136
Dimetilpirazina in benzolo (K = 50)		
1,252	0,57	110
2,155	0,99	109
3,795	1,72	110

L'anomalia crioscopica, benchè non molto forte, è discretamente spiccata, ed è confermata dai numeri perfettamente normali ottenuti sciogliendo la stessa dimetilpirazina in benzolo.

Dopo un tale risultato, era naturale supporre che la tendenza a formare soluzioni solide divenisse più accentuata fra composti polinucleari fra i quali intervenissero le stesse relazioni di struttura.

Così era prevedibile, un comportamento notevolmente anormale della chinazolina, ftalazina e chinossalina, rappresentate rispettivamente dagli

schemi



sciolte in naftalina. Volli sperimentare con tutte e tre queste sostanze, anche per vedere se la posizione degli azoti influisse sulla grandezza delle eventuali anomalie.

La chinazolina impiegata, ottenuta recentissimamente per la prima volta da Gabriel ⁽¹⁾, venne gentilmente fornita dal suo scopritore; era purissima e fondeva a 48°-48°.5.

La ftalazina, pure cortesemente inviatami dal Gabriel, fondeva a 91°-92°.

La chinossalina fu preparata nel seguente modo:

Riducendo l'ortonitroanilina con stagno e acido cloridrico, si ottiene facilmente l'ortofenilendiammina; da questa, condensata col composto bisolfidico del glicosale, si prepara senza difficoltà la chinossalina. Questa bolliva a 225°-226° e fondeva a 27°.

Le esperienze crioscopiche diedero i seguenti risultati:

Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Pesi molecolari
----------------	---------------------------	-----------------

Chinazolina in naftalina (K = 70)

$C_8H_6N_2 = 130$

0,802	0,39	144
1,538	0,77	140
2,463	1,24	139

Ftalazina in naftalina

$C_8H_6N_2 = 130$

1,025	0,48	149
2,078	0,95	153
3,022	1,35	157

Chinossalina in naftalina

$C_8H_6N_2 = 130$

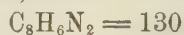
1,271	0,65	137
2,395	1,17	143
3,473	1,71	142

(1) Bericht, XXXVI, 800.

Contrariamente a quanto avevo supposto, le anomalie sono poco sensibili, e appariscono tutte della medesima grandezza, quando si tenga conto dei diversi punti di fusione delle sostanze impiegate. Per assicurarmi che tali anomalie tuttavia esistessero, eseguii alcune determinazioni sciogliendo le stesse sostanze in un solvente che presenta delle costanti crioscopiche vicine a quelle della naftalina, e cioè in difenile:

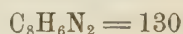
Concentrazioni Abbassamenti termometrici Pesì molecolari

Chinazolina in difenile ($K = 80$)



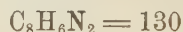
1,140	0,69	132
2,177	1,29	135
3,186	1,88	136

Ftalazina in difenile



0,747	0,45	132
1,444	0,86	134

Chinossalina in difenile

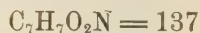


0,953	0,52	133
1,978	1,215	130
3,429	2,08	132

Avendo osservato che la chinossalina, per le sue proprietà fisiche, si sarebbe bene prestata ad esperienze crioscopiche, ne determinai la costante d'abbassamento del punto di congelamento sciogliendovi il p.nitrotoluolo e il difenile.

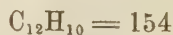
Concentrazioni Abbassamenti termometrici Depressione molecolare

P.nitrotoluolo in chinossalina



1,998	1,13	86,1
3,056	2,01	90,1
4,540	2,98	89,9

Difenile in chinossalina



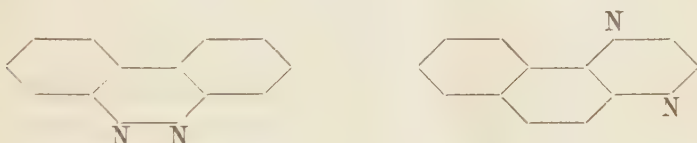
2,321	1,33	88,2
4,449	2,56	88,6
6,697	3,85	88,6

Preso come valore medio $K = 89$, feci una determinazione di peso molecolare della naftalina in chinossalina:

Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Pesi molecolari
Naftalina in chinossalina ($K = 89$)		
		$C_{10}H_8 = 128$
0,975	0,65	133
1,922	1,17	131
2,694	1,84	128

Come si vede, il comportamento è perfettamente normale; la naftalina non può dunque cristallizzare nella forma della chinossalina.

Poichè le esperienze con sostanze contenenti due nuclei chiusi avevano dato risultati diversi da quelli previsti, ed anche per chiarire il fatto già accennato che la fenantrolina si comporta normalmente sciolta in fenantrene, volli ancora sperimentare su composti azotati del tipo del fenantrene, e come tali impiegai il fenazone e la naftochinossalina:



Il fenazone mi venne gentilmente fornito dal prof. Täuber che l'ottenne pel primo ⁽¹⁾. Era puro e fondeva a 151° .

La naftochinossalina fu ottenuta nel modo seguente ⁽²⁾: dal cloruro di diazobenzolo con β .naftilammina, preparai la fenilazo- β .naftilammina; questa, ridotta con zinco e acido acetico dà la α,β .naftilendiammina. Condensando quest'ultima, come nella preparazione della chinossalina, col composto bisolfidico del gliossale, ottenni la naftochinossalina. Questa si presenta in aghetti incolori fondenti a 62° .

Le esperienze crioscopiche diedero il risultato seguente:

Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Pesi molecolari
Fenazone in fenantrene ($K = 120$)		
		$C_{12}H_8N_2 = 180$
0,962	0,68	170
1,855	1,28	174
2,769	1,84	180

⁽¹⁾ Berichte, XXIV, 3085.

⁽²⁾ Hinsberg, Berichte, XXIII, 1394.

Naftochinossalina in fenantrene

$$C_{12}H_8N_2 = 180$$

0,909	0,62°	176
1,930	1,28	181
3,140	2,10	180

Contrariamente ad ogni previsione, il comportamento è perfettamente normale. Ciò è tanto più strano in quanto che il fenazone non differisce dall'azobenzolo che per un semplice legame fra due atomi di carbonio nello stesso modo che il fenantrene differisce dallo stilbene: e, come ho già detto, l'azobenzolo è completamente isomorfo con lo stilbene. Del resto, come si vede dalle seguenti misure, nessun rapporto cristallografico sembra sussistere fra fenazone e fenantrene:

Fenazone⁽¹⁾: monoclinio olo-

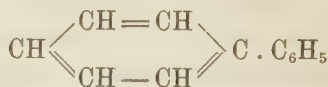
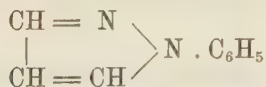
edrico,

$$0,99146 : 1 : 0,58490$$

$$\beta = 69^{\circ},9^1$$

Fenantrene⁽²⁾: monoclinio, 1,4093 : 1 : ? [001:110]:[001:110]=109°,17

Per ultimo ho eseguito un'esperienza impiegando l'n.fenilpirazolo. È noto da lungo tempo⁽³⁾ che il pirrolo dà soluzioni solide col benzolo, e che anzi l'anomalia crioscopica è in questo caso più notevole di quella data dalla piridina sciolta in benzolo. Sono dunque isomorfogeni i gruppi — NH — e — CH=CH —: però è da prevedere che diano soluzioni solide il pirazolo col benzolo, ed a maggior ragione il fenilpirazolo col difenile:



Preparai l'n.fenilpirazolo condensando, come insegna Balbiano⁽⁴⁾, l'epicloridrina con la fenilidrazina. Il fenilpirazolo bolliva a 245° e fondeva a 12°.

Le determinazioni di peso molecolare eseguite in difenile, ed anche, per ragioni già dette, in naftalina, condussero ai numeri seguenti:

Concentrazioni Abbassamenti termometrici Pesì molecolari

Fenilpirazolo in difenile (K = 80)

$$C_9H_8N_2 = 144$$

1,733	0,89°	156
3,813	1,95	157
6,020	3,02	160

(1) Fock, Zeitschr. für Kryst., 32, 253.

(2) Negri, Gazz. Chim. Ital. 1893, II, 377.

(3) Magnanini, idem 1889, 141.

(4) Idem 1887, 177.

Fenilpirazolo in naftalina ($K = 70$)

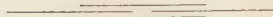
1,949	0,89	153
4,189	1,94	151

L'anomalia, dunque, o non sussiste affatto, oppure è debolissima; ciò non esclude tuttavia che gli altri fenilpirazoli possano dare nel difenile delle anomalie più sensibili, tanto più che essi fondono a temperatura più elevata.

Dalle esperienze finora eseguite, nonostante parecchi risultati siano affermativi, non si può concludere che si abbia in generale l'attitudine a formare soluzioni solide fra composti eterociclici poliazotati ed i corrispondenti composti omociclici.

E però mi riserbo di proseguire le ricerche eseguendo determinazioni quantitative ed impiegando nuove sostanze.

V. C.





RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 giugno 1903.

P. VILLARI, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una classe di covarianti simultanei di una forma differenziale di ordine qualunque, e di una alle derivate parziali.* Nota III del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Questa Nota fa seguito alle altre due da me pubblicate da poco tempo in questi medesimi Rendiconti ⁽¹⁾.

I simboli introdotti nella Nota II, e che abbiamo chiamati, per ragioni dette a suo luogo, *simboli a carattere invariante*, hanno, fra le altre, anche la notevole proprietà che mediante essi si esprimono i coefficienti di tutta una importante classe di covarianti, che nella presente Nota imprendiamo a studiare, essendo essi che si presentano nel problema della riduzione di Pfaff per le forme differenziali di ordine qualunque.

Nella costruzione che faremo dell'anzidetta classe, questa ci apparirà poi come avente per ultimo rappresentante quell'invariante di cui abbiamo già fatto osservare l'esistenza sin dall'anno passato in una Nota presentata all'Istituto Lombardo ⁽²⁾, e donde, come già dicemmo, abbiamo preso le mosse nelle presenti ricerche.

⁽¹⁾ Rend. della R. Acc. dei Lincei (5), t. XII, 1903, 1° sem., pagg. 325-332 e 365-377.

⁽²⁾ Rend. Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902, pagg. 691-700.

1. *I covarianti evidenti connessi alla forma data e formole relative.* — Data la forma differenziale di ordine r , i cui coefficienti sono le X ad uno, due, tre, ... r indici, le altre forme differenziali di ordini $r-1, r-2, \dots, 2, 1$, i cui coefficienti sono rispettivamente le stesse X sino a quelle ad $r-1$ indici, le stesse sino a quelle ad $r-2$ indici, e così di seguito, sono tutte covarianti della data, come si riconosce a colpo d'occhio, osservando le formole (7) della Nota I, dalle quali apparisce che una trasformata (cioè una Y) a μ indici si esprime mediante le antiche X che hanno un numero eguale o minore di indici. Questi covarianti li chiameremo perciò *i covarianti evidenti connessi alla forma data*, e li indicheremo con $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(r-1)}$, conservando così la notazione introdotta colla formola (1) della Nota I; essi formano una successione di cui l'ultimo rappresentante può ritenersi che sia $X^{(r)}$, cioè la forma stessa.

Vogliamo ora cominciare a trovare una formola riguardante il differenziale di una $X^{(s)}$ qualunque della predetta successione.

Si ha:

$$\begin{aligned} dX^{(s)} &= d \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} = \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_i \frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} + \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} d \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} \end{aligned}$$

e adoperando le formole (16) e (17) della Nota I, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} dX^{(s)} &= \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_i \frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} + \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s+1)} - \\ &\quad - \sum_{m=2}^s \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} dx_{j_m} \delta_{j_1 \dots j_{m-1}}^{(s)}. \end{aligned}$$

Mutando nell'ultimo termine m in $m+1$, ponendovi $j_{m+1} \equiv i$, e aggiungendo e togliendo il termine

$$\sum_{j_1 \dots j_{s+1}} X_{j_1 \dots j_{s+1}} \delta_{j_1 \dots j_{s+1}}^{(s+1)}$$

e osservando che

$$dx_{j_{s+1}} \delta_{j_1 \dots j_s}^{(s)} = \delta_{j_1 \dots j_{s+1}}^{(s+1)}$$

si ha infine la formola:

$$(1) \quad dX^{(s)} = X^{(s+1)} + X^{(s,1)}$$

introducendo la notazione

$$\begin{aligned} X^{(s,1)} &= \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} \left[\sum_i \left(\frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}}{\partial x_i} - X_{j_1 \dots j_m i} \right) dx_i \right] \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} \\ &= \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} \left[\sum_i ((j_1 \dots j_m, i)) dx_i \right] \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} \end{aligned}$$

in cui la doppia parentesi sta a indicare uno dei noti simboli introdotti nella Nota II.

La $X^{(s,1)}$ non è altro in sostanza che ciò che si ottiene da $X^{(s)}$, quando al posto dei coefficienti $X_{j_1 \dots j_m}$ si sostituiscono le forme differenziali di primo ordine:

$$(3) \quad \sum_i ((j_1 \dots j_m, i)) dx_i.$$

Dalla formola (1) ora per induzione otterremo la formola per il differenziale qualunque p^{mo} di $X^{(s)}$.

Ponendo in generale

$$(4) \quad X^{(s,p)} = \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^p \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_v} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v)) \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)}$$

dico che si ha:

$$(5) \quad d^p X^{(s)} = \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} X^{(s+p-q, q)}$$

dove per $X^{(m,0)}$ si intende semplicemente $X^{(m)}$.

Per dimostrare la (5) basterà trovare la formola per il differenziale di (4). Ora si vede che la (4) si ottiene da $X^{(s)}$ ponendo al posto dei coefficienti $X_{j_1 \dots j_m}$ le forme differenziali di primo ordine

$$(6) \quad \sum_{v=1}^p \sum_{i_1 \dots i_v} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v)) \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)}$$

che indicheremo col simbolo $X_{j_1 \dots j_m}^{(0,p)}$.

Per trovare quindi il differenziale di (4) si potrà servirsi di una formola come la (1), intendendo però che i simboli in parentesi doppia che compaiono in $X^{(s,1)}$ devono essere sostituiti da quelli formati colle quantità (6). Si ha:

$$dX^{(s,p)} = X^{(s+1,p)} + \sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} \left[\sum_i \left(\frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}^{(0,p)}}{\partial x_i} - X_{j_1 \dots j_m i}^{(0,p)} \right) dx_i \right] \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)}$$

Intanto, tenendo conto di (6),

$$\frac{\partial X_{j_1 \dots j_m}^{(0,p)}}{\partial x_i} - X_{j_1 \dots j_m i}^{(0,p)} = \sum_{v=1}^p \sum_{i_1 \dots i_v} \left[\frac{\partial ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v))}{\partial x_i} - ((j_1 \dots j_m i, i_1 \dots i_v)) \right] \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)} + \\ + \sum_{v=1}^p \sum_{i_1 \dots i_v} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v)) \frac{\partial \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)}}{\partial x_i}$$

onde, tenendo conto della relazione già dimostrata nella Nota II:

$$\frac{\partial ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v))}{\partial x_i} - ((j_1 \dots j_m i, i_1 \dots i_v)) = ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v i)),$$

osservando che:

$$\sum_i \frac{\partial \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)}}{\partial x_i} dx_i = d \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)}$$

e ricordando le formole (16) (17) della Nota I, si ha:

$$dX^{(s,p)} = X^{(s+1,p)} + \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^p \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_v i} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v i)) dx_i \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} + \\ + \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^p \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_v} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v)) \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p+1)} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} - \\ - \sum_{m=1}^s \sum_{v=2}^p \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_v} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v)) \frac{1}{v} S_{i_v} dx_{i_v} \delta_{i_1 \dots i_{v-1}}^{(p)} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)}.$$

In questa formola vi sono tre gruppi di sommatorii; nell'ultimo, essendo gli indici $i_1 \dots i_v$ sottoposti a $\sum_{i_1 \dots i_v}$, le due operazioni $\frac{1}{v}$ e S_{i_v} si distruggono; nel primo si muti v in $v-1$, indi si ponga i_v al posto di i ; con ciò si riconosce che tutto il primo gruppo di sommatorii, meno solo un termine, si distrugge coll'ultimo gruppo; il termine rimasto può scriversi:

$$\sum_{m=1}^s \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_{p+1}} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_{p+1})) \delta_{i_1 \dots i_{p+1}}^{(p+1)} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)}$$

osservando al solito che

$$dx_{p+1} \delta_{i_1 \dots i_p}^{(p)} = \delta_{i_1 \dots i_{p+1}}^{(p+1)}.$$

Ora questo termine è come quelli della seconda riga della precedente formola, il cui sommatorio rispetto a r resta perciò da estendersi da $r = 1$ a $r = p + 1$, ed osservando che allora i termini di tal seconda riga vengono a formare $X^{(s, p+1)}$, si ha infine la formola semplicissima ed elegante:

$$(7) \quad dX^{(s, p)} = X^{(s+1, p)} + X^{(s, p+1)}$$

che contiene come particolare la (1).

Se ora differenziamo la (5) e teniamo conto di (7) si ottiene una formola precisamente come la (5) ma in cui si sia mutato p in $p + 1$; ciò dimostra per induzione la (5) stessa, ricordando che essa è vera per $p = 1$.

Similmente può dimostrarsi la formola più generale:

$$(8) \quad d^m X^{(s, p)} = \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} X^{(s+m-q, p+q)}$$

che per $m = 1$ dà luogo alla (7) e per $p = 0$ dà luogo alla (5).

Le $X^{(s, p)}$, introdotte colla formola (4), sono covarianti.

La dimostrazione di ciò si deduce da quanto abbiamo dimostrato nella Nota II, cioè che i simboli $((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v))$ si trasformano come i prodotti $X_{j_1 \dots j_m} X_{i_1 \dots i_v}$. Da ciò risulta che $X^{(s, p)}$ si trasforma esattamente come il prodotto $X^{(s)} X^{(p)}$, e quindi, come questo prodotto, è un covariante.

2. *Introduzione di espressioni più generali delle $X^{(s, p)}$ del paragrafo precedente e relazioni fra esse.* — Le espressioni $X^{(s, p)}$ introdotte nel paragrafo precedente soddisfanno alla relazione (7), e quindi alla (8), e sono, come abbiamo detto, covarianti. Formeremo ora delle espressioni più generali le quali soddisfanno ancora a relazioni come (7) e (8), ma che non sono più covarianti, ma sibbene alcuni di essi sono coefficienti di covarianti. La ragione di questa introduzione sta in ciò, che dovremo fra tali espressioni stabilire certe relazioni le quali ci saranno indispensabili per trasformare, secondo un certo intento, il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima alla forma differenziale data, argomento di cui tratteremo nella Nota seguente.

Poniamo (più generalmente che colle formole (4) e (6)):

$$(9) \quad X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(s, p)} = \sum_{m=1}^s \sum_{v=1}^p \sum_{j_1 \dots j_m} \sum_{i_1 \dots i_v} ((h_1 \dots h_\sigma j_1 \dots j_m, k_1 \dots k_\pi i_1 \dots i_v)) \delta_{j_1 \dots j_m}^{(s)} \delta_{i_1 \dots i_v}^{(p)}.$$

Per $s = 0$ intenderemo soppresso il sommatorio rispetto ad m , quello rispetto alle j , sopprese le j e la $\delta^{(s)}$; similmente per $p = 0$.

Quando $\pi = 0$ ovvero $\sigma = 0$ scriveremo rispettivamente:

$$X_{h_1 \dots h_\sigma, 0}^{(s, p)}, X_{0, k_1 \dots k_\pi}^{(s, p)}, X_{0, 0}^{(s, p)},$$

essendo quest'ultimo lo stesso che $X^{(s,p)}$ dato dalla formola (4). Per $s = 0$, $p = 0$, poniamo:

$$X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(0,0)} = ((h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi)),$$

e per $s = 0$, $p = 0$, $\pi = 0$, semplicemente:

$$X_{h_1 \dots h_\sigma, 0}^{(0,0)} = X_{h_1 \dots h_\sigma}.$$

Questa formazione (9) comprende, come particolari, tutte quelle finora introdotte e studiate; comprende i simboli da noi chiamati *secondarii* (Nota II) e comprende i coefficienti della forma data.

Ora è evidente, senza ulteriori calcoli, che la (9) soddisfa, come la (4), a:

$$(10) \quad dX_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(s,p)} = X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(s+1,p)} + X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(s,p+1)}.$$

Basta per ciò osservare che i calcoli del paragrafo precedente possono ripetersi, senza sostanziali modificazioni, per il caso nostro, giacchè se in quei calcoli alla parentesi

$$((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_v))$$

si sostituisce sempre l'altra

$$((h_1 \dots h_\sigma j_1 \dots j_m, k_1 \dots k_\pi i_1 \dots i_v)),$$

si può procedere nella stessa maniera, e ottenere i medesimi risultati.

Dalla (10), nello stesso modo con cui si è ottenuto la (8), si può poi ottenere l'altra:

$$(11) \quad d^m X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(s,p)} = \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(s+m-q, p+q)}.$$

Altro relazioni cui soddisfanno le (9) sono le seguenti:

$$(12) \quad \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} d^{k-s} X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(p+s, q)} = X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(p, q+k)}$$

$$(13) \quad \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} d^{k-s} X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(p, q+s)} = X_{h_1 \dots h_\sigma, k_1 \dots k_\pi}^{(p+k, q)}$$

la dimostrazione delle quali si può far procedere per induzione. Per $k = 0$ le due formole risultano evidentemente identiche; dimostriamo che sussistendo per k sussisteranno per $k + 1$. Per ciò fare basta differenziare primo e secondo membro di (12), e indi sottrarre la (12) stessa in cui si sia prima

mutato p in $p+1$. Tenendo allora conto della (10), possiamo scrivere:

$$\sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} d^{k+1-s} X_{h,k}^{(p+s, q)} - \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} d^{k-s} X_{h,k}^{(p+1+s, q)} = X_{h,k}^{(p, q+h+1)}$$

e se nel secondo sommatorio mutiamo s in $s-1$ e indi raccogliamo e riduciamo i termini simili, otteniamo precisamente la stessa (12) in cui si sia mutato k in $k+1$. Analogamente si dimostra la (13). Di queste ultime relazioni avremo bisogno di servirci nella Nota seguente.

3. *Covarianti simultanei di una forma differenziale e di una alle derivate parziali.* — Sia ora data una espressione di ordine q lineare nelle derivate parziali di una funzione indeterminata f , come quelle considerate nella Nota inserita nei Rendiconti dell' Istituto Lombardo e citate in principio:

$$(14) \quad \sum_{s=1}^p \sum_{i_1 \dots i_s} \xi_{i_1 \dots i_s} \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}$$

e formiamo:

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}^{(\mu)} &= \sum_{s=1}^p \sum_{i_1 \dots i_s} \xi_{i_1 \dots i_s} X_{i_1 \dots i_s, 0}^{(0, \mu)} = \\ &= \sum_{s=1}^p \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i_1 \dots i_s} \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_{i_1 \dots i_s} ((i_1 \dots i_s, j_1 \dots j_m)) \delta_{j_1 \dots j_m}^{(\mu)} \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}^{(\mu)} &= \sum_{s=1}^p \sum_{i_1 \dots i_s} \xi_{i_1 \dots i_s} X_{0, i_1 \dots i_s}^{(\mu, 0)} = \\ &= \sum_{s=1}^p \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i_1 \dots i_s} \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_{i_1 \dots i_s} ((j_1 \dots j_m, i_1 \dots i_s)) \delta_{j_1 \dots j_m}^{(\mu)} \end{aligned}$$

Noi faremo vedere che queste formazioni sono *covarianti*; ma prima di far ciò è necessario discutere sui possibili valori che possono avere i numeri q e μ .

Se supponiamo che la forma differenziale data sia di ordine r , poniamo che l'ordine q della (14) non superi r ; cioè sia $q \leq r$.

Il numero μ in (15) non può superare $r-q$, perchè altrimenti in $\mathcal{A}^{(\mu)}$ vi sarebbero, come è facile riconoscere tenendo conto di (9), dei simboli secondarii di cui il numero totale degli indici sarebbe $q+\mu$ cioè maggiore di r , e tali simboli non esistono. Lo stesso è da osservarsi per la (16), avvertendo però che per un $\mathcal{A}^{(\mu)}$ il numero q non può supporre, come per un $\mathcal{A}^{(\mu)}$, eguale a r , ma essenzialmente minore di r , giacchè se

fosse $q = r$, in $\mathcal{A}^{(\mu)}$ vi sarebbero dei simboli *secondarii* in cui il gruppo dei secondi indici sarebbe formato di r indici, e quindi, non potendo oltrepassare r il numero totale degli indici, il gruppo dei primi indici non potrebbe comparirvi; ma simboli secondarii di tal natura non hanno significato, mentre l'hanno (sono eguali ai coefficienti medesimi della forma) quelli in cui scompaia invece il gruppo dei secondi indici.

La dimostrazione della invariantività delle \mathcal{A} e \mathcal{A} si fa in modo simile a quello tenuto nel paragrafo 2.

Osserviamo che, come abbiamo già dimostrato nella Nota II, i simboli $((i_1 \dots i_s, j_1 \dots j_m))$ si trasformano precisamente come i prodotti $X_{i_1 \dots i_s} X_{j_1 \dots j_m}$; sostituendo allora questi prodotti a quei simboli si deduce che $\mathcal{A}^{(\mu)}$ si trasforma precisamente come

$$\sum_{s=1}^q \sum_{i_1 \dots i_s} \xi_{i_1 \dots i_s} X_{i_1 \dots i_s} \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{j_1 \dots j_m} X_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{(\mu)}.$$

Ma questa espressione è il prodotto dell'*invariante* \mathcal{A} già studiato nella Nota inserita nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, per il covariante evidente $X^{(\mu)}$, dunque resta provato che $\mathcal{A}^{(\mu)}$ si muta in sè stesso. E similmente si procede per $\mathcal{A}^{(\mu)}$.

Nella predetta Nota abbiamo osservato che \mathcal{A} perderebbe la invariantività se fosse q maggiore di r ; ciò spiega la ragione della limitazione $q \leq r$ da noi posta di sopra.

Collo stesso semplice metodo può dimostrarsi l'invariantività anche di un'altra espressione: sia data un'altra forma alle derivate parziali (di ordine $\mu \leq r$), con coefficienti ξ' (che però in particolare potrebbero anche essere eguali ai ξ), e formiamo:

$$G = \sum_{s=1}^q \sum_{m=1}^{\mu} \sum_{i_1 \dots i_s} \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_{i_1 \dots i_s} \xi'_{j_1 \dots j_m} ((i_1 \dots i_s, j_1 \dots j_m))$$

Si dimostra come sopra che: G è un *invariante simultaneo della forma differenziale e delle due alle derivate parziali*. Per ragioni simili a quelle suesposte deve naturalmente qui supporre $q + \mu \leq r$. Per il caso di $r=2$, non può quindi essere che al più $q=1$, $\mu=1$, e la Ω diventa un invariante come quello indicato anche con G nelle formole (10) dell'altra mia Nota: *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second'ordine*, ecc., pubblicata l'anno scorso in questi medesimi Rendiconti (1).

(1) (5), t. XI, 1902, 2° sem., pagg. 105-112.

È utile infine notare che fra le formazioni $\mathcal{A}^{(\mu)}$ vi è compresa anche quella per $\mu = 0$, $\mathcal{A}^{(0)}$ che non è altro che l'invariante \mathcal{A} , da noi già più volte ricordato.

4. *Caso in cui la forma alle derivate parziali sia di 1° ordine, cioè sia il simbolo di una trasformazione infinitesima.* — Un caso degno di essere messo specialmente in rilievo è quello di $q = 1$, perchè è questo il caso che avremo direttamente da applicare nella soluzione del problema di Pfaff.

Per uniformarci alle notazioni da noi già introdotte per il caso del 2° ordine i covarianti (15) e (16) per il caso di $q = 1$ li chiameremo rispettivamente $C^{(\mu)}$ e $D^{(\mu)}$, cioè porremo:

$$(17) \quad C^{(\mu)} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_i \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_i((i, j_1 \dots j_m)) \delta_{j_1 \dots j_m}^{(\mu)}$$

$$(18) \quad D^{(\mu)} = \sum_{m=1}^{\mu} \sum_i \sum_{j_1 \dots j_m} \xi_i((j_1 \dots j_m, i)) \delta_{j_1 \dots j_m}^{(\mu)}$$

in cui μ può al più essere eguale a $r - 1$.

Poichè queste espressioni non contengono coefficienti X con più di $\mu + 1$ indici, e poichè $X^{(\mu+1)}$ è un covariante di $X^{(r)}$, così può dirsi che C e D sono anche covarianti di $X^{(\mu+1)}$.

Sommando o sottraendo, e introducendo i *simboli principali* abbiamo altri covarianti. Convien allora distinguere il caso di μ pari da quello di μ dispari. Porremo, in relazione alle *due* specie di simboli principali:

$$(19) \quad \begin{cases} L^{(2\mu)} = C^{(2\mu)} + D^{(2\mu)} & , \quad E^{(2\mu)} = -C^{(2\mu)} + D^{(2\mu)} \\ L^{(2\mu+1)} = -C^{(2\mu+1)} + D^{(2\mu+1)} & , \quad E^{(2\mu+1)} = C^{(2\mu+1)} + D^{(2\mu+1)} \end{cases}$$

e allora si ha sempre (sia q pari o q dispari):

$$(20) \quad L^{(q)} = \sum_i \xi_i \sum_j [(j_1 \dots j_p i) \delta_{j_1 \dots j_p}^{(p)} + \{j_1 \dots j_{p-1} i\} \delta_{j_1 \dots j_{p-1}}^{(p)} + \\ + (j_1 \dots j_{p-2} i) \delta_{j_1 \dots j_{p-2}}^{(p)} + \dots]$$

$$(21) \quad E^{(q)} = \sum_i \xi_i \sum_j [\{j_1 \dots j_p i\} \delta_{j_1 \dots j_p}^{(p)} + (j_1 \dots j_{p-1} i) \delta_{j_1 \dots j_{p-1}}^{(p)} + \\ + \{j_1 \dots j_{p-2} i\} \delta_{j_1 \dots j_{p-2}}^{(p)} + \dots].$$

I covarianti L si presenteranno, come vedremo, nello studio dell'applicazione di una trasformazione infinitesima alla forma differenziale; le quantità in parentesi sia in L che in E hanno una formazione ben chiara; per una L cominciano sempre coi simboli principali di prima specie, e indi procedono, alternandosi, simboli di prima con simboli di seconda specie; per una E invece si comincia coi simboli di seconda specie e indi si procede alternativamente come sopra.

Una osservazione è ora di fondamentale importanza per le cose che dovremo dire in seguito.

La $L^{(p)}$ non contiene coefficienti X a più di p indici; quindi essa può anche considerarsi come un covariante di $X^{(p)}$, mentre non può dirsi lo stesso della $E^{(p)}$ e delle $C^{(p)}$, $D^{(p)}$ le quali possono considerarsi come covarianti solo di $X^{(p+1)}$ e delle altre forme di ordine superiore.

Di qui ne viene che per una $X^{(r)}$ fondamentale, mentre non esistono le $C^{(r)}$, $D^{(r)}$, $E^{(r)}$, esiste invece, la $L^{(r)}$, ed anzi è proprio questa che ci si presenterà nel problema cui abbiamo di sopra accennato.

5. *Caso delle forme differenziali di 1° ordine e di r^{mo} grado.* — Per completare la ricerca poniamoci infine nelle condizioni del paragrafo 5 della Nota II. Dei covarianti (20) e (21) non restano allora che $E^{(r-1)}$ e $L^{(r)}$, i quali risultano rispettivamente:

$$(22) \quad E^{(r-1)} = -2 \sum_i \sum_j \xi_i X_{j_1 \dots j_{r-1} i} \delta_{j_1 \dots j_{r-1}}^{(r-1)}$$

$$(23) \quad L^{(r)} = \sum_i \xi_i \sum_j \left\{ \left[\begin{matrix} j_1 & \dots & j_r \\ i \end{matrix} \right] \delta_{j_1 \dots j_r}^{(r)} - 2 X_{j_1 \dots j_{r-1} i} \delta_{j_1 \dots j_{r-1}}^{(r)} \right\}$$

di cui il primo è evidente da sè, e il secondo è quello che per $r=2$ è stato rilevato colla formola (15) della Nota: *Sulla teoria invariante*, ecc.

sopracitata, notando però che il simbolo $\left[\begin{matrix} i & j \\ s \end{matrix} \right]$ ivi adoperato, essendo esattamente il simbolo di Christoffel sotto la forma ordinariamente per esso adoperata, si ottiene da quello che noi nella Nota II abbiamo indicato con $\left[\begin{matrix} j_1 & \dots & j_r \\ i \end{matrix} \right]$, oltrechè ponendo $r=2$, moltiplicandolo anche per $-\frac{1}{2}$.

Matematica. — *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni.* Nota del Corrispondente G. RICCI.

Il sig. Hadamard ⁽¹⁾ ha posto il problema di determinare quelle varietà, che ne contengono altre da lui dette *superficie geodetiche* perchè tali che le loro linee geodetiche sono linee geodetiche anche per le varietà, in cui si considerano immerse. Egli ha anche assegnato una espressione canonica per i ds^2 di quelle varietà a tre dimensioni, le quali godono della proprietà che per ogni loro punto passa una infinità di superficie geodetiche.

Partendo da formole stabilite in altra mia Nota ⁽²⁾, io pongo in equazione il problema generale proposto dal sig. Hadamard nel modo seguente. Considerando una varietà V_{n+m} ad $n + m$ dimensioni come definita per mezzo del suo ds^2 e assumendo una varietà V_n ad n dimensioni in essa immersa come indeterminata, stabilisco un sistema di equazioni a derivate parziali, che deve essere reso integrabile dalla espressione φ del ds^2 di V_n perchè esistano in V_{n+m} delle superficie geodetiche V_n . Questo sistema integrato per una determinata φ porge una intera classe di superficie geodetiche di V_{n+m} .

Il problema di determinare le varietà V_{n+1} tali che per ogni loro punto passi un numero finito di superficie geodetiche V_n equivale a quello di riconoscere se le superficie V_n , che tagliano ortogonalmente una congruenza normale data di linee tracciate in V_{n+1} sono geodetiche; ed è qui risolto in generale.

Prendo poi in esame il problema risolto dal sig. Hadamard e, assieme ai risultati già da lui stabiliti, determino le caratteristiche intrinseche delle V_3 , per ogni punto delle quali passa una infinità di superficie geodetiche. Risulta da esse che le traiettorie ortogonali ad una famiglia di superficie geodetiche di una V_3 costituiscono sempre una congruenza principale di essa V_3 ; dal che segue prima di tutto che le curvature principali di una V_3 di Hadamard non possono essere tutte distinte. Se esse sono tutte eguali, si ha il caso ben noto dello spazio ordinario euclideo o no; se, invece, due di esse soltanto sono eguali e se di più la congruenza corrispondente

(1) Cfr. *Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions*. Tome XXV^e de la 2^e Série du Bulletin des sciences mathématiques.

(2) Cfr. *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 4 maggio 1902.

alla terza curvatura principale è insieme normale, geodetica ed isotropa, si ha il caso di Hadamard.

La risoluzione del problema di Hadamard nel caso di $n=3$ è dunque intimamente congiunta colla considerazione di quelle, che io ho chiamate *congruenze e curvatures principali* di una V_3 , le quali sono di importanza fondamentale in tutte le ricerche, che riguardano la struttura intima di queste varietà. La risoluzione dei problemi analoghi per le varietà di un maggior numero di dimensioni dipende certamente da una opportuna estensione di quei concetti.

Questa Nota fa seguito a quella citata sopra sulle *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura*, di cui conserverò qui le notazioni, e che citerò, occorrendo, colla lettera N, mentre citerò con M il *Riassunto sui metodi di Calcolo differenziale assoluto e loro applicazioni*, pubblicato dal prof. Levi-Civita e da me nel vol. LIV dei *Mathematische Annalen*.

1. Il prof. Bianchi in questi Rendiconti (1) ha poste in evidenza alcune identità differenziali, che legano i simboli di Riemann, che si incontrano nella teoria della trasformazione delle forme differenziali quadratiche, a quelli di Christoffel. Nel caso delle forme ternarie ai simboli di Riemann, che costituiscono un sistema quadruplo covariante, se ne possono, come è noto, sostituire altri costituenti un sistema doppio controvariante. Se, seguendo le mie notazioni, quelli si indicano con $a_{pq,rs}$ e questi con $\alpha^{(uv)}$ e si introduce il sistema covariante triplo di elementi ε_{rst} (M, I, 3) le relazioni, che passano tra il sistema di elementi $a_{pq,rs}$ e quello di elementi $\alpha^{(uv)}$ si possono scrivere come segue:

$$a_{pq,rs} = \sum_1^3 \varepsilon_{pqu} \varepsilon_{rsu} \alpha^{(uv)} ;$$

ovvero

$$a_{pq,rs} = \sum_1^3 \alpha^{(uv')} \alpha^{(v'v)} \varepsilon_{pqu} \varepsilon_{rsu} \alpha_{u'v'} ,$$

denotandosi con $\alpha_{u'v'}$ il sistema reciproco al sistema $\alpha^{(uv)}$. Ne seguono per derivazione covariante le

$$a_{pq,rst} = \sum_1^3 \alpha^{(uv')} \alpha^{(v'v)} \varepsilon_{pqu} \varepsilon_{rsu} \alpha_{u'v't} .$$

Colla convenzione di riguardare come equivalenti gli indici, che differiscono per multipli di 3, le formole di Bianchi si possono scrivere come

(1) Seduta del 5 gennaio 1902.

segue:

$$a_{pq,rr+1\ r+2} + a_{pq,rr+2\ rr+1} + a_{pq,rr+1\ r+2r} = 0$$

e per le precedenti assumono la forma

$$\sum_1^3 \alpha_{uv'v''} \alpha^{(uv')} \alpha^{(vv'')} \varepsilon_{pqu} \alpha_{u'v'v} = 0;$$

o la equivalente

$$\sum_1^3 \alpha^{(vw)} \alpha_{uvw} = 0.$$

Se poi (M, II, 1) si introduce una tripla di riferimento [1], [2], [3] di sistemi coordinati covarianti $\lambda_{h/u}$ ($h, u = 1, 2, 3$) e si pone

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha_{uv} &= \sum_1^3 \omega_{hk} \lambda_{h/u} \lambda_{k/v} \\ \lambda_{h/uv} &= \sum_1^3 \gamma_{hij} \lambda_{i/u} \lambda_{j/v}, \end{aligned}$$

le formole di Bianchi per le varietà a tre dimensioni assumono la forma

$$(2) \quad \sum_k^3 \left\{ \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial s_k} + \sum_i^3 (\omega_{hk} \gamma_{kii} - \omega_{ik} \gamma_{hki}) \right\} = 0.$$

In particolare, se ci riferiamo ad una tripla principale per modo che le (1) assumano la forma

$$\alpha_{uv} = \sum_1^3 \omega_h \lambda_{h/u} \lambda_{h/v}$$

le (2) ci danno

$$\frac{\partial \omega_h}{\partial s_h} = \sum_i^3 (\omega_i - \omega_h) \gamma_{hii}.$$

Per $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ da queste scende per $n=3$ (come ha osservato il Bianchi per una varietà qualunque ad n dimensioni) un ben noto teorema di Schur. Nella ipotesi $\omega_2 = \omega_3 = \omega$, $\omega_1 \neq \omega$ si hanno invece le formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial s_1} + (\omega_1 - \omega) (\gamma_{122} + \gamma_{133}) &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial s_2} + (\omega - \omega_1) \gamma_{211} &= 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_3} + (\omega - \omega_1) \gamma_{311} = 0. \end{aligned}$$

Se si suppone geodetica la congruenza [1], è $\gamma_{211} = \gamma_{311} = 0$ e però vale il teorema seguente:

“ Se in una varietà V_3 due curvature riemanniane principali hanno lo stesso valore ω e la terza ω_1 è diversa da ω , e se la congruenza principale corrispondente ad ω_1 è geodetica, ω varia soltanto lungo le linee di questa congruenza.

“ Se ω non è costante, la congruenza stessa è quindi geodetica e normale, anzi il suo sistema coordinato covariante risulta dalle derivate di una funzione rispetto alle coordinate di V_3 ”.

2. Si supponga data in una V_n qualunque una famiglia di $\infty^1 V_{n-1}$ per mezzo della congruenza delle sue traiettorie ortogonali. Indicando con $\lambda_r \equiv \lambda_{n/r}$ il sistema coordinato covariante di tale congruenza, perchè le V_{n-1} siano geodetiche occorre e basta che la equazione

$$\sum_1^n \lambda_{n/r} x'_r = 0$$

sia un integrale particolareggiato della equazione delle geodetiche di V_n . Considerando poi la congruenza data [n] come associata ad altre $n - 1$ congruenze [1], [2], ... [n - 1] costituenti con essa in V_n una ennupla ortogonale, quelle condizioni sono rappresentate (M, V, 2) dalle equazioni

$$\gamma_{nij} + \gamma_{nji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Ricordando altresì (M, II, 10) che le condizioni di normalità della congruenza [n] sono espresse dalle

$$\gamma_{nij} = \gamma_{nji}$$

si riconosce che le precedenti equivalgono alle

$$(3) \quad \gamma_{nij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Queste poi ⁽¹⁾ per $j \neq i$ ci dicono che considerando le V_{n-1} come immerse in V_n , ogni linea tracciata sopra una V_{n-1} può riguardarsi come linea di curvatura di questa. Per $j = i$ esse ci dicono invece che le curvature principali delle V_{n-1} sono tutte nulle. Rimangono così estese alle superficie geodetiche di una varietà qualunque delle proprietà ben note dei piani dello spazio ordinario.

Le equazioni stabilite sopra ci dicono ancora che la famiglia di superficie ortogonale alla congruenza [n] fa parte di infiniti sistemi n^{vpli} ortogonali di V_n . Si indichi con x_n un parametro della famiglia di superficie

(1) Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali* ecc., nel vol. II, serie 5^a delle Memorie della Classe di scienze fisiche di questa R. Accademia.

ortogonali alla congruenza $[n]$; con x_1, x_2, \dots, x_{n-1} quelli di altre $n-1$ famiglie costituenti con essa in V_n una ennupla ortogonale e sia

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + \dots + H_n^2 dx_n^2$$

la corrispondente espressione del ds^2 di V_n . Le equazioni (3) assumono la forma

$$\frac{\partial H_1}{\partial x_n} = \frac{\partial H_2}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Data la espressione di un ds^2 in coordinate ortogonali, abbiamo così un criterio assai semplice per riconoscere se e quali delle famiglie coordinate risultano di superficie geodetiche.

3. Riprendiamo ora le considerazioni esposte nella mia Nota sulle *Formole fondamentali nella teoria delle varietà e della loro curvatura*. Considerando ancora una varietà V_{n+m} ed una V_n in essa contenuta siano

$$\psi = \sum_1^{n+m} c_{uv} dy_u dy_v$$

$$\varphi = \sum_1^n a_{rs} dx_r dx_s$$

le espressioni dei loro elementi lineari in coordinate generali. Sia poi ξ_u il sistema coordinato covariante di una congruenza di linee tracciate in V_{n+m} per modo che una sua linea passante per un punto qualunque di V_n giaccia tutta in V_n . Le linee di questa congruenza passanti per punti di V_n costituiranno una congruenza di V_n , di cui indicheremo con $\lambda^{(r)}$ il sistema coordinato controvariante. Varranno così le relazioni

$$\xi_u = \sum_1^n \lambda^{(p)} \sum_1^{n+m} c_{uv} y_{v/p},$$

le quali, derivate tenendo conto delle (II) della Nota citata, danno

$$\frac{\partial \xi_u}{\partial x_r} = \sum_1^{n+m} c_{uv,w} y_{v/r} = \sum_1^m \alpha_{\alpha/u} \sum_1^n \lambda^{(s)} b_{\alpha/rs} + \sum_1^n \lambda^{(ps)} \alpha_{rp} \sum_1^{n+m} c_{uv} y_{v/s};$$

e conseguentemente, indicando con ξ_{uv} il primo sistema derivato covariantemente secondo ψ dal sistema ξ_u ,

$$\sum_1^{n+m} \xi^{(v)} \xi_{uv} = \sum_1^n \lambda^{(r)} \lambda^{(s)} \sum_1^m \alpha_{\alpha/u} b_{\alpha/rs} + \sum_1^n \lambda^{(rs)} \lambda_s \sum_1^{n+m} c_{uv} y_{v/r}.$$

Poichè

$$\sum_1^{n+m} \xi^{(v)} \xi_{uv} = 0, \quad \sum_1^n \lambda^{(rs)} \lambda_s = 0$$

sono rispettivamente per V_{n+m} e V_n le equazioni delle congruenze geodetiche, le formole stabilite ci permettono di concludere che

« Perchè una varietà V_n sia geodetica per V_{n+m} è necessario e basta « che siano soddisfatte le equazioni

$$b_{\alpha/rs} = 0$$

« ovvero (N, (6)) le equivalenti

$$\omega_{\alpha h k} = 0 \text{ " .}$$

Introducendo queste condizioni nelle equazioni (A), (B'), (C) e (D) della Nota più volte citata, queste assumono la forma

$$(A) \quad y_{u/r} = \sum_1^n \xi_i^{(u)} \lambda_{i/r}$$

$$(B) \quad \frac{\partial \xi_{h/u}}{\partial s_k} = - \sum_1^n \gamma_{ihk} \xi_{i/u} + \sum_1^{n+m} c_{uv,w} \xi_h^{(w)} \xi_k^{(v)}$$

$$(C) \quad \sum_1^{n+m} c_{uu',vv'} c_{uu',vv'} \xi_h^{(u)} \xi_i^{(u')} \xi_j^{(v)} \xi_k^{(v')} = \sum_1^n a_{pr,st} \lambda_h^{(p)} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_k^{(t)}$$

$$(D) \quad \sum_1^{n+m} c_{uu',vv'} c_{uu',vv'} \xi_{\alpha}^{(u)} \xi_i^{(u')} \xi_j^{(v)} \xi_k^{(v')} = 0.$$

$$(h, k, i, j = 1, 2, \dots n; \quad \alpha = 1, 2, \dots m).$$

Ne segue che, data intrinsecamente la varietà V_{n+m} per mezzo del suo ds^2 , per determinare le varietà geodetiche V_n in essa contenute, converrà prima di tutto determinare tutte le forme φ ad n variabili, per le quali il sistema (A, B, C, D) risulta integrabile. Per ogni φ così determinata la integrazione di questo sistema darà poi tutte le superficie geodetiche V_n immerse in V_{n+m} ed aventi φ come espressione del proprio ds^2 . Ricordiamo che, determinata φ , debbono riguardarsi come incognite le funzioni y_u , nonchè le $\xi_{1/u}, \xi_{2/u}, \dots \xi_{n/u}$; e le $\xi_{1/u}, \xi_{2/u}, \dots \xi_{m/u}$; e che al sistema ricordato sopra debbono considerarsi aggiunte le equazioni, cui debbono soddisfare le ξ e z testè ricordate perchè possano riguardarsi come sistemi coordinati covarianti di una $(n+m)^{upla}$ ortogonale di congruenze di V_{n+m} . Invece le $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots \lambda_{n/r}$ sono i sistemi coordinati covarianti di n congruenze costituenti in V_n una n^{upla} ortogonale e del resto qualunque. Ricordiamo

ancora che le condizioni di integrabilità delle (A) e (B) sono contenute nelle (C) e (D) talchè noi dovremo preoccuparci soltanto di quelle di queste ultime equazioni.

4. Stabilite le equazioni del problema proposto in generale, proponiamoci in particolare di riconoscere per ogni varietà V_3 data intrinsecamente per mezzo del suo ds^2 , se essa contiene delle superficie geodetiche V_2 ; e, nel caso affermativo, di determinare tutte queste V_2 . Tenendo conto dei risultati del § 2, le quante volte noi riusciremo a determinare in una V_3 le traiettorie ortogonali di una possibile famiglia di ∞^1 superficie geodetiche, sapremo anche riconoscere se questa esista o non esista; nel caso affermativo poi il determinarne le equazioni in termini finiti dipenderà dalla risoluzione di un ben noto problema di calcolo integrale. Perciò, quando risulti determinato il sistema coordinato di quelle traiettorie, il problema potrà riguardarsi come risoluto per quanto riguarda la famiglia di superficie geodetiche ad esse normali, se una tale famiglia esista.

Premesso ciò, osserviamo che nel caso nostro, cioè per $m = 1$ ed $n = 2$, le equazioni (C) e (D) assumono rispettivamente la forma

$$(C') \quad \sum_1^3 \alpha^{(uv)} g_u g_v = K$$

$$(D') \quad \sum_1^3 \alpha^{(uv)} g_u \xi_{i/v} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

K essendo l'invariante di Gauss relativo a g ed $\alpha^{(uv)}$ il sistema triplo contravariante, che, come ricordammo, per $n = 3$ può essere sostituito ai simboli di Riemann.

Designando con ω una indeterminata, le (D') equivalgono alle

$$\sum_1^3 (\alpha^{(uv)} - \omega c^{(uv)}) g_u = 0,$$

che sono le equazioni delle congruenze principali di V_3 . Dunque

« Se in una V_3 esistono delle famiglie di ∞^1 superficie geodetiche, le « traiettorie ortogonali di una qualunque di queste famiglie costituiscono una congruenza principale di V_3 ».

Siano $\xi_{1/u}, \xi_{2/u}, \xi_{3/u}$ i sistemi coordinati di tre congruenze principali di V_3 fra loro ortogonali due a due, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le corrispondenti curvature riemanniane principali di V_3 , talchè si abbia

$$\alpha_{uv} = \sum_i^3 \omega_i \xi_{i/u} \xi_{i/v}$$

e si ponga $z_u = \xi_{3/u}$. La (C') ci dà

$$K = \omega_3$$

e ci dice cosa già nota, perchè insita nel concetto di curvatura riemanniana, e cioè che per una direzione qualunque questa coincide colla curvatura gaussiana della superficie geodetica ad essa normale. Tenendo conto di questa proprietà, rimane senz'altro soddisfatta la (C'), come lo è la (D') assumendo come congruenza z_u delle traiettorie normali ad una famiglia di superficie geodetiche una congruenza principale di V_3 .

5. Si supponga dapprima $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Pel teorema di Schur il valore comune delle tre curvatures riemanniane principali di V_3 sarà costante e, designandolo con K , pel teorema del paragrafo precedente sarà pure eguale a K l'invariante di Gauss relativo al ds^2 di ogni superficie geodetica tracciata in V_3 . Con ciò questo ds^2 rimane determinato a meno di trasformazioni puntuali e risulta identicamente soddisfatta la (C') e così pure la (D'), poichè ogni congruenza di V_3 può in questo caso assumersi come principale. Rimangono quindi da soddisfare le equazioni (A) e (B), le quali di per sè costituiscono un sistema completo. Il sistema integrale generale di tale sistema dipende da sei costanti arbitrarie, che possono determinarsi in modo che una superficie geodetica passi con orientazione arbitraria per un punto arbitrario di V_3 . Ritroviamo così i risultati ben noti relativi allo spazio ordinario euclideo o no.

6. In secondo luogo si suppongano due curvatures riemanniane principali eguali fra di loro e la terza distinta, talchè, posto

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega ;$$

sia $\omega_1 \neq \omega$ e si indichi con $v_u \equiv v_{1/u}$ la congruenza principale corrispondente ad ω_1 .

Potremo riconoscere (§ 2) se esista una famiglia di ∞^1 superficie geodetiche, che taglino ortogonalmente la congruenza [1]. Ci rimane quindi da stabilire se e sotto quali condizioni esistano delle famiglie di superficie geodetiche, che taglino ortogonalmente una delle ∞^1 congruenze principali corrispondenti alla curvatura ω , le quali sono tutte e soltanto quelle normali alla (1). Indicando ancora con K l'invariante di Gauss relativo al ds^2 di una qualunque delle superficie geodetiche cercate, le equazioni (C') e (D') per le cose dette sopra, assumono la forma

$$(C_1) \quad K = \omega$$

$$(D_1) \quad \sum_u^3 v^{(u)} z_u = 0.$$

Richiamiamo le espressioni delle $z_{u/r}$, le quali (N (4)) assumono nel nostro caso la forma

$$z_{u/r} = \sum_{vw}^3 z^{(vw)} c_{uv,w} y_{v/r}$$

e sostituiamole nelle equazioni, che scendono per derivazione dalle (D₁). Tenendo conto altresì delle (A) e indicando con γ una indeterminata perveniamo così alle

$$(4) \quad \sum_{vw}^3 v^{(vw)} c_{uv,w} z_v = \gamma z_u.$$

Se queste sono indipendenti dalla (D₁), esse determinano la congruenza delle traiettorie ortogonali di una possibile famiglia di superficie geodetiche. Pre-scindendo, per ragioni già dette, da questo caso, le (4) assumono la forma

$$(4') \quad v_{uv} = -\gamma(c_{uv} - v_u v_v).$$

Associamo alla congruenza $v_{1/u}$ altre due congruenze $v_{2/u}$ e $v_{3/u}$ costituenti con essa in V_3 una tripla ortogonale, poniamo

$$v_{i/uv} = \sum_{h\bar{k}}^3 \gamma'_{i\bar{h}k} v_{h/u} v_{\bar{k}/v} \quad (1, u, v = 1, 2, 3)$$

e confrontiamo colle (4') le espressioni delle v_{uv} date da queste per $i = 1$. Perveniamo così alle

$$(5) \quad \gamma'_{123} = \gamma'_{132} = \gamma'_{121} = \gamma'_{131} = 0$$

$$(6) \quad \gamma'_{122} = \gamma'_{133} = -\gamma.$$

Ricordiamo ancora (M, II, 4) che, indicando con s'_h l'arco delle linee della congruenza $[h]$, e ponendo

$$\gamma_{hi,kl} = \frac{\partial \gamma'_{hi\bar{k}}}{\partial s'_l} - \frac{\partial \gamma'_{hil}}{\partial s'_k} + \sum_j^3 \gamma'_{hij} (\gamma'_{j\bar{k}l} - \gamma'_{j\bar{l}k}) + \sum_j^3 (\gamma'_{i\bar{h}l} \gamma'_{j\bar{k}k} - \gamma'_{j\bar{h}k} \gamma'_{j\bar{l}l})$$

$$\gamma_{hk} = \gamma_{h+1\bar{h}+2, k+1\bar{k}+2}$$

valgono le relazioni

$$\gamma_{21} = \gamma_{31} = 0, \quad \gamma_{22} = \gamma_{33} = \omega;$$

da cui seguono le

$$(7) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s'_1} = \omega + \gamma^2, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s'_2} = \frac{\partial \gamma}{\partial s'_3} = 0.$$

Le (5) ci dicono che la congruenza [1] deve essere geodetica; e che le v_u sono le derivate di una funzione v rispetto alle y_u e di più che due congruenze qualunque [2], [3] formanti in V_3 con la [1] una tripla ortogonale costituiscono rispetto ad essa un sistema canonico (M, II, 3); il che si esprime dicendo che la congruenza [1] è isotropa. Da questa proprietà della congruenza [1] segue poi la prima delle (6), la quale ci dice che sono eguali fra di loro le curvature principali delle superficie normali alla congruenza [1] considerate come contenute in V_3 . Le (7) infine ci dicono che γ è funzione della sola v , come lo è (§ 1) ω .

Dalla isotropia della congruenza [1] segue anche che in V_3 le superficie di parametro v fanno parte di infiniti sistemi tripli ortogonali. Assumiamo in V_3 come coordinate x_1, x_2, x_3 uno di questi sistemi ortogonali prendendo $x_1 = v$. Il ds^2 di V_3 assumerà una espressione della forma

$$\psi = dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + H_3^2 dx_3^2.$$

Le (6) poi danno

$$\frac{\partial \log H_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \log H_3}{\partial x_1} = -\gamma$$

e, assieme alla (7) ci dicono che la espressione di ψ si può ridurre alla forma

$$\psi = dx_1^2 + X \psi_1,$$

X essendo funzione della sola x_1 e ψ_1 un ds^2 a due variabili x_2 ed x_3 . Questa espressione di ψ non differisce essenzialmente da quella del sig. Hadamard, e però possiamo concludere che le condizioni (5), quando si intendano soddisfatte per ogni dupla [2] [3] formante colla congruenza [1] una tripla ortogonale, sono necessarie e sufficienti perchè la varietà V_2 sia tale che per ogni suo punto passi una semplice infinità di superficie geodetiche.

7. A questi stessi risultati completandoli possiamo giungere fondandoci unicamente sulle formole stabilite nei paragrafi precedenti. Perciò osserviamo che, come risulta dalla equazione (D_1), la congruenza [1] è tale che ogni sua linea, la quale passi per un punto di una V_2 , giace tutta in questa. Possiamo quindi assumere

$$(8) \quad \begin{cases} \xi_{1/u} = v_{1/u} \\ \xi_{2/u} = \cos \vartheta v_{2/u} + \sin \vartheta v_{3/u}, \end{cases}$$

designando così con ϑ l'angolo delle linee della congruenza $\xi_{2/u}$ con quelle della $v_{2/u}$. Dovendo poi la congruenza z_u esser normale alle superficie V_2 e quindi tanto alla congruenza $\xi_{1/u}$ quanto alla $\xi_{2/u}$, avremo per le z_u le espressioni

$$z_u = -\sin \vartheta v_{2/u} + \cos \vartheta v_{3/u}.$$

Da queste la equazione (D₁) essendo identicamente soddisfatta, rimangono da soddisfare, oltre alla (C₁), le (A), che per le (8) assumono la forma

$$(A_1) \quad y_{u/r} = v_1^{(u)} \lambda_{1/r} + (\cos \vartheta v_2^{(u)} + \sin \vartheta v_3^{(u)}) \lambda_{2/r}$$

e le (B). Queste poi, tenuto conto ancora delle (8), ed indicando con s_1 ed s_2 gli archi delle linee delle congruenze $\xi_{1/u}$ e $\xi_{2/u}$, assumono la forma

$$(B') \quad \gamma_{211} = 0$$

$$(B'') \quad \gamma_{212} = \gamma$$

$$(B_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = \gamma'_{321} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = \gamma'_{322} \cos \vartheta + \gamma'_{323} \sin \vartheta. \end{array} \right.$$

Osserviamo che le condizioni di integrabilità delle (B₁) risultano soddisfatte, tenendo conto delle (5) (6) e (7); e che dalla (B'') e dalle (7) segue la

$$(9) \quad \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = 0.$$

8. La (B') e la (9) ci dicono che nelle varietà V_2 le linee [1] sono insieme geodetiche ed isoterme, dal che segue che queste varietà sono applicabili sopra superficie di rotazione e che le linee [1] e [2] sono in esse le deformate dei meridiani e dei paralleli.

Ricordando che ω e γ sono funzioni della sola v , e avendo presente la (B'') si riconosce che, se si assumono nelle V_2 come coordinate le linee [1] di parametro v e le loro traiettorie ortogonali [2], la espressione del ds^2 delle V_2 assume la forma

$$(\alpha) \quad g = dv^2 + G(v) dv^2.$$

essendo

$$(10) \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial v} = -\gamma$$

e quindi

$$G = e^{2 \int \gamma dv}.$$

Dunque g è determinata a meno di trasformazioni puntuali e per conseguenza tutte le V_2 sono applicabili fra di loro.

Ritenendo ora g espressa in coordinate generali $x_1 x_2$, assumiamo come congruenza $\lambda_{1/r}$ quella di parametro v , con che la equazione (B') sarà identicamente soddisfatta, e poniamo

$$(B_3) \quad v(x_1 x_2) = v(y_1 y_2 y_3)$$

Questa derivata, tenendo conto delle (A_1) , ci dà le

$$v_r = \lambda_{1/r}.$$

che risultano identicamente soddisfatte per la espressione (a) di φ . Tenendo conto di questa, della (B_0) e della (10) risultano pure identicamente soddisfatte le (B') , (B'') e (C_1) ricordando, per ciò, che riguarda, quest'ultima, anche la prima delle (7) e la nota formola di Liouville applicata al sistema di coordinate r e v . Il sistema completo da integrare per determinare le superficie geodetiche di V_3 corrispondenti alla curvatura principale ω , risulta dunque delle (A_1) , delle (B_1) e della (B_0) . Il suo sistema integrale generale è tale che per valori iniziali arbitrari a_1 e b_1 di x_1 ed x_2 , φ può assumere valori affatto arbitrari, mentre i valori iniziali corrispondenti di $y_1 y_2 y_3$ debbono soddisfare alla equazione

$$(v y_1 y_2 y_3) \equiv v (a_1 b_1).$$

Però, poichè si possono fissare i valori di a_1 e b_1 in modo che la superficie rappresentata da quest'ultima equazione passi per un punto arbitrario di V_3 , è sempre possibile far passare per un tal punto una superficie geodetica V_2 la cui normale sia arbitrariamente orientata nella giacitura piana di V_3 normale alla congruenza [1].

Se si suppone ω costante, lo è pure K per la (C_1) e φ ammette ∞^3 trasformazioni in sè stessa, per le quali ogni punto P di V_2 si può portare nella posizione primitivamente occupata da un punto prefissato qualunque. Ciò significa che, fissati i valori a_1 e b_1 di x_1 ed x_2 , noi possiamo ad essi far corrispondere un punto qualunque P di σ ; dal che e dalle considerazioni fatte sopra, segue che, fissato un punto P_0 in V_3 ed un punto P in V_2 , si può sempre far passare per P_0 una superficie V_2 in modo che P coincida con P_0 . Se invece ω e quindi K sono variabili, fissato il punto P_0 , i punti P di V_2 , che possono farsi coincidere con P_0 , costituiscono una semplice infinità.

Astronomia. — *Osservazioni dei pianetini LT ed LU Dugan 1903 fatte all'equatoriale di 39 cm. del R. Osservatorio del Collegio Romano.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

Il pianetino LT Dugan 1903 di 12^{ma}, con probabilità, è identico a ⁽³⁹²⁾ Wihelmina scoperto da M. Wolf il 4 novembre 1894. L'accertamento dell'identità si avrà fra breve.

Do intanto le due seguenti posizioni:

1903 maggio 27	10 ^h 29 ^m 16 ^s	R. C. R.	
α apparente	15 53 12. 76	(9 ⁿ .106)	Grandezza 11.8
δ " —	9° 20' 0". 7	(0. 832)	
1903 maggio 28	9 ^h 29 ^m 57 ^s	R. C. R.	
α apparente	15 52 24. 75	(9 ⁿ .351)	Grandezza 12.2
δ " —	9° 13' 22". 6	(0. 825)	

Il pianetino LU Dugan, ben lucente, di circa 10.7, parrebbe, a giudicare a prima vista, nuovo. Di esso ho potuto ottenere due posizioni, che sono le seguenti:

1903 giugno 2	10 ^h 46 ^m 41 ^s	R. C. R.	
α apparente	16 50 1. 88	(9 ⁿ .194)	
δ " —	9° 13' 0". 9	(0. 830)	
1903 giugno 5	9 ^h 47 ^m 52 ^s	R. C. R.	
α apparente	16 47 42. 71	(9 ⁿ .369)	
δ " —	9° 15' 14". 4	(0. 824).	

Fisica terrestre. — *Riassunto delle determinazioni di gravità relative fatte nella Sicilia Orientale in Calabria e nelle isole Eolie.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia. — *I discendenti dei genitori tubercolotici (Polli).* Nota preventiva del Corrispondente ANGELO MAFFUCCI.

Nell'anno decorso pubblicai la parte generale dei miei studi intorno alla Patologia embrionale infettiva (¹), avendo sperimentato con diversi microbî patogeni e tossine direttamente iniettati nelle uova di pollo durante l'incubazione delle stesse: microbî e tossine, che assorbiti dall'embrione per mezzo della vescica allantoide, misurarono il modo di comportarsi di questo essere verso dette sostanze tossiche infettive in confronto al pollo adulto.

Appurata la reazione dell'embrione verso le infezioni e le intossicazioni, era il caso di passare allo studio della trasmissione ereditaria delle malattie infettive, e scelsi per infezione la tubercolosi, intorno a cui ho sperimentato sui mammiferi e sui polli; e per ora presenterò in riassunto le mie ricerche fatte sui discendenti dei polli tubercolotici, riserbandomi di dare la Memoria

(¹) Memoria della R. Accademia dei Lincei, ser. 5^a, vol. IV, 1902.

in esteso, appena espletate alcune ricerche complementari e fatte le rispettive tavole.

Gli esperimenti si sono svolti nel seguente modo: ho esaminato da prima lo sperma e le uova dei polli tubercolotici e vi ho riscontrati i bacilli tubercolari; ho raccolto le uova fecondate da gallo tubercolotico e galline sane, da maschio sano e galline tubercolotiche, e finalmente le uova di gallo e galline tubercolotici: dette uova furono messe ad incubare, ed esaminati gli embrioni da 48 ore di sviluppo fino a 5 giorni d'incubazione per scovire i bacilli tubercolari nei tessuti embrionali, sia per mezzo di ricerche istologiche, sia per mezzo colture degli stessi tessuti embrionali sui sustrati nutritivi per la coltura dei bacilli tubercolari, la ricerca dei bacilli nei tessuti embrionali mi è riuscito finora negativa; non ho protratta la ricerca al di là del quinto giorno dell'incubazione, per non confondere i bacilli tubercolari che si possono trovare nei tessuti embrionali pervenutivi con l'atto della fecondazione con quei bacilli tubercolari, che si trovavano nell'albumina delle uova, portati dallo sperma del maschio tubercolotico o dalla secrezione delgi uovi-dutti delle galline tubercolotiche, giacchè la vescica allantoide si trova già al sesto e settimo giorno in contatto dell'albumina.

Premessi questi fatti, ho voluto portare a schiusa le uova fecondate da gallo tubercolotico e galline sane, e da gallo sano e galline tubercolotiche e dei due genitori tubercolotici, tenendo calcolo del grado della malattia dei genitori nell'epoca della fecondazione ed emissione delle uova, onde notare se in ragione diretta, che i genitori avanzavano nell'infezione, aumentava il loro cattivo influsso sulla rispettiva prole.

Volli sperimentare ancora sulle uova quando i genitori non presentavano più una infezione acuta, ma quando la infezione negli stessi era cronica, come pure la intossicazione tubercolare; ed ancora volli sperimentare sulle uova dei discendenti dei figli dei genitori tubercolotici, dopo che questi figli dei genitori tubercolotici avevano contratta l'infezione tubercolare acquisita, che negli stessi decorre cronicamente, ciò che difficilmente avviene nei polli di genitori sani. Volli sapere ancora come si comportavano i nipoti degli avi tubercolotici, cioè raccogliendo le uova dei figli di genitori tubercolotici, non sottoposti all'infezione acquisita.

Proseguendo gli esperimenti, tutti i figli dei genitori tubercolotici furono sottoposti all'infezione tubercolare, grave o minimamente mortale con rispettivi controlli: ed i figli di genitori tubercolotici, guariti dalla prima infezione tubercolare acquisita, furono di nuovo sottoposti ad una seconda infezione, e per uno studio comparativo furono sottoposti all'infezione tubercolare acquisita i polli nati da uova intossicate con tossina tubercolare (durante l'incubazione), e per lo stesso scopo ancora furono sottoposti all'infezione tubercolare acquisita i polli nati da uova infettate con bacilli (durante l'incubazione) dopo che detti polli per un anno dopo la schiusa si mostrarono sani, cioè

avendo vinto l'infezione tubercolare embrionale: e da questi stessi polli, prima di sottoporli all'infezione tubercolare acquisita, si raccolsero delle uova e fu fatto lo studio della loro prole: come ancora fu studiata la prole dei polli nati da uova intossicate, prima di sottoporli all'infezione acquisita.

Per uno studio comparativo si tubercolizzarono ancora alcune galline di genitori sani e poi si sottoposero all'infezione tubercolare, per notare se la intossicazione dell'embrione si differenziava da quella dell'animale adulto, rispetto al decorso dell'infezione tubercolare acquisita in questi due esseri, dopo un anno dalla schiusa.

Per lo stesso scopo si sottoposero i figli dei genitori sani ad una seconda infezione tubercolare, dopo guarita la prima infezione, onde fare uno studio comparato se vi era differenza nel decorso della seconda infezione acquisita nei figli dei genitori sani, in confronto a quella acquisita dai polli nati da uova infettate, avendo vinto la prima infezione embrionale.

Finalmente si è voluto studiare la prole proveniente dei due genitori tubercolotici guariti, e poi la prole del maschio tubercolotico guarito e di galline sane, e la prole di galline tubercolotiche guarite e di maschio sano; queste osservazioni non sono complete, perchè si sta ancora seguendo il decorso dei neonati.

Da tutte queste ricerche numerose, raccolte dal 1898 al 1903, io posso dedurre le seguenti conclusioni generali:

I. I figli dei genitori tubercolotici sono più suscettibili dei figli dei genitori sani all'infezione tubercolare acquisita.

II. La tubercolosi acquisita nei figli dei genitori tubercolotici decorre a parità di condizioni dei figli dei genitori sani sotto forma cronica, come la scrofolosi tubercolare, fino alla guarigione, mentre nei figli dei genitori sani l'andamento della tubercolosi acquisita è molto acuto.

III. Il secondo attacco dell'infezione acquisita può relativamente esser vinto dai figli di genitori tubercolotici, o dai polli provenienti da uova infettate durante l'incubazione.

IV. I figli dei genitori sani, guariti dall'infezione tubercolare acquisita, divengono molto più predisposti per un secondo attacco di infezione tubercolare, che gli stessi figli di genitori tubercolotici.

V. Non è necessario soffrire una infezione tubercolare nella vita adulta per divenire più suscettibili all'infezione tubercolare; basta avere assorbiti prodotti tossici tubercolari nella vita adulta, come è avvenuto nelle galline tubercolizzate e poi sottoposte all'infezione tubercolare.

VI. La tendenza alla cronicità della tubercolosi acquisita dei figli di genitori tubercolotici deve alle modificazioni, che subiscono i loro tessuti embrionali sotto l'influsso delle tossine tubercolari, contenute nello sperma o nelle uova dei rispettivi genitori.

VII. Che siano le tossine, che modificano i tessuti degli embrioni si prova dal fatto, che innestando uova con tossina tubercolare durante l'incubazione, e poi sottoposti i neonati (dopo sei mesi od un anno dalla schiusa) all'infezione tubercolare, ancora in questi polli la tubercolosi decorre sotto forma cronica.

VIII. Che siano le tossine tubercolari che modificano i tessuti embrionali, predisponendo i neonati alla cronicità della tubercolosi acquisita, si ricava ancora dal fatto, che se i bacilli tubercolari vengono innestati nelle uova, con la stessa dose che si innestano i polli adulti (questi muoiono di tubercolosi dopo due mesi) i neonati delle uova infettate invece o guariscono dall'infezione, o muoiono dopo sei mesi ad un anno con tubercolosi cronica.

IX. Quantunque nello sperma del gallo e nelle uova delle galline tubercolotiche si trovi il bacillo tubercolare, pur non pertanto detti bacilli non si riscontrano nei tessuti degli embrioni raccolti nei primi giorni dell'incubazione.

X. I fatti clinici ed anatomo-patologici della trasmissione ereditaria della tubercolosi nei polli sono dovuti in principal modo alle tossine tubercolari trasmesse collo sperma o coll'uovo.

XI. I figli dei genitori con infezione tubercolare acuta nascono cachettici e possono riprendere la comune nutrizione dei figli di genitori sani dopo molto tempo dalla schiusa; come cachettici nascono ancora i pulcini nati da uova intossicate con tossina tubercolare durante l'incubazione.

XII. I figli di genitori (con infezione tubercolare ad andamento subacuto) muoiono prematuramente nelle uova, o muoiono appena nati o di marasma, dopo qualche tempo dalla schiusa.

XIII. I figli dei genitori (con tubercolosi cronica) presentano mortalità elevata, e fenomeni teratologici in difetto fino alla formazione di mole.

XIV. I nipoti di avi tubercolotici possono morire prematuramente nelle uova, od appena nati, o sopravvivono cachettici, o possono infine presentare oltre la morte precoce nelle uova ancora fenomeni teratologici.

Meccanica. — *Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi.*
Nota I del dott. M. CONTARINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematica. — *Ricerche gruppalì relative alle equazioni della dinamica.* Nota I di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Contributo alla storia del magnetismo terrestre.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Nell'importante Memoria del prof. C. Chistoni, nella quale sono riassunte le determinazioni degli elementi del magnetismo terrestre, fatte in Italia prima del 1880, viene riportato nel § 4, senza nome dell'osservatore, il valore di 5° W per la declinazione magnetica di Roma nel 1681 ⁽¹⁾. Di questo valore non si fa neppure cenno nell'altra non meno importante Memoria del prof. R. Meli ⁽²⁾, in cui sono riportate molte notizie sulle misure declinometriche eseguite ne' secoli passati in Roma, notizie che servono a completare quelle già fatte conoscere anteriormente dal Chistoni.

Scopo precipuo di questa Nota è di provare come il predetto valore sia con grandissima probabilità quello stesso che fu trovato nell'ottobre 1680 dal gesuita P. Francesco Eschinardi (nato in Roma nel 1623 e morto dopo il 1699), e ciò in grazia dei due seguenti antichi opuscoli, che mi è stato possibile consultare:

Discorso | Fatto nell'Accademia Fisicomatematica di Roma | tenuta li 5. di Gennaro del 1681 |. Sopra la Cometa | nuovamente apparsa | Da Uno dell'Accademia Medesima.

Alla fine dell'opuscolo si legge: *In Roma, Per Nicolò Angelo Tinassi. 1681. Con licenza de' Superiori.*

Lettera | del Padre | Francesco Eschinardi | Della Compagnia di Giesù | Al Signor | Francesco Redi, | Nella quale si contengono alcuni | Discorsi Fisicomatematici. In Roma M.DC.LXXXI. | Nella Stamperia di Nicol'Angelo Tinassi, | Con licenza de' Superiori.

La mia attenzione sopra quest'ultimo opuscolo era stata richiamata dal chiarissimo prof. P. Tacchini, per il fatto che fra i quattro discorsi ivi pubblicati ve ne era uno dal titolo: *D'una subita Declinazione della Calamita. Discorso del P. Francesco Eschinardi della Compagnia di Giesù 12 Marzo del 1681*; e l'autore attribuiva il cambiamento brusco della declinazione ad un fortissimo terremoto avvenuto nella Spagna. E siccome in questo discorso

⁽¹⁾ *Contributo allo studio del magnetismo terrestre in Italia ecc.* Annali dell'Uff. Centr. Met. e Geodinamico Italiano. Ser. 2^a, vol. IX, parte I, 1887, pp. 181-352, Roma, 1890.

⁽²⁾ *Notizie bibliografiche sulle rocce magnetiche dei dintorni di Roma. Lettera di R. Meli al prof. Filippo Keller.* Bull. della Soc. Geologica Ital. Vol. IX, 1890, pag. 609, Roma, 1891.

si accennava dall'Eschinardi all'altra sua Memoria precedente, dove era stato trattato lo stesso argomento, naturalmente si svegliò in me il desiderio di conoscerla; ma non mi riuscì di trovarla se non dopo parecchie ricerche, che si resero necessarie, appunto perchè in detta Memoria non si faceva il nome dell'autore.

Ecco le testuali parole con la relativa ortografia, con le quali l'Eschinardi narra a pag. 12 del primo dei due opuscoli sopra citati il fenomeno da lui osservato.

« Racconterò qui fedelmente ciò, che mi è accaduto verso il fine di Ottobre passato. Dovendo servirmi dell'Ago calamitato per fare alcuni Oriuoli « fuori di Roma; applicai al mio solito il detto Ago ad una perfetta Meridiana in Roma per sapere quanta di presente fosse la declinazione (poichè « come a molti è ben noto questa è mutabile di tempo in tempo senza sapere « persene ancora la regola, se non fingendosela à capriccio, mà senza corrispondere all'Esperienza) e trovai essere la medesima da molto tempo in « quà di gradi tre, e poco più ad Occidente (forse un mezzo grado). Or « dunque mentre pochi giorni doppo volli servirmene, trovai aver fatta in un « subito notabile mutazione, arrivando à quelli cinque gradi di declinazione « verso Occidente, e questo con replicate sperienze di più perfettissimi Aghi « lontano non solo da Ferri, ma anco da mattoni ecc. non potendo pensar « altra causa più probabile, dissi a molti, che del sicuro era stato di novo « qualche gran Terremoto, e doppo alquanti giorni appunto venne la nova « del Terremoto di Spagna in Malaga ».

Data la quasi coincidenza dell'anno (1681) e considerato il valore identico della declinazione (5° W), riportato nella Memoria del prof. Chistoni, non vi può essere, a mio parere, il menomo dubbio che realmente si tratti dell'osservazione fatta dal nostro Eschinardi verso la fine di ottobre del 1680 e nelle circostanze sopra ricordate.

In quanto al salto d'un paio di gradi che, stando all'A., sarebbe avvenuto nella declinazione di Roma nell'ottobre 1680, si deve escludere che il medesimo possa attribuirsi: 1° ad influenze magnetiche del suolo di Roma che, come si sa, è di natura vulcanica, e ciò perchè le osservazioni si fecero sempre nello stesso punto; 2° a qualche errore costante, proveniente dalla forma di qualche nuovo ago adoperato, e ciò perchè l'A. dice espressamente d'essersi servito di parecchi aghi; 3° alla presenza di ferramenta che prima non esistevano, e ciò perchè l'A. insiste in modo speciale su questa circostanza ⁽¹⁾.

Però non è da passare sotto silenzio che variazioni di siffatta entità non mancarono d'esser poste in rilievo anche in tempi, da noi meno lontani.

⁽¹⁾ Anzi il P. Eschinardi mostra di conoscere anche l'influenza che i mattoni possono esercitare sull'ago calamitato.

Così, nei *Risultati delle osservazioni meteorologiche fatte da Filippo Luigi Gillii* nella Specola Vaticana nell'anno 1807, si riporta che il 16 ottobre di quell'anno fu osservata una variazione, pure di due gradi, nella bussola di Dresda, senza che una corrispondente perturbazione avesse luogo a Roma. Io però ignoro se il presunto cambiamento di declinazione a Dresda fosse permanente, al pari di quello osservato a Roma nel 1680, oppure temporaneo e forse dovuto all'apparizione di qualche aurora boreale, od alla formazione di qualche macchia straordinaria nel sole, od all'irrompere di forti correnti telluriche, od al passaggio di notevoli onde sismiche ecc. Ma le perturbazioni, provocate da simili cause, sono quasi sempre d'una durata relativamente breve e non alterano sensibilmente la posizione media di riposo dell'ago, appena che sia cessata la causa del disturbo. È da osservarsi altresì che, essendo le osservazioni magnetiche per loro natura delicatissime, non sono mai troppe le precauzioni da prendersi per sottrarsi alle numerosissime cause d'errore, specialmente di carattere strumentale. Basti ricordare che allorché il P. A. Secchi, profittando d'un nuovo e moderno declinometro, iniziò verso la metà del secolo scorso le sue prime misure di declinazione a Roma, ebbe a dire che le precedenti misure in questa città non potevano ritenersi esatte a più di 1°!

Il P. Eschinardi non ha esitato ad attribuire il salto di un paio di gradi, da lui osservato nella posizione dell'ago magnetico, a causa sismica, e precisamente ad un terremoto violentissimo, avvenuto a Malaga il 9 ottobre 1680; ma la spiegazione è assai poco probabile, ed io mi riservo di addurne le ragioni in una Memoria, che sarà fra poco pubblicata nel Bollettino della Società sismologica italiana, e nella quale saranno riportati ed ampiamente discussi i passi più importanti degli opuscoli sopra citati, come quelli che arrecano un contributo non dispregevole alla storia ed allo studio del magnetismo terrestre.

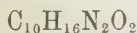
Per spiegare una così notevole, subitanea e duratura variazione negli elementi del magnetismo terrestre, potrebbe anche invocarsi l'introduzione permanente, o rimozione, d'importanti masse di ferro (inferriate, ringhiere, cancelli, parafulmini ecc.), anche a distanze considerevoli dal luogo, ove si ha l'abitudine di ripetere le osservazioni, e ciò tanto all'insaputa dello stesso osservatore, quanto nel caso che il medesimo sia persuaso *a priori* che la esistenza di alcune ferramenta, sufficientemente lontane dagli strumenti, abbia ad esercitare un'influenza affatto trascurabile. A tal proposito mi piace di ricordare come il prof. G. Folgheraiter ⁽¹⁾ avesse a constatare una deviazione di circa 5' in una bussola, per effetto di una falce manovrata da un contadino a circa 30 metri di distanza. Lo stesso osservatore ebbe altra

(1) *Sulla scelta d'un terreno per osservazioni magneto-telluriche*. Eletttricista. Anno II, N. 4, Roma, 1893.

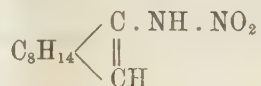
volta a verificare che l'azione perturbatrice d'un ponte di ferro era sensibile sulla sua bussola fino alla distanza di 120 metri. Infine, il prof. L. Palazzo ⁽¹⁾ osservò che una nave corazzata era ancora capace di far deviare per circa $\frac{1}{4}$ di grado un ago magnetico, posto alla distanza di ben 135 metri.

Chimica. — *Sopra alcuni derivati della canfora* ⁽²⁾. Nota di A. ANGELI, F. ANGELICO e V. CASTELLANA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

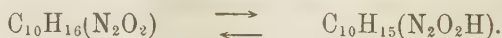
Alcuni anni or sono uno di noi, assieme ad E. Rimini, per azione dell'acido nitroso sopra la canforossima, aveva ottenuto un prodotto al quale spetta la composizione e grandezza molecolare rappresentata dalla formola ⁽³⁾



e che chiamammo *pernitrosocanfora*. In qualunque modo reagisca l'acido nitroso, sia libero oppure in presenza di acidi minerali od organici, sia sotto forma di nitrito di amile, oppure nitrito di amile in presenza di etilato sodico, si arriva sempre alla stessa sostanza, che per il suo modo di formazione si potrebbe considerare come un nitrosoderivato della canforossima; senonchè il suo strano comportamento ci ha imposto un necessario riserbo nell'assegnarle una formola di struttura. Poco tempo dopo ⁽⁴⁾ tale sostanza venne preparata anche da Tiemann e Mahla, seguendo un processo che essenzialmente non differisce da quello da noi seguito; questi chimici considerano il prodotto come una nitrammina:



ma uno di noi a suo tempo ha esposte le ragioni per cui tale formola non è da accettarsi. Il compianto Tiemann asseriva che il prodotto dà un sale potassico, però noi dimostrammo subito che questo sale deriva da un prodotto isomero, che dal primo si forma per azione degli alcali e che allo stato libero in pochi istanti si trasforma nella pernitrosocanfora:



⁽¹⁾ *Sopra un caso osservato a riguardo dell'influenza di considerevoli masse di ferro sulle misure magneto-telluriche.* Mem. della Soc. degli Spettroscopisti Ital. Vol. II, 1893.

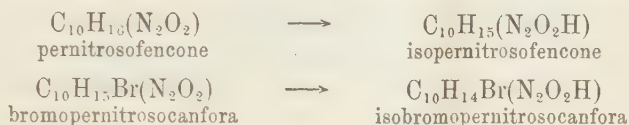
⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

⁽³⁾ Gazzetta chimica 25 (1) 406 e seg.

⁽⁴⁾ Berliner Berichte 28, 1079.

Il Tiemann, che ha ripetuto le esperienze, ha negato questo fatto da noi osservato; invece recentemente Hantzsch (1) ha confermato pienamente le nostre osservazioni. Si tratta evidentemente di una isomeria analoga a quella che passa fra nitroderivati ed acidi nitronici, isonitrammine e nitrosoidrossilammine.

Noi abbiamo in seguito preparato anche altri derivati analoghi, quali p. e. il pernitrosufenone e la bromopernitrosocanfora, i quali per azione degli alcali, nelle opportune condizioni, si trasformano del pari negli isomeri corrispondenti:



Sebbene quest'isomeri sieno di gran lunga più stabili (si conservano per anni) della isopernitrosocanfora (che dura qualche minuto appena), tuttavia anche nel caso del bromoderivato ci è stato possibile realizzare la trasformazione inversa.

Tutti questi prodotti hanno una grande tendenza a perdere i due atomi di azoto sotto forma di protossido e perciò finora non ci è stato possibile avere dei dati i quali ci permettessero di fissarne la struttura; faremo però notare che il modo con cui i pernitrosoderivati si formano dalle ossime, presenta molta analogia col processo per mezzo del quale, sempre per azione dell'acido nitroso, dagli acidi nitronici si passa ai pseudonitroli.



e che la trasformazione delle ossime nei pseudonitroli, per mezzo dell'ipoazotide osservata da Scholl (2), come giustamente fa osservare Bamberger (3) è senza dubbio preceduta dall'ossidazione dell'ossima ad acido nitronico. Anche i pseudonitroli, al pari dei pernitrosoderivati, con idrossilammmina forniscono le corrispondenti ossime.

Composti che sembrano possedere una struttura analoga ai pernitrosoderivati sono stati in seguito preparati da Scholl e Born (4) partendo dall'ossima della pinacolina e da C. Harries dall'ossima dell'ossido di mesitile (5). È curioso notare che queste sostanze, come la canfora ed il fencone, nella loro molecola contengono l'aggruppamento:



(1) Berliner Berichte, 35, 260.

(2) Berichte 21, 507.

(3) Berliner Berichte 35, 3886; 33, 1783.

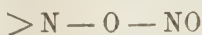
(4) Berliner Berichte 28, 1361.

(5) Liebig's Annalen 319, 230.

Harries dapprima ammetteva che tali composti fossero da riguardarsi come eteri nitrosi delle ossime, ma in seguito studiando i prodotti di riduzione della sostanza proveniente dall'ossido di mesitile, pervenne ad un derivato del pirrazolo (1):

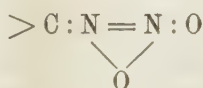


identica alla trimetildiidropirazolina, preparata da Curtius e Wirsing (2), per azione dell'idrazina sopra l'ossido di mesitile. I due atomi di azoto devono essere quindi direttamente riuniti fra loro, e perciò l'aggruppamento



è da scartarsi.

Harries ammette che il residuo azotato possieda la struttura:

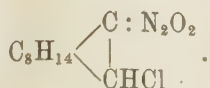


la quale meglio si presta a spiegare le trasformazioni che egli ha osservato nel suo caso.

Siccome tutti i pernitrosoderivati che noi abbiamo finora studiati perdono di preferenza tutti e due gli atomi di azoto sotto forma di protossido, così noi abbiamo rivolta la nostra attenzione ad un altro derivato analogamente costituito, la *cloropernitrosocanfora*



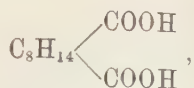
che uno di noi preparò lo scorso anno assieme al Dott. F. Scurti. Questa sostanza si ottiene facilmente quando si fa reagire il cloro sopra la pernitrosocanfora sciolta in acido acetico saturo di acido cloridrico ed in presenza di piccola quantità di iodio e limatura di ferro. Dall'etere petrolico si separa sotto forma di aghi, lunghi parecchi centimetri, che fondono a 127°. Possiede senza dubbio una struttura analoga a quella del bromoderivato:



(1) Liebig's Annalen 319, 293.

(2) Journal für pract. Chemie 50, 546.

Infatti, ossidata con permanganato, fornisce nettamente acido canforico



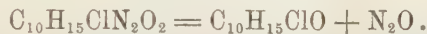
per azione dell'acido solforico concentrato si decompone con sviluppo di protossido di azoto ed acido cloridrico per dare l'*isocanfenone*



dall'intenso odore di rosa, da noi precedentemente descritto e che caratterizzammo trasformandolo nel semicarbazone

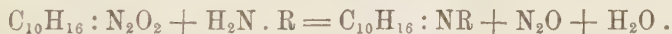


Bollita con acidi diluiti ovvero con alcali, perde del pari protossido di azoto con formazione di clorocanfora (p. f. 92°) identica a quella ottenuta dal prof. Balbiano per diretta clorurazione della canfora (1):

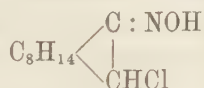


Per azione delle ammine primarie e dell'ammoniaca stessa, questa sostanza si comporta come tutti gli altri pernitrosoderivati che noi abbiamo finora studiato.

Le nostre ricerche hanno dimostrato che in questa reazione tutto il residuo azotato viene eliminato con sviluppo di protossido di azoto ed al suo posto si porta il resto amminico, nel senso rappresentato dall'eguaglianza:



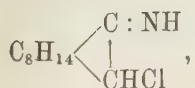
In tal modo, facendo reagire sopra la cloropernitrosocanfora l'idrossilamina nelle opportune condizioni (altrimenti si forma soprattutto una canfordiossima), si perviene alla *ossima della clorocanfora*



che finora non fu possibile di ottenere per altra via. Si presenta in grandi cristalli che fondono a 127° come la cloropernitrosocanfora: all'aspetto ed all'odore rassomiglia molto alla canforossima: si discioglie inalterata nell'acido solforico concentrato, ma per azione prolungata dell'acido solforico diluito bollente da un prodotto che ha un forte odore del nitrile canfolenico. Senza dubbio si tratta del nitrile clorocanfolenico. Per azione dell'acido nitroso la clorossima rigenera con grande facilità la cloropernitrosocanfora primitiva.

(1) Gazzetta chimica 17, 96.

In modo analogo, per azione dell'ammoniaca, il pernitrosoderivato dà la *cloroimmina*

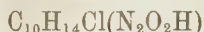


che verso 200° incomincia ad imbrunire senza poi fondere. L'immina per trattamento con acidi minerali diluiti viene facilmente idrolizzata con formazione di clorocanfora ed ammoniaca. Per azione dell'acetato di semicarbazide si ottiene il *semicarbazone della clorocanfora*

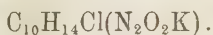


che fonde a 183°.

Gli alcali in soluzione alcoolica, al pari degli altri pernitrosoderivati che finora studiammo, prontamente trasformano la cloropernitrosocanfora in un isomero, la *isocloropernitrosocanfora*

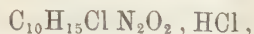


che si presenta in aghetti che fondono a 75° e che noi caratterizzammo sotto forma del *sale potassico*.



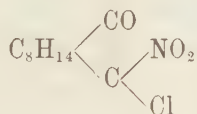
Come abbiamo più volte accennato, la isopernitrosocanfora ed il suo bromoderivato, in modo più o meno rapido si trasformano in modo quantitativo nelle sostanze primitive; il cloroderivato invece si comporta in modo affatto diverso e spontaneamente, anche a temperatura ordinaria, subisce una profonda decomposizione per dare origine ad un complicato miscuglio di prodotti che ha l'aspetto di un olio giallognolo; finora rinvenimmo clorocanfora, piccole quantità di acido cloridrico, prodotti nitrosi, assieme ad un'altra sostanza che descriveremo più sotto. Per azione dell'acido solforico concentrato non fornisce l'isocanfenone e protossido di azoto come il cloroderivato primitivo, ma si scioglie per dare un liquido che rimane limpido anche per aggiunta di molta acqua; sovrasaturando con carbonato sodico precipita una sostanza bianca che di nuovo si scioglie negli acidi. Il nuovo prodotto ha quindi proprietà basiche; le nostre successive esperienze ci hanno ben presto dimostrato che l'isocloroderivato si trasforma nello stesso prodotto, che con tutta probabilità rappresenta un terzo isomero e che perciò chiameremo *pseudocloropernitrosocanfora*, anche per azione di acidi deboli. Basta per esempio sciogliere l'isocloroderivato in poco alcool freddo ed aggiungervi una soluzione pure alcoolica e concentrata di acido picrico, perchè subito si separino grandi aghi gialli costituiti dal *picro* di *pseudocloropernitrosocanfora* che fondono a 155°. Per azione dei carbonati alcalini, dal picro si pone in libertà la base, la quale si presenta sotto forma di grandi cri-

stalli giallognoli, molli, che fondono verso 90°; possiede un lieve odore caratteristico e viene facilmente trasportata dal vapore d'acqua. Facendo passare nella soluzione in etere anidro una corrente di acido cloridrico secco, si ottiene un magnifico *cloridrato della pseudocloropernitrosocanfora*



costituito da aghi bianchi che fondono a 162°. Questo cloridrato per trattamento con acqua subisce una profonda idrolisi e si separa gran parte della base la quale non si scioglie che in presenza d'una grande massa di acido. Si tratta quindi di una base debolissima. La base non reagisce con cloruro di benzoile, nè con anidride acetica o cloruro di acetile, nè con isocianato di fenile. Con acido nitroso dà un prodotto colorato in violetto, probabilmente il nitrito, che all'aria si decompone mettendo nuovamente in libertà la base che identifichiamo trasformandola nel picrato. Con tutta probabilità non contiene perciò gruppi alcoolici od ammidici. In soluzione alcoolica è stabile al permanganato, e per riduzione con zinco ed acido acetico dà una base che riduce a caldo il liquido di Fehling.

Nella nuova sostanza l'anello della canfora è ancora inalterato, e questo ci è stato dimostrato da un'altra interessante trasformazione che il prodotto subisce quando venga bollito con acido solforico diluito. Per azione di questo reattivo, dopo breve tempo, la pseudocloropernitrosocanfora perde uno dei due atomi di azoto per dare una sostanza che è identica alla *cloronitrocanfora* di Cazeneuve ⁽¹⁾:



fonde esattamente come un prodotto che per il confronto preparammo direttamente dalla clorocanfora seguendo le indicazioni di questo chimico. L'acido solforico da cui si separò la sostanza contiene ammoniacca.

Per mezzo di queste successive reazioni, partendo dalla canforossima, oppure dalla clorocanforossima, che contiene un atomo di azoto unito ad un atomo di carbonio, si perviene alla cloronitrocanfora che contiene un atomo di azoto unito all'atomo di carbonio vicino:



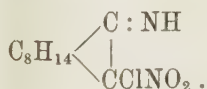
Sebbene le nostre esperienze sieno ancora incomplete, tuttavia i fatti da noi finora osservati rendono molto probabile che alla pseudocloropernitroso-

(1) Bulletin 44, 164.

canfora spetti una struttura come le seguenti :

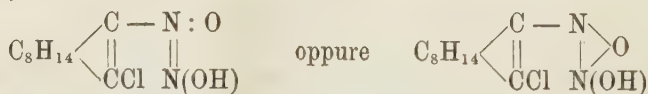


le quali darebbero ragione della sua indifferenza di comportamento rispetto ai reattivi ed anche della sua trasformazione in cloronitrocanfora. Evidentemente in quest'ultimo caso, come termine intermedio, dovrà formarsi una sostanza della forma:

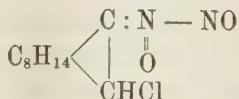


Accenneremo infine che il pseudoderivato viene altresì decomposto con tutta facilità dalla potassa, anche a freddo; in tal modo si ottiene una soluzione limpida da cui per trattamento con acidi precipita una sostanza verde azzurra che poi diviene cristallina ed incolore; fonde verso 80° ed è solubile negli alcali. Con tutta probabilità si tratta di un quarto isomero che studieremo meglio in seguito. Queste reazioni danno un'idea della grande facilità con cui queste sostanze si trasformano l'una nell'altra; le differenze sono dovute soltanto alla diversa disposizione che assumono gli atomi di azoto, giacchè l'anello della canfora si mantiene intatto. Però questa stessa grande mobilità del residuo azotato è quella che rende difficile l'assegnare loro una formola di struttura.

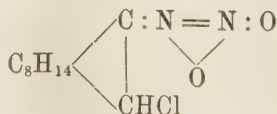
Nella isocloropernitrosocanfora, di carattere acido si potrebbe ammettere un'aggruppamento come i seguenti (nitrosoidrossilammine ovvero isonitrammine) :



dalle quali per la cloropernitrosocanfora (neutra) ne seguirebbe l'altra :



analoga a quella proposta da Harries :



Comunichiamo con tutto riserbo questi risultati, che per mancanza di mezzi sono ancora preliminari, riservandoci di completare le nostre ricerche nel prossimo anno accademico.

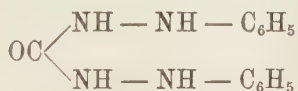
Chimica. — *Dosaggio volumetrico del rame per mezzo dello xantogenato potassico* ⁽¹⁾. Nota di BERNARDO ODDO, presentata dal Socio L. PATERNÒ.

La determinazione volumetrica del rame non si è potuta finora eseguire direttamente per mezzo di una soluzione titolata di xantogenato a causa della mancanza di un indicatore.

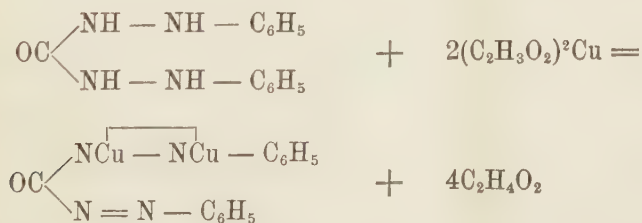
Grete ⁽²⁾ sulla soluzione del sale di rame d'analizzare, versa tanta soluzione di xantogenato finchè, usando il processo alla tocca, non ottiene più precipitato con il ferrocianuro potassico.

Rupp e Krauss ⁽³⁾ precipitano la soluzione del sale di rame con una quantità nota di xantogenato potassico, e determinano quindi l'eccesso di quest'ultimo con una soluzione titolata di iodio.

Io sono riuscito a dosare direttamente il rame nei suoi sali mediante una soluzione decinormale di xantogenato potassico, impiegando come indicatore la difenilcarbazide simmetrica:



reattivo la cui grande sensibilità rispetto ai sali di rame è stata messa in evidenza da Cazeneuve ⁽⁴⁾ fin dal 1900. Egli dimostrò allora infatti che, quando la difenilcarbazide viene a contatto dei sali di questo metallo, avviene la reazione:



si forma cioè sempre difenilcarbazono ramoso, il quale ha la proprietà di colorare la soluzione così intensamente in violetto da permettere di rintrac-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto di chimica generale della R. Università di Cagliari.

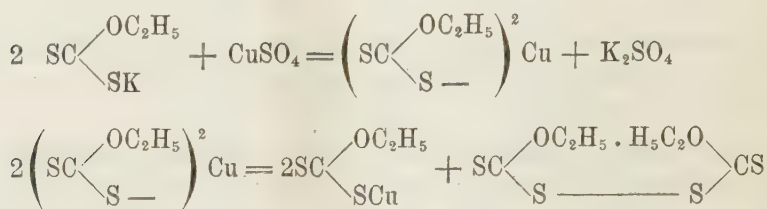
(2) Liebig's Anna'en d. Chemie, 190, 211.

(3) Berichte, 19, 1902, pag. 4157.

(4) Bull. Soc. Chim. 23, 1900, pag. 592 e 701.

ciare il rame perfino alla diluizione di $\frac{1}{1,000,000}$, che non dà alcun fenomeno col ferrocianuro potassico.

Era noto poi che le soluzioni dei sali alcalini dell'acido xantogenico con quelle dei sali di rame al massimo danno un precipitato bruno nero, il quale istantaneamente diventa giallo fioccoso, perchè avviene la trasformazione in sale al minimo:



Ora io ho osservato che se ad una soluzione d'un sale di rame, previamente trattata con soda fino a debole acidità e con un poco di difenilcarbazide, si aggiunge quella di xantogenato potassico, mentre si forma il precipitato giallo di xantogenato ramoso, la colorazione violetta intensa del carbazone rimane finchè non si sia aggiunta la quantità teorica del reattivo e sparisce subito appena se n'è aggiunto un piccolo eccesso.

Migliore indicazione si ricava però operando in senso opposto; aggiungendo cioè ad una soluzione di xantogenato potassico, contenente della difenilcarbazide, quella di rame, ed agitando: precipita dapprima tutto lo xantogenato in giallo fioccoso, e quando si versa un piccolissimo eccesso di sale di rame, resta persistente non già la nota colorazione violetta intensa del composto ramoso del carbazone, ma un'altra ugualmente visibile rosso mattone, complementare del violetto e del giallo aranciato.

Questa colorazione sparisce subito, mettendo un piccolo eccesso di sale di rame, con una sensibilità paragonabile a quella che si ottiene coi migliori indicatori che si usano in analisi volumetrica.

Io quindi ho eseguito le determinazioni versando un eccesso di soluzione di xantogenato su quella del sale di rame d'analizzare, aggiungendo quindi la soluzione di difenilcarbazide e determinando l'eccesso dello xantogenato con una soluzione titolata di sale di rame, che aggiungo finchè il colorito rosso mattone resti persistente.

A reazione finita si ha così un precipitato giallo ed il liquido colorato in rosso mattone.

Alla luce artificiale il saggio riesce anche più netto, perchè allora la tinta gialla s'indebolisce e risulta più evidente l'altra.

È da osservare finalmente che la colorazione rosso mattone finale si conserva quasi inalterata per quindici o venti minuti secondi; dopo questo tempo scompare di nuovo e perchè resti stabile è necessario aggiungere un

grande eccesso di soluzione di sale di rame, di cui non si deve tener conto nella lettura.

SOLUZIONI TITOLATE.

I. *Soluzione di rame.* — Feci uso di soluzione decinormale di solfato di rame cristallizzato puro; il liquido venne controllato con un'analisi ponderata.

II. *Soluzione di xantogenato potassico.* — Usai sia il prodotto che fornisce la fabbrica di Kahlbaum, sia quello che ottenni versando una soluzione concentrata di potassa caustica in alcool assoluto in un eccesso di solfuro di carbonio; la massa poltigliosa formatasi venne spremuta su carta da filtro ed asciugata in essiccatore nel vuoto.

Le soluzioni di xantogenato potassico appena preparate si presentano quasi del tutto limpide, di colore tendente al giallo e di reazione neutra. Dopo circa quattre ore però, se le soluzioni sono decinormali, incominciano ad intorbidarsi fortemente, ma dopo circa dodici ore ridiventano di nuova limpide e di colore giallo che va diventando sempre più intenso: il titolo resta alterato e con esso pure la reazione: la soluzione, difatti, diventa alquanto alcalina, ciò che si vede facilmente usando anche qualche goccia di una soluzione idroalcolica di difenilcarbazide simmetrica, che, fra le altre sue proprietà, ha pure quella di essere un buon indicatore in alcalimetria ed acidimetria ⁽¹⁾.

A causa di questa alterazione che subisce il titolo del reattivo e che avviene anche più rapidamente con le soluzioni normali o seminormali, sarebbe necessario prepararsi caso per caso la soluzione titolata.

Ad evitare però tanta perdita di tempo e di materiale, nelle mie esperienze ho preferito di usare una soluzione empirica di xantogenato potassico preparata sul momento e di stabilirne subito dopo il titolo con la soluzione titolata di solfato di rame, usando sempre come indicatore la difenilcarbazide simmetrica.

III. *Preparazione dell'indicatore.* — Lo preparai facendo agire alla temperatura di non più di 150° a bagno d'olio una molecola d'urea con due molecole di fenilidrazina fino a che cessò lo sviluppo d'ammoniaca. La massa fredda fu ripresa con etere ed indi cristallizzata due o tre volte da alcool ed acqua. Ottenni così una polvere quasi del tutto bianca che fondeva tra 168°-169°.

Nelle mie esperienze ho fatto uso di una soluzione satura a freddo di difenilcarbazide simmetrica in alcool a 85°.

(1) In una prossima Memoria descriverò i prodotti di decomposizione delle soluzioni di xantogenato potassico alla temperatura ordinaria.

Per circa due o tre decigrammi di sale di rame d'analizzare impiegavo due centimetri cubi di essa soluzione idroalcolica. Un grande eccesso di difenilcarbazide non disturba, ma rende invece più chiara la variazione di colore.

A complemento di quanto ho sopra esposto, riporto dei risultati ottenuti in alcune determinazioni di rame e di xantogenato.

Dosaggi di xantogenato potassico.

Esperienze eseguite	Xantogenato pesato	Solfato di rame N/10	Xantogenato trovato
	gr.	cc.	gr.
1 ^a	0,2602	16,22	0,2601
2 ^a	0,2226	13,88	0,2226
3 ^a	0,3036	18,92	0,3033
4 ^a	0,2398	14,95	0,2396
5 ^a	0,2288	14,28	0,2289

Dosaggi di solfato di rame.

I. cc. 25 di soluzione empirica di xantogenato potassico, preparata al momento, richiesero cc. 24,50 di soluzione N/10 di solfato di rame uguale a gr. 0,3057 di questo sale.

Esperienze eseguite	Solfato di rame pesato	Volume di xantogenato in eccesso	Solfato di rame N/10 per l'eccesso	Volume di xantogenato corretto	Solfato di rame trovato
	gr.	cc.	cc.	cc.	gr.
1 ^a	0,2922	24,00	0,10	23,90	0,2924
2 ^a	0,2584	25,00	3,83	21,10	0,2581
3 ^a	0,2023	23,50	6,85	16,52	0,2021

II. cc. 25 di una seconda soluzione empirica di xantogenato potassico, preparata al momento, richiesero cc. 27,42 di soluzione N/10 di solfato di rame, cioè a dire gr. 0,3424 di questo sale.

Esperienze eseguite	Solfato di rame pesato	Volume di xantogenato in eccesso	Solfato di rame N/10 per l'eccesso	Volume di xantogenato corretto	Solfato di rame trovato
	gr.	cc.	cc.	cc.	gr.
1 ^a	0,2658	22,00	2,89	19,37	0,2652
2 ^a	0,3125	25,00	2,40	22,81	0,3124
3 ^a	0,2295	22,50	6,30	16,75	0,2294

In una prossima pubblicazione, estenderò il metodo al dosaggio di altri metalli.

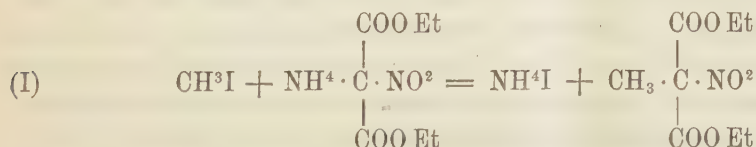
Chimica. — *Per la sintesi degli α-nitro-eteri.* Nota di C. ULIPIANI, presentata dal Socio E. PATERNO.

La nitrurazione diretta dei composti della serie alifatica non avviene così facilmente come quella dei composti della serie aromatica. Può dirsi quasi che l'etere nitro-malonico costituisca un'eccezione, perchè si ottiene facilmente dall'etere malonico per azione dell'acido nitrico fumante con rendimento quasi teorico ed è un composto stabile, che dà sali cristallini più stabili dei corrispondenti sali dell'etere malonico.

Com'è noto l'etere malonico si presta a numerosi metodi di sintesi, perchè al posto degli idrogeni del suo metilene sostituiti da metalli alcalini possono entrare numerosi radicali (sintesi malonica degli acidi bibasici), mentre, avvenuta la sostituzione, uno dei due gruppi carbossietilici può staccarsi facilmente (sintesi malonica degli acidi monobasici).

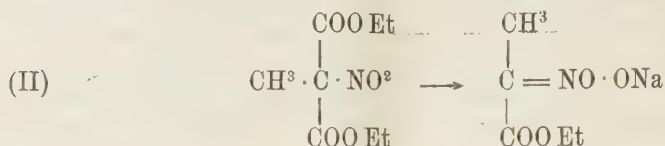
In questo lavoro io ho voluto provare se l'etere nitro-malonico si prestava ad analoghi metodi di sintesi, allo scopo di poter preparare facilmente i nitro-derivati della serie alifatica di cui ben pochi termini sono noti.

Facendo agire il joduro di metile sul sale ammonico dell'etere nitro-malonico, io ho ottenuto un olio di un odore gradevolissimo, l'etere nitro-iso-succinico secondo l'equazione:

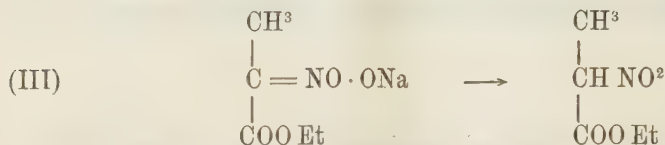


Facendo agire su questo olio un equivalente di alcoolato sodico, ho ot-

tenuto il sale sodico dell'etere α -nitro propionico che fonde a 200° e cristallizza in lunghi aghi bianchi



Trattando la soluzione acquosa di questo sale con acido cloridrico diluito, precipita un olio insolubile nell'acqua che distilla a $190-195^{\circ}$: l'etere α -nitro-propionico



Dai risultati ottenuti posso concludere, che per azione del ioduro di metile sul sale ammonico dell'etere nitro-malonico si giunge all'etere α -nitro-propionico, e dai lavori, che ho in corso, posso fin d'ora affermare, che con ogni probabilità è questo un metodo generale di preparazione degli α -nitro eteri. Infatti facendo agire sul sale ammonico dell'etere nitro-malonico i ioduri d'etile e d'isopropile, ho ottenuto olii azotati e insolubili in ammoniaca acquosa, che attualmente sto studiando, ma già la loro insolubilità in ammoniaca dimostra che l'idrogeno metilenico è stato impegnato rispettivamente dall'etile e dall'isopropile. Analogamente, facendo reagire il medesimo sale ammonico sull'etere bromo-acetico e l'etere nitro-malonico sul cloruro d'acetile e di propionile in presenza di carbonato sodico, ottengo con ottimo rendimento la formazione dei rispettivi eteri nitro-malonici sostituiti sui quali, non essendo ancora completo lo studio, spero fra breve poter riferire.

Preparazione dell'etere nitro-malonico e del sale ammonico corrispondente. — Preparai l'etere nitro-malonico modificando il metodo di Franchimont nel modo seguente:

Gr. 100 di etere malonico si versano a poco a poco in 300 cmc. di acido nitrico fumante ben raffreddato, agitando di tanto in tanto ed evitando che per troppo riscaldamento si sviluppino abbondanti vapori rutilanti. Dopo aver lasciato il tutto in riposo per circa mezz'ora aggiungendo una sufficiente quantità di acqua fredda precipita l'etere nitro-malonico sotto forma di un olio più pesante dell'acqua, da cui si separa per filtrazione o con separatore a rubinetto. L'ammoniaca concentrata versata a goccia a goccia agitando e raffreddando sull'etere nitro-malonico ben lavato, produce un composto cristallino giallo che dall'acqua cristallizza in tavolette giallastre esagonali

o rombiche e dall'alcool in tavolette rettangolari bianche. Il sale ammonico dell'etere nitro-malonico fonde a 150° con decomposizione.

All'analisi si ebbe:

- I. Gr. 0,2014 di sostanza dettero 23 cmc. di N a 27°,3 e 760 mm. di Hg.
 II. Gr. 0,2793 di sostanza dettero gr. 0,1626 di H²O e gr. 0,3854 di CO².

	Trovato %		Calcolato per
	I	II	$\begin{array}{c} \text{COO Et} \\ \\ \text{C}=\text{NOONH}^4 \\ \\ \text{COO Et} \end{array}$
N	12,58	—	12,61
C	—	37,63	37,83
H	—	6,47	6,31

Preparazione dell'etere nitro-iso-succinico per azione del ioduro di metile sul sale ammonico dell'etere nitro-malonico. — Questa reazione è stata eseguita riscaldando a bagno-maria a ricadere o in tubo chiuso parti uguali di sale ammonico dell'etere nitro-malonico e di ioduro di metile disciolti in una miscela di due parti di acqua e una di alcool. In tubo chiuso la reazione ha luogo ugualmente senza alcool e con rendimento quasi quantitativo. Dopo un riscaldamento di due o tre ore si deposita un olio bruno di odore gradevolissimo, pochissimo solubile nell'acqua, solubilissimo nell'alcool e nell'etere. Il contenuto del tubo chiuso viene versato in un separatore a rubinetto ed estratto con etere. Dopo aver lavato l'etere con acqua leggermente ammoniacale, si distilla il solvente e resta indietro un olio che a differenza dell'etere nitro-malonico non si combina più con l'ammoniaca. Questo olio distilla in corrente di vapore e in questa maniera può ottenersi perfettamente limpido. Il risultato dell'analisi è stato il seguente:

- I. Gr. 0,3700 di sostanza dettero cmc. 23 di azoto a 26° e 761 mm. Hg.
 II. Gr. 0,3446 di sostanza dettero gr. 0,5498 di CO² e gr. 0,1960 di acqua.

E per 100 parti:

	Trovato		Calcolato per
	I	II	$\begin{array}{c} \text{COO Et} \\ \\ \text{CH}^3-\text{C}-\text{NO}^2 \\ \\ \text{COO Et} \end{array}$
N	6,63	—	6,39
C	—	43,52	44,34
H	—	6,32	5,98

Questi risultati non sono troppo concordanti con i calcolati: evidentemente il prodotto non è del tutto puro, giacchè si è potuto purificare soltanto lavandolo con ammoniaca diluitissima e distillandolo in corrente di vapore. Purtuttavia il fatto che l'olio ottenuto a differenza dell'etere nitro-malonico

non si scioglie affatto nelle soluzioni alcaline, dimostra che il metile ha sostituito nell'etere nitro-malonico l'idrogeno salificabile secondo l'equazione (I).

Preparazione dell'etere α -nitro propionico per azione dell'alcoolato sodico sull'etere iso-nitro-succinico. — La quantità calcolata di sodio (un atomo di sodio per una molecola di etere nitro-iso-succinico) disciolta in tanto alcool da avere una soluzione di alcoolato sodico al 2 %, si versa a poco a poco in una bevuta contenente l'etere nitro-iso-succinico disciolto in etere.

Si forma un precipitato bianco, si lascia in riposo per circa 24 ore, poi si filtra alla pompa. Il precipitato si fa bollire in alcool, poi si filtra rapidamente a caldo: per raffreddamento cristallizza in aghi sottilissimi una sostanza bianca e soffice come seta che fonde a 200°.

L'analisi elementare dette i seguenti risultati:

- I. Gr. 0,2613 di sostanza dettero 17,6 cmc. di N a 22 e 756 mm. di Hg.
- II. Gr. 0,2725 di sostanza dettero 18 cmc. di N a 16 e 758,4 mm. di Hg.
- III. Gr. 0,4325 di sostanza bruciati con anidride carbonica dettero gr. 0,2076 di acqua e gr. 0,5086 di CO².
- IV. Gr. 0,2100 di sostanza bruciati subirono una perdita di peso (acqua di cristallizzazione) di gr. 0,0189 e dettero gr. 0,0805 di solfato sodico.

	Trovato %				Calcolato per
	I	II	III	IV	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \\ \text{C}=\text{NOO Na} + \text{H}^2\text{O} \\ \\ \text{COO Et} \end{array}$
N	7,58	7,85	—	—	7,49
C	—	—	32,06	—	32,08
H	—	—	5,5	—	5,34
Na	—	—	—	12,41	12,34
H ² O	—	—	—	9,0	9,62

Da questi dati analitici risulta che il composto ottenuto per azione dell'alcoolato sodico sull'etere nitro-iso-succinico è il sale sodico dell'etere α -nitro-propionico ottenuto per decarbossilazione dell'etere nitro-iso-succinico secondo l'equazione (II).

Trattando con acido cloridrico diluito la soluzione acquosa di questo sale, precipita un olio limpido e incolore che può separarsi dall'acqua per filtrazione. Quest'olio alla pressione ordinaria distilla a 190-195°, alla pressione di 390 mm. distilla a 174. I dati analitici che seguono dimostrano che il nuovo etere è l'etere α -nitro-propionico.

- I. Gr. 0,3072 di sostanza dettero gr. 0,4602 di CO^2 e gr. 0,1682 di H^2O .
 II. Gr. 0,3148 di sostanza dettero cmc. 27,4 di N alla temperatura di $16^{\circ},8$ e alla pressione di 752,5 mm.

	Trovato %		Calcolato per
	I	II	$\begin{array}{c} \text{CH}^3 \\ \\ \text{CHNO}^2 \\ \\ \text{COO Et} \end{array}$
C	40,82	—	40,81
H	6,08	—	6,11
N	—	9,99	9,52

Paleontologia. — *Il Clisiophyllum Thildae n. sp. nel Parà*. Nota di GIOACCHINO DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio T. TARAMELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Contribuzioni allo studio dei Cimini*. Nota del prof. LIBERTO FANTAPPIÈ, presentata dal Socio G. STRUEVER.

I. Profili strutturali.

Due parole per spiegare la pubblicazione di queste brevi Note, dopo alcune mie precedenti dichiarazioni riguardo all'estensione assunta dalle mie ricerche sui vulcani viterbesi.

Era mia intenzione di procedere analiticamente con rigorosi metodi di indagine sugli abbondanti materiali raccolti per condurre il lavoro secondo un piano *sistematico* piuttosto ampio: e ciò spiega il mio lungo silenzio di questi ultimi anni.

Tuttavia ad un'esposizione minutamente dimostrativa si son venute ad opporre varie difficoltà: a cominciare dalla scarsa stabilità che da qualche tempo sembra offrire questo Liceo comunale nei cui laboratori ho i limitati mezzi di ricerca.

Mi son quindi veduto costretto mio malgrado ad esporre *una parte almeno* dei risultati delle mie ricerche, mantenendoli *per ora* sotto la forma di vedute sommarie: tantopiù che, allo stato attuale, certe questioni relative alle nostre formazioni sono d'indole *geologica* ed in gran parte *logica*; e possono essere espresse sotto questo aspetto. Ormai del Cimino non si può più dire che non sia stato veduto, almeno in gran parte, e descritto; ma si può soprattutto dire che non è stato *interpretato*.

Il carattere dell'esposizione che chiude nei limiti ristretti dei richiami occasionali le indicazioni bibliografiche, mi obbliga anche a rimandare ad altra occasione ogni discussione di queste mie vedute in confronto colle teorie attualmente in corso nel campo scientifico riguardo ai fenomeni generali del vulcanismo.

Posso esimermi dal ricordare i caratteri topografici della regione: i quali, a partire dal Pareto ⁽¹⁾ che dette anche la veduta dei Cimini dal Soratte, e venendo via via al vom Rath ⁽²⁾, al Verri ⁽³⁾ fino al Washington ⁽⁴⁾, sono stati sufficientemente indicati; mentre la pubblicazione della carta del Genio militare rende facile la conoscenza topografica occorrente pel nostro caso.

Rileverò invece le principali linee strutturali della regione specialmente in riguardo ai monti Cimini più propriamente detti: i quali sia dal lato della costituzione, sia da quello cronologico debbono essere ben distinti dal vulcano di Vico, di cui mi occuperò più specialmente in altra occasione.

I Cimini più propriamente detti comprendono le note alture che si trovano dalla parte nord della cosiddetta « catena » dei Cimini. Il Monte Cimino o monte di Soriano che predomina nella parte centrale di queste alture con un'altezza di 1053 m. è contornato da una serie di monti minori, che partendo dalla parte occidentale colla Pallanzana presso Viterbo girano al nord verso Bagnaia e Soriano fino a raggiungere, col monte Motterone, i pressi di Cane-pina sulla valle del Tevere ad est. Non è inutile notare che *alcuni* di questi rilievi si innalzano come picchi ripidi di forma approssimativamente conica come il S. Valentino e la Rocchetta; mentre *la maggior parte* di quelli che si trovano sul grande arco nord (seguito in basso presso a poco dalla strada da Soriano a Viterbo), come anche Montecchio presso Bagnaia e la Pallanzana stessa, tendono ad allungarsi secondo delle linee radiali partenti più o meno approssimativamente dalla massa centrale Cimina. A questa si mostrano addossati dei potenti mammelloni, che, intorno al *picco* centrale formato dalla vetta del Cimino, formano una specie di irregolare scaglione e vanno poi degradando verso la periferia, ove nelle parti più lontane del grande arco suddetto vanno a risolversi in monti più o meno distinti come la Pallanza ed il S. Valentino suindicati.

(1) *Osservazioni geologiche dal monte Amiata a Roma*, del marchese Lorenzo Pareto. Giorn. Arcadico di sc. lett. ed arti. Tomo C, 1844, da pag. 42 in poi.

(2) G. vom Rath, *Geognostisch - mineralogische Fragmente aus Italien*. II Theil Abdruck a. d. Zeitschr. d. Deutschen geolog. Gesellschaft, Jahrg. 1868; da pag. 294 in poi.

(3) *I Vulcani Cimini*, R. Accad. dei Lincei, Serie 3.^a, Cl. di sc. fis. mat. e nat. Vol. VIII, 1880.

(4) *Italian Petrological Sketches*, II (The Viterbo region). Reprinted from The Journ. of Geology, vol. IV, n. 7, 1896. Chicago.

Sui lati di queste *ripide* alture si appoggia un gran banco di roccia che si estende intorno ad esse con dolci pendii ed ondulazioni varie della superficie, sviluppandosi con una certa costanza di caratteri complessivi (non parlo di uniformità) *dalle varie parti* per una enorme estensione, chiusa, com'è già noto, press'a poco nel cerchio dei paesi di Viterbo, Bagnaia, Vitorchiano, Bomarzo, Bassano, con degli affioramenti anche dalla parte sud-ovest verso S. Giovanni di Bieda. Questa roccia, che è quella più precisamente conosciuta sotto il nome locale di « *Peperino* », nel gran giro indicato termina spesso in appicchi dovuti prevalentemente a franamenti successivi all'erosione che ha raggiunto i materiali sedimentarî sottostanti, rappresentati per solito da marne plioceniche: mentre verso il sud è rappresentata da falde più o meno nettamente perdentesi sotto i materiali vicani. Del resto tutto il banco si mostra profondamente solcato da valloni di erosione, spesso con pareti a picco raggiungenti con enormi e pittoreschi piloni le marne plioceniche, come nell'interessante valle del « *fosso Luparo* » che parte dai pressi della Pallanzana e col nome di Orciagno traversa Viterbo.

Dirò più avanti dei caratteri particolari che presenta geologicamente e litologicamente questa roccia; e intanto mi affretto ad aggiungere qui l'indicazione dei materiali che costituiscono essenzialmente questo gruppo di Cimini più propriamente detti.

L'ossatura di questa parte dei Cimini è data prevalentemente dalle due masse citate: quella delle alture, e quella del banco peperinico. Però si aggiunge come materiale essenziale nel gruppo una roccia notevole per la sua abbondanza e per i rapporti genetici e di giacitura che presenta colle altre.

Questa roccia è quella che venne indicata dal Washington ⁽¹⁾ ultimamente col nome di *Ciminite*: nome che io manterrò non solo perchè in gran parte consento con lui nelle vedute per le quali questa roccia può essere riportata alle trachi-doleriti ⁽²⁾ ma anche perchè dopo alcune incertezze introdotte da altri osservatori, si presenta molto adatto alle indicazioni, ora che ho detto di non volere entrare in questioni particolari.

Questa roccia ha una bocca di emissione (non dico un cratere) *molto ristretta* ed ancora abbastanza riconoscibile sulla vetta del monte Cimino al punto geodetico: ed ha poi delle notevoli colate di emissione laterale specialmente dalla parte di Soriano; ma anche dall'altra parte che guarda il lago di Vico, come quella che ammassandosi specialmente presso Poggio Menega si espande verso « *la Colonna* » sulla via di Canepina; mentre verso il sud del Cimino presso la regione Piangoli si trovano in limitate escavazioni sotto il terreno prativo degli affioramenti, che si collegano al

(1) Loc. cit.

(2) *Italian Petrological Sketches*, V (Summary and conclusion). Repr. from The Journal of Geology, vol. V, n. 4, 1897, Chicago.

braccio che si inoltra tra la Pallanzana ed il S. Valentino scendendo fino al « Recinto dei frati », e giù oltre nel « prato », del villaggio della Quercia.

La giacitura di questa roccia fu indicata da diversi autori; vom Rath ⁽¹⁾, Verri ⁽²⁾, Mercalli ⁽³⁾, ma tuttavia solo il Washington nei suoi « Sketches » succitati ne mostrò una cognizione abbastanza comprensiva.

Queste dunque sono le masse costituenti essenzialmente il primo gruppo eruttivo dei Cimini.

Invece una roccia che si estende in una poderosa colata che investe e smussa parecchie linee dei Cimini stessi mostrando i suoi affioramenti superiori tra la via Cassia o di Ronciglione e la cosiddetta traversa di Canepina ed altri inferiori al di là del fosso dell'Acqua rossa presso le rovine di Ferento sotto il nome di *Petrisco*, si deve riferire al sistema vicano. Il Paretto ammise per primo ⁽⁴⁾, e lo ripeterono poi il Deecke ⁽⁵⁾, con una strana esagerazione, ed il Mercalli ⁽⁶⁾ con più conveniente prudenza, che si trattasse di un materiale dovuto ad una bocca intermedia tra i Cimini ed il vulcano di Vico; ma se è molto probabile che si tratti di un'emissione dai fianchi del vulcano di Vico, coperta poi per ampio tratto dalle deiezioni di questo vulcano, che alle emissioni delle lave di tipo prevalentemente leucitico aggiunse ripetute fasi esplosive, pure scarseggiano i dati positivi per sostenere l'esistenza di una bocca più o meno distinta; mentre sono contro di essa i seguenti fatti:

a) l'inclusione della *Vulsinite* (Washington) da me osservata in qualche punto del braccio del Petrisco che gira la Pallanzana dal lato nord; mentre la *Vulsinite* scende dall'altra parte del recinto Vicano fino al Quartuccio sulla via di Vetralla;

b) che nell'ampio mantello di conglomerato che circonda il recinto di Vico si trovino molte bombe le quali (malgrado l'alterazione) ricordano molto da vicino il Petrisco;

c) dei blocchi di Petrisco che si trovano nel burrone di S. Lucia presso Ronciglione;

d) la notevole altitudine degli affioramenti superiori rispetto all'orlo del recinto Vicano;

e) la forma del gran dorso sul quale affiora il petrisco e che rilega con una specie di *diga* il recinto Vicano al Cimino all'incirca dai pressi di

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit.

(3) *Osservazioni petrografico-geologiche sui Vulcani Cimini*, Rend. del R. Istit. Lombardo, Serie II, vol. XXII, fasc. III, 1889. Milano.

(4) Loc. cit. pagg. 43-44 e 46.

(5) *Bemerkungen zur Entstehungsgeschichte und Gesteinskunde der Monti Cimini*. N. Jahrbuch f. Mineralogie etc. Beilageband VI. Stuttgart 1889.

(6) *Contribuzione allo studio geologico dei vulcani viterbesi*. Pontificia Acc. dei Nuovi Lincei, vol. XX, 1903. Roma.

monte Nibbio alla falda sud-ovest di Poggio Menega presso il culmine della traversa di Canepina: mostrando dalla parte di Viterbo come materiali lavici prevalenti le Leucotefriti sotto, ed il Petrisco sopra.

Senza poi contare vari affioramenti di « Petrisco » anche dalle parti sud del recinto Vicano.

I materiali detritici si possono poi con sicurezza riportar tutti al vulcano di Vico.

Importantissimo tra tutti è il tufo lionato a pomici nere, che nei Cimini propriamente detti si trova in lembi più o meno estesi nelle valli interne in basso (dirò nelle conclusioni la mia opinione sulle cause del fatto) come ad esempio presso le « fornaci » di Bagnaia, ed all'esterno copre spesso il « Peperino » come al mulino della « Gabbia del cricco » nella via di circumvallazione di Viterbo, sotto la « via dei Magliatori » nel fosso Orciugno entro Viterbo, od è addossato al Peperino stesso come presso il Ponte dell'Elce sulla via Vetralla fuori di Viterbo; per citare soltanto luoghi di più facile ricognizione: mentre poi sovrapponendosi ordinariamente a pozzolane grigie si stende in banchi poderosi alla base del recinto vicano inoltrandosi nel piano di Viterbo verso i Vulsini ed al nord dalla parte di Vitorechiano, mentre dalla parte del Tevere invade i territorî di numerosi paesi come Vignanello, Caprarola, Ronciglione, Capranica, Sutri ed oltre, passando anche al sud con una estensione e con dei caratteri che mi riserbo di prendere in più minuto esame quando parlerò più particolarmente del recinto di Vico.

Sono riferibili ad eruzioni vicane i materiali lapilloso-pomici che coprono il peperino in varî punti come ad esempio sulla via di Bagnaia con caratteri decisamente atmosferici.

Tanto per il tufo lionato a pomici nere, quanto per questi materiali lapillosi e tufacei il riposo sul banco di peperino si può prestare in tesi geologica *astratta* a due ipotesi: quella di un'eruzione molto prossima alla formazione del peperino, o quella di un'eruzione abbastanza lontana da dar tempo all'abrasione di altri materiali soprastanti. Però è quest'ultima che si mostra accettabile quando si osserva la superficie del peperino sottostante a tali materiali, e si fa poi il confronto di questi materiali con quelli esistenti in varî punti del recinto di Vico.

A questo punto è il caso di prendere in esame più particolare le tre masse di materiale che si collegano più intimamente per caratteri genetici e tettonici a costituire il Cimino più propriamente detto.

I. Cominceremo dalla « Ciminite » perchè è la roccia più facile a definirsi. Petrograficamente fu finora studiata dal vom Rath ⁽¹⁾, dal Bucca ⁽²⁾, dal

(1) Loc. cit.

(2) Boll. del Comit. Geol. Ital. 1888, pagg. 57-63.

Deecke ⁽¹⁾ e dal Washington ⁽²⁾ e come ho già detto si può ritenere con questo in molto intimi rapporti col gruppo delle trachi-doleriti, come riconosce anche il Rosenbusch ⁽³⁾ benchè la citi nella famiglia delle Trachiti.

L'aspetto esterno presenta notevoli variazioni anche nella stessa colata, ad esempio alla Quercia, per la diversa compattezza della massa: e poi in varî punti per l'influenza che vi hanno esercitato dei materiali di contatto o di commistione.

Nelle parti interne delle colate è compattissima, dura, di color bruno, con punteggiature biancastre dovute ai feldspati e con minute punteggiature giallastre dovute specialmente all'olivina.

Nelle parti esterne è bollosa con abbondanti geodi di Ialite; ed il colore raggiunge il grigio cenere chiaro che la fa talvolta assomigliare alle parti del Petrisco ove scarseggiano le leuciti. Sul prato della Quercia ed in alcuni punti della già notata scorciatoia che sale dietro Bagnaia verso le falde del Cimino con bracci per Soriano e Canepina, tende al rossigno per contatti col Petrisco.

Un carattere notevolissimo della roccia è l'inclusione di grossi cristalli di sanidino geminati secondo la legge di Karlsbad che vi raggiungono le dimensioni di 4 a 5 centimetri. Questi cristalli si fanno notare per la loro assoluta *identità* (anche nei più minuti particolari di « facies ») con quelli che si possono isolare dalle parti più o meno disaggregate del mantello scoriaceo laterale del S. Valentino e della Rocchetta e che sono caratteristici delle rocce predominanti nelle alture, distinte dal Brocchi ⁽⁴⁾ col nome di « lava necrolite a grandi feldspati ». In seguito metterò in rilievo l'importanza di questo carattere per cristalli inclusi in rocce che nei termini estremi delle loro masse raggiungono una notevole diversità. Intanto ricordo che questo carattere si mostra in modo rimarchevole in varî punti della roccia come nel campione che porta il n. 1359 della mia collezione privata e proveniente dalla Quercia: ed è da aggiungersi per le accidentalità notevoli della roccia stessa a quello del n. 1353 includente vene di jalite, ed a quello del n. 1352 includente quarzo ametistino simile a quello della roccia delle alture, già da me rimarcati in un precedente lavoro ⁽⁵⁾.

Abbiamo già indicato la giacitura generale della roccia. Restano da rilevarsi i suoi rapporti colle altre. Essa ha, come abbiamo detto, un punto di emissione in una stretta bocca terminale del Cimino, e varî altri rappresentati da fenditure laterali più o meno ampie. Ciò che più importa rilevare

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit. II, 1896.

(3) *Elemente der Gesteinslehre*. Zw. Aufl. Stuttgart 1901, pp. 282-283.

(4) *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce ecc.* Milano 1817.

(5) *Minerali nuovi od in nuove condizioni di giacitura per la regione Cimina*. Riv. di mineral. e cristall. italiana, vol. XXIII, 1899, Padova.

è che essa giace spesso più o meno promiscuamente colla roccia delle alture sugli alti pendii del Cimino, ma scende poi anche in correnti ben distinte sul ripiano di « Peperino » mostrandosi così posteriore a questo, nei forti riversamenti a giorno; mentre in blocchi e frammenti, o la stessa Ciminite, od una roccia ad essa strettamente affine, si mostra anche *sotto* al banco di peperino e spesso inclusa *entro* al peperino stesso.

D'altra parte poi se la sua posizione in colate soprastanti al peperino mostra che vi furono delle emissioni di questa roccia posteriori alla formazione di quello, pur tuttavia la grande fratturazione e l'arrotondamento dei blocchi che si mostrano anche notevolmente isolati, malgrado la durezza della roccia, nella corrente che scende tra il San Valentino e la Pallanzana passando per la chiesuola dietro il « Parco Lante » fino alla Quercia, mostrano che anche l'emissione in corrente di questa roccia è antica. Questa antichità si rivela anche in confronto col « Petrisco » che pur essendo una delle ultime eruzioni laviche vicane si mostra tuttavia precedente a molte eruzioni esplosive del vulcano di Vico. Infatti il « Petrisco » che dai punti alti di affioramento nominati scende in grande massa verso il « Grottone » costeggiando a sud la poderosa colata di Ciminite, presso questa località si divide in due grandi bracci che investono i fianchi della Pallanzana, dalla parte settentrionale e dalla parte meridionale. Ora il braccio della parte settentrionale costeggia la Ciminite fin presso le « Cavorcie » e difende il peperino dall'erosione come la Ciminite stessa; ma mentre al disopra delle Cavorcie scavalca la Ciminite *già erosa* per riversarsi verso la strada vecchia di Soriano ad est del « parco Lante » sopra a Bagnaia, pure in generale riposa sul « Peperino » ad un livello più basso, mostrando che al momento del potente efflusso del « Petrisco » quella roccia era già notevolmente erosa ai lati della Ciminite. D'altra parte poi i rapporti delle due rocce tra loro e col peperino provano anche che il profondo burrone, che le separa attualmente ed è scavato nel peperino, è posteriore all'emissione del Petrisco.

II. Veniamo ora alle interessanti rocce delle alture incluse dal Brocchi ⁽¹⁾ nell'espressione sommaria di « lava necrolite a grandi feldspati ».

La questione riguardante queste rocce, specialmente nei loro rapporti col Peperino è una delle più delicate.

Il Brocchi seguendo un metodo accettabile ai suoi tempi le aveva indicate in blocco, come già abbiamo detto, col nome di « lava necrolite a grandi feldspati » che fu poi tradotto in quello di « trachite » del Pareto ⁽²⁾ e dal vom Rath ⁽³⁾. Gli studi o, meglio, i lavori posteriori non vi aggiunsero molto: il Mercalli la indicò, anche lui in un cenno molto sommario di osservazioni

(1) Loc. cit.

(2) Loc. cit.

(3) Loc. cit.

litologiche ⁽¹⁾ come « Trachite andesitico-felsitica »; il Sabatini ⁽²⁾ includendola sotto il titolo « Peperino » venne ad indicarla implicitamente come una « oligoclasite con mica nera ».

L'esame microscopico delle lamine sottili di queste rocce per poter dare dei risultati soddisfacenti per un assetto sistematico di queste interessantissime masse, specialmente in riguardo alle variazioni dipendenti dai rapporti di giacitura, richiede un lavoro molto minuto. Tenendo conto però dei risultati generali di un esame comparativo si possono considerare come Trachandesiti, nel senso proposto dal Washington ⁽³⁾: e con variazioni non trascurabili dovute specialmente ai loro rapporti colla Ciminita.

Nelle vette dei rilievi Cimini, infatti, la roccia si presenta ordinariamente con color rossigno, spesso tendente al vinato od al lilla, qualche volta rosso-mattone, più raramente grigio sporco.

Se si scende poi lungo i fianchi si possono osservare delle notevoli variazioni, specialmente se si passa dalla massa centrale del Cimino, ove si mostra più o meno spesso commista alla Ciminita, e si viene alle masse più periferiche come ad es. la Pallanzana ed il S. Valentino.

Per queste alture che sono in relazione più diretta col grande banco di Peperino, si presenta un fenomeno degno della più grande attenzione. Scendendo pei fianchi di esse si comincia a notare che la roccia rossigna a pasta compatta e per solito anche con feldispatici grandi, si mostra di solito come un *nucleo interno* il quale si trova in gran parte ancora rivestito da una roccia grigia a massa più friabile la quale in alcuni punti somiglia molto al Peperino come nello sperone sud-ovest della Pallanzana, dalla parte che guarda Viterbo: benchè questa roccia delle alture *non si presenti mai brecciata come il Peperino*. In altri punti più bassi, e meno erosi, che qualche volta vengono raggiunti da lavorazioni profonde, ad es. sopra Bagnaia alla base del S. Valentino presso la così detta « Costa corbara » passa ad un mantello formato da roccia grigia con grossi sanidini simili a quelli delle alture, ma colla pasta grigia scura e tenace frastagliata da profondi interstizi scoriacei con cristalli di mica e feldspato spesso sospesi in frange di aspetto quasi terroso.

In altri punti come sui fianchi sud del S. Valentino, questo mantello esterno è rappresentato da roccia grigia d'aspetto marcatamente cristallino che ricorda molto da vicino certi blocchi feldspatici, che vengono generalmente indicati sotto il nome di Sanidiniti e si trovano come materiale frammentario in varî punti della regione, come dovrò notare in seguito.

(1) Loc. cit. *Osservazioni* ecc. 1899.

(2) *Relazione sul lavoro eseguito nel triennio 1896-97-98 sui vulcani dell'Italia centrale ed i loro prodotti*. Bull. del R. Comitato Geologico, anno 1899, n. 1, Roma.

(3) *It. Ptr. Sk. V.* Citato.

Per solito mostra una notevole compattezza della massa, che è tuttavia ruvida al tatto e presenta dei vistosi cristalli di sanidino ordinariamente in geminati secondo la legge di Karlsbad. Però questi non sono ugualmente fitti nelle varie alture e neanche in varî punti di uno stesso monte. In alcuni punti la mancanza dei grandi individui è compensata da una fitta punteggiatura di piccoli feldspati più o meno facili all'alterazione.

Il color rossigno scuro tra il vinato ed il lilla che presentano in certi punti le Trachi-andesiti delle alture è spesso dovuto alla già notata commistione colla Ciminite, come si può in alcuni punti avvertire ad occhio nudo e verificare poi nelle lamine sottili col microscopio, specialmente per la presenza dell'olivina più o meno marcatamente alterata. I casi più svariati di questa commistione si riscontrano, come ho già accennato, sui fianchi del Cimino: ove la Ciminite si trova entro le Trachi-andesiti in vene come sopra al fontanile tra Poggio Menega ed il fianco sud del Cimino stesso oppure in plaghe più o meno intersecate coll'altra roccia nel fianco ovest volto verso la Pallanzana ed il S. Valentino; ed in commistione ancor più intima spesso dal lato di Soriano.

Si deve ricordare infine che le Trachi-andesiti delle alture a grossi e piccoli feldspati si trovano frequentemente *sotto* il peperino come ho osservato ultimamente sopra al mulino di « Fosso Laparo », nei tagli fatti per la condotta dell'acqua: pei quali sotto al Peperino dei cavatori è stato messo in evidenza uno strato di Peperino terroso, giacente a sua volta su un acciottolato simile a quello esistente al di là del ponte a ferro di cavallo sotto Bagnaia, e che qui (nel taglio) ha l'aspetto di materiale di scarico rispetto alla sovrastante falda della Pallanzana.

Tal'altra volta poi le Trachi-andesiti si trovano in grossi blocchi rossigni giacenti *sopra* al peperino attualmente denudato e che mostrano la loro provenienza dalle alture, in seguito al grande lavoro di erosione dovuto all'antichità della formazione: per cui in certi punti i forti dorsi rocciosi che segnano le linee di rilievo delle alture stesse, sono ridotti ad allineamenti di grossi blocchi che a prima vista potrebbero sembrare non in posto.

Finalmente si trovano in breccie *entro* al Peperino come ho decisamente riscontrato in varî campioni.

Zoologia. — *Sulla presenza e distribuzione del genere Anopheles in alcune regioni della penisola Iberica, e suoi rapporti col parassita della malaria umana.* Nota del dott. GUSTAVO PITTALUGA, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Lisbona; la Società italiana delle scienze, detta dei XL, di Roma; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la Società geografica del Cairo; il Museo di storia naturale di Amburgo; l'Istituto Smithsonian di Washington.

V. C.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

~~~~~  
*Seduta del 21 giugno 1903.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

—————

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*Fisiologia. — L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica.* Nota del Socio ANGELO MOSSO e del dottore GIACOMO MARRO.

Prima di accingerci alla seconda spedizione sul Monte Rosa, fatta nel luglio ed agosto dell'anno scorso, abbiamo tentato se, per effetto di una rapida diminuzione della pressione barometrica, aumenta in modo misurabile la quantità di anidride carbonica emessa dal nostro corpo. Facemmo delle esperienze con delle variazioni barometriche eguali a quelle che passano a fra Torino ed un'altitudine di circa 2500-2600 m. e i risultati furono soddisfacenti come lo dimostrano i dati contenuti in questa Nota.

Adoperammo a tale scopo la camera pneumatica rappresentata nella fig. 1. Essa è fatta da una campana A in lamiera di ferro che può alzarsi ed abbassarsi per mezzo di un contrappeso e di carrucole fisse nella volta della camera: ha un diametro interno di 75 cent. ed è alta m. 1,81, colla capacità di 853 litri. Il bordo inferiore è munito di un largo anello di gomma, così che quando la campana poggia col suo peso sopra una lastra di marmo bene levigata, che le serve di base, rimane chiusa ermeticamente.

Un motore elettrico della forza di 4 cavalli mette in movimento due pompe accoppiate, le quali alternandosi nell'aspirazione fanno una corrente continua: e ad ogni colpo di stantuffo possono aspirare 3 litri d'aria ciascuna. La prima idea fu di raccogliere la corrente di aria che usciva dalle pompe accoppiate facendola passare in un gasometro.

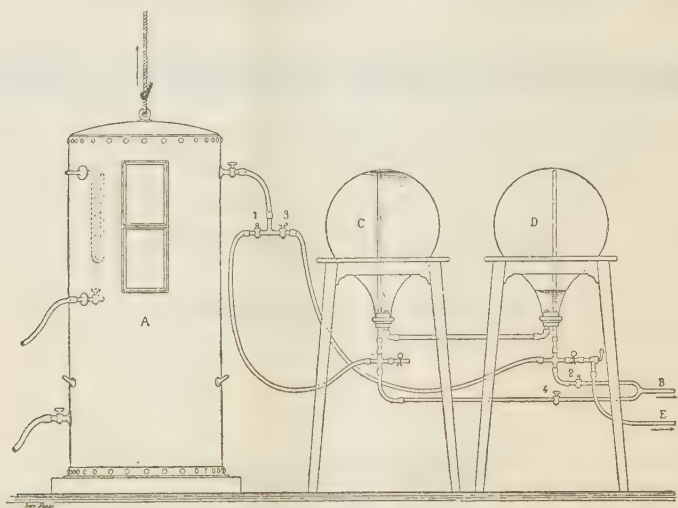


FIG. 1. — Apparecchio per studiare sull'uomo l'emissione del  $\text{CO}_2$  nell'aria rarefatta.

Confrontando la quantità di anidride carbonica che si otteneva per un tempo determinato (mentre si faceva la depressione) con quella che ottenevasi per un tempo eguale alla pressione barometrica ordinaria, si sarebbe potuto conoscere quanta anidride carbonica si eliminava in più dal corpo dell'uomo quando questo trovavasi nell'aria rarefatta.

Facendo tali esperienze abbiamo trovato che gli stantuffi delle pompe, anche tenuti coperti da uno strato d'olio, lasciavano penetrare dell'aria nelle forti depressioni. Si dovette abbandonare questo metodo e fare le esperienze senza che l'aria da analizzarsi passasse attraverso le pompe. A tale scopo adoperammo due grandi boccioni CD della capacità di 90 litri ciascuno, capovolti su un supporto di legno. Un tubo di vetro, come si vede nella figura, li attraversa in tutta la loro lunghezza e termina in un tubo a quattro vie, una delle quali comunica colla campana A, una colle pompe, per mezzo del tubo a forchetta B, e l'altra serve per la presa dei campioni d'aria da analizzare.

Nei due boccioni è stata introdotta una quantità di acqua tale che se viene tutta aspirata in uno di essi fino a livello del tubo di vetro, nell'altro boccione rimane uno spazio libero di 88 litri. Per impedire che l'acqua

assorba l'anidride carbonica, essa viene ricoperta nei due recipienti da uno strato di olio di vasellina, il cui coefficiente di assorbimento per l'acido carbonico è, secondo prove da noi fatte, la metà di quello dell'acqua.

Prima di incominciare l'esperienza, si riempie il recipiente D con acqua; quando l'uomo è entrato nella campana, si aprono i robinetti 3 e 4; facendo

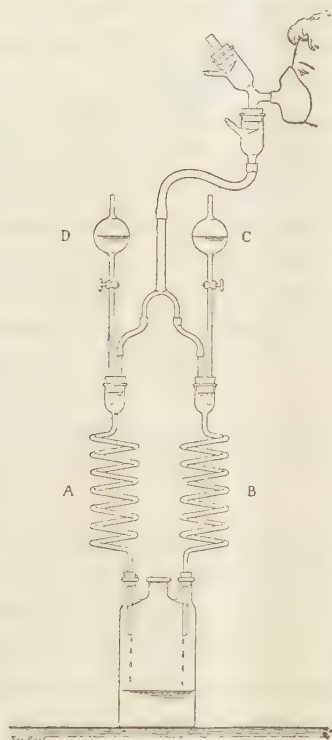


FIG. 2. — Apparecchio a potassa per trattenere il  $\text{CO}_2$ .

agire le pompe, l'acqua viene aspirata da D in C, mentre D si riempie coll'aria della campana.

Il tubo E, il quale comunica col recipiente D, si unisce dall'altra parte ad una boccia tarata di un litro e mezzo, ripiena di mercurio (non rappresentata nella figura), la quale comunica inferiormente con un'altra boccia aperta. Quando C è ripieno di liquido, si chiudono le chiavette 3 e 4 e aprendo la comunicazione con E, si preleva un campione d'aria da D. Quindi si inverte il sistema, cioè si aprono le chiavette 1 e 2 e colla pompa si aspira l'acqua in D ed alla quarta via comunicante con C si unisce il tubo E. Prima di fare quest'ultima operazione, naturalmente si travasa il campione preso da D in un altro recipiente, nel quale si riuniscono tutti quelli che

si raccolgono in seguito. In una mezz'ora (durata media delle esperienze) quest'operazione viene fatta quattro volte, quindi, riunendo i quattro campioni, si viene ad avere un volume d'aria più che sufficiente per la determinazione del  $\text{CO}_2$  col metodo di Pettenkofer.

Siccome in una mezz'ora la quantità d'anidride carbonica, che si accumula nella campana, potrebbe alterare il processo d'eliminazione dell'anidride carbonica stessa dal corpo, si è cercato d'assorbirne una parte. L'aria espirata, per mezzo delle valvole di Zuntz e di una maschera di guttaperca applicata sul volto, come si vede nella fig. 2, doveva passare per due serpentine di vetro A e B, lunghi tre metri ciascuno, nei quali si faceva gocciolare una soluzione di potassa al 50% dai due serbatoi C e D.

Questo metodo non diede il risultato che se ne sperava, poichè veniva solo arrestato da un quarto ad un terzo dell'anidride carbonica eliminata dall'uomo; nonostante la lunghezza dei serpentine, l'aria espirata passava troppo rapidamente per liberarsi di tutta l'anidride carbonica che conteneva; difatti si ebbe lo stesso risultato sia introducendo semplicemente in bocca al paziente il tubo dell'apparecchio, sia adattandogli la maschera per far passare tutta l'aria nei serpentine.

Quanto all'umidità dell'aria, essa è minore quando diminuisce la pressione barometrica, ma questa differenza forse non è tale da modificare notevolmente i risultati.

Di tutte le esperienze che abbiamo fatte, riportiamo solo le tre ultime. Avendo trovato che eliminavasi una quantità maggiore di anidride carbonica nell'aria rarefatta, ripetendo le esperienze a pressione ordinaria, si tenne meno tempo la persona sotto la campana, in modo da ottenere alla fine della esperienza una composizione eguale dell'aria dentro la campana, per riguardo all'anidride carbonica. Siccome l'aria nelle stanze del laboratorio non è perfettamente pura, si ebbe la precauzione ad ogni esperienza di fare il vuoto nella camera pneumatica e di riempirla dopo con aria presa dal giardino per mezzo di un lungo tubo, ripetendo parecchie volte questa operazione. Le analisi dell'aria normale diedero sempre una quantità di  $\text{CO}_2$  uguale al 0,4%.

Per mantenere durante l'esperienza invariata la quantità d'ossigeno, si introduceva un po' per volta nella campana un volume di ossigeno corrispondente all'incirca a quello che veniva consumato dalla persona che respirava nella campana.

Le tre esperienze delle quali comunichiamo i risultati in questa Nota, furono eseguite sopra Giorgio Mondo che è persona robusta nell'età di 44 anni, del peso di 64 chilog. e della statura di 1<sup>m</sup>, 69.

# ESPERIENZA 1<sup>a</sup>.

## A PRESSIONE DIMINUITA (1).

21 giugno 1902. Ore 9,13'45'':  $t = 16^{\circ}$   $H = 740^{\text{mm}},3$

|     |           |                       |
|-----|-----------|-----------------------|
| ore | 9,23'     | $H = 676^{\text{mm}}$ |
| "   | 9,30'     | " " $636^{\text{mm}}$ |
| "   | 9,36'     | " " $590^{\text{mm}}$ |
| "   | 9,42'     | " " $546^{\text{mm}}$ |
| "   | 9,42'15'' | $t = 19^{\circ}$      |

Ossigeno introdotto nella campana = litri 11.

Durata dell'esperienza 28'30''.

|                                                                          |     |        |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|--------|
| Anidride carbonica contenuta nella campana (dedotta quella preesistente) | gr. | 9,417  |
| " " estratta coi bocconi . . . . .                                       | "   | 3,910  |
| " " trattenuta dalla potassa . . . . .                                   | "   | 5,470  |
| Anidride carbonica eliminata in 28'30'' . . . . .                        | gr. | 18,797 |
| " " calcolata per 30' . . . . .                                          | "   | 19,786 |

## A PRESSIONE ORDINARIA.

Lo stesso mattino ore 11,26'30'':  $t = 18^{\circ},7$

Siccome la temperatura è superiore a quella della prima esperienza, per impedire che s'innalzi troppo, si inumidisce esternamente la campana in principio e dopo 20 minuti:

Introdotti litri 11 d'ossigeno.

Ore 11,50'30'':  $t = 20^{\circ},2$ .

Pressione positiva  $11^{\text{cm}},5$  d'acqua.

Durata dell'esperienza 23'45''.

|                                                                       |     |        |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|--------|
| Anidride carbonica contenuta nella campana (dedotta quella dell'aria) | gr. | 10,298 |
| " " trattenuta dalla potassa . . . . .                                | "   | 4,142  |
| Anidride carbonica eliminata in 23'45'' . . . . .                     | gr. | 14,440 |
| " " calcolata per 30' . . . . .                                       | "   | 18,238 |

A pressione diminuita si sarebbero eliminati in più gr.  $19,786 - 18,238 = \text{gr. } 1,548$ .

# ESPERIENZA 2<sup>a</sup>.

## A PRESSIONE DIMINUITA (2).

24 giugno 1902. Ore 9,42'30'':  $H = 741^{\text{mm}}$   $t = 19^{\circ},7$

|     |            |                       |
|-----|------------|-----------------------|
| ore | 9,50'      | $H = 674^{\text{mm}}$ |
| "   | 9,55'      | " " $632^{\text{mm}}$ |
| "   | 10,4'      | " " $592^{\text{mm}}$ |
| "   | 10,9'      | " " $545^{\text{mm}}$ |
| "   | 10,10'45'' | $t = 21^{\circ},9$    |

(1) In questa prova, e nella seguente a pressione ordinaria, non si fece uso della maschera. L'aria venne raccolta mettendo in bocca semplicemente il tubo di gomma, senza chiudere le narici.

(2) L'aria aspirata che passava nei tubi colla potassa fu raccolta applicando sulla faccia di Giorgio Mondo la maschera di guttaperca, com'è indicato nella fig. 2: essa chiudevva ermeticamente per mezzo di uno strato di mastice da vetrai rammollito con vasellina.

Ossigeno introdotto nella campana litri 12.

Durata dell'esperienza 28'15".

|                                                    |            |
|----------------------------------------------------|------------|
| Anidride carbonica nella campana (netto) . . . . . | gr. 7,663  |
| " " nei bocconi . . . . .                          | " 2,807    |
| " " trattenuta dalla potassa . . . . .             | " 3,613    |
| Anidride carbonica eliminata in 28'15". . . . .    | gr. 14,083 |
| " " calcolata per 30' . . . . .                    | " 14,957   |

A PRESSIONE ORDINARIA.

Ore 11,37':  $t = 20^{\circ},5$ .

Come nella prova precedente si inumidisce la campana esternamente per raffreddarla alquanto.

Ossigeno introdotto nella campana litri 12.

Ore 12,6'30":  $t = 22^{\circ},2$ .

Durata 29'30".

|                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| Anidride carbonica emessa nella campana (netto) . . . . . | gr. 9,196  |
| " " trattenuta dalla potassa . . . . .                    | " 3,526    |
| Anidride carbonica emessa in 29'30" . . . . .             | gr. 12,722 |
| " " calcolata per 30" . . . . .                           | " 12,957   |

A pressione diminuita si sarebbero eliminati in più durante mezz'ora gr. 14,987 — 12,987 = gr. 1,970.

ESPERIENZA 3<sup>a</sup>.

27 giugno 1902.

Mentre che nelle esperienze precedenti si era fatta prima la prova colla pressione diminuita, in questa cominciamo coll'analisi dell'aria a pressione ordinaria (1).

A PRESSIONE ORDINARIA.

Ore 9,54'45":  $H = 742^{\text{mm}}$   $t = 20^{\circ},4$

Ore 10,17':  $t = 23^{\circ}$ .

Ossigeno introdotto litri 10.

Durata dell'esperienza 22'15".

Si è fatta durare meno del solito per non accumulare troppa anidride carbonica nella campana, poichè a metà dell'esperienza si è interrotto il funzionamento dell'apparecchio a potassa.

|                                                    |            |
|----------------------------------------------------|------------|
| Anidride carbonica nella campana (netto) . . . . . | gr. 10,408 |
| " " trattenuta dalla potassa . . . . .             | " 1,845    |
| Anidride carbonica eliminata in 22'15". . . . .    | gr. 12,253 |
| " " calcolata per 30' . . . . .                    | " 16,522   |

(1) In questa esperienza l'aria si fa passare nei serpentini colla soluzione di potassa adoperando, invece della solita maschera, le valvole di Zuntz adattate alla bocca, mentre le narici sono chiuse con una pinzetta.

A PRESSIONE DIMINUITA.

Ore 11,44':  $t = 21^{\circ},2$ .

Si inumidisce la campana esternamente.

|            |                       |
|------------|-----------------------|
| ore 11,52' | H = 676 <sup>mm</sup> |
| " 11,58'   | " " 626 <sup>mm</sup> |
| " 12,5'    | " " 598 <sup>mm</sup> |
| " 12,13'   | " " 552 <sup>mm</sup> |

Ossigeno litri 13.

Ore 12,13'45'':  $t = 22^{\circ},6$ .

Durata dell'esperienza 29'45''.

|                                                    |            |
|----------------------------------------------------|------------|
| Anidride carbonica nella campana (netto) . . . . . | gr. 9,877  |
| " " estratta coi boccioni . . . . .                | " 2,974    |
| " " trattenuta dalla potassa . . . . .             | " 5,473    |
| Anidride carbonica eliminata in 29'45'' . . . . .  | gr. 18,324 |
| " " calcolata per 30' . . . . .                    | " 18,478   |

Trovata in più a 552<sup>mm</sup> gr. 18,478 — 16,522 = gr. 1,956.

Le esperienze fatte dal prof. Ugolino Mosso in una precedente spedizione al Monte Rosa (<sup>1</sup>), che furono comunicate a questa Accademia, avendo mostrato che non compariscono a grandi altezze modificazioni importanti nella eliminazione di anidride carbonica, possiamo concludere che la forte quantità di anidride carbonica, che noi ottenemmo per la depressione di meno di  $\frac{1}{3}$  di atmosfera, si trovasse già formata nel sangue e nei tessuti.

Le esperienze, esposte nella memoria seguente, dimostrano appunto una diminuzione notevole dell'anidride carbonica nel sangue coll'abbassarsi della pressione barometrica. A questa diminuzione uno di noi, studiandone gli effetti, ha già dato il nome di *Acapnia* (<sup>2</sup>). Certo non può spiegarsi la differenza di 1.5 gr. a 2 gr. di anidride carbonica, ottenuta in così breve tempo, fra la respirazione nella pressione ordinaria e nell'aria rarefatta, come un semplice fatto fisico. Deve essere succeduta una decomposizione chimica nei componenti del sangue e dei tessuti.

Ci riserbiamo di continuare queste ricerche per vedere se è diminuita in modo corrispondente l'alcalinità del sangue.

(<sup>1</sup>) Ugolino Mosso, Rendiconti R. Accademia dei Lincei, 15 marzo 1896; ibid. 12 aprile 1896.

(<sup>2</sup>) A. Mosso, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, 2<sup>a</sup> edizione, 1898, pag. 382.

**Fisiologia** — *Analisi dei gas del sangue a differenti pressioni barometriche*. Nota del Socio ANGELO MOSSO e del dott. GIACOMO MARRO.

P. Bert fu il primo a fare delle esperienze sui gas contenuti nel sangue di animali portati a differenti pressioni barometriche <sup>(1)</sup>.

Egli introduceva un cane nella sua camera pneumatica e al momento opportuno prendeva dal di fuori un campione di sangue mediante una cannula. Per tale estrazione si serviva di una siringa messa dall'esterno, per mezzo di un tubo, in comunicazione coll'arteria. Ritornato l'animale alla pressione ordinaria, prelevava dopo qualche minuto un nuovo campione di sangue che analizzava come il primo mediante la pompa a mercurio. Dai risultati di 23 esperienze egli conchiuse che nel sangue, al di sotto di 570<sup>mm</sup> di pressione, sia l'ossigeno che l'anidride carbonica cominciano a diminuire: però in modo incostante.

Fraenkel e Geppert <sup>(2)</sup> hanno rifatte le esperienze di Bert con alcune modificazioni per procurarsi meglio i campioni del sangue da esaminare: ma viceversa sono incorsi in un altro errore facendo la tracheotomia agli animali. P. Bert aveva già notato la differenza che vi è nei gas del sangue prima della tracheotomia e dopo che si è fatta questa operazione ed aveva trovato in due esperienze sui cani:

|                                   |                 |                        |  |                       |                        |
|-----------------------------------|-----------------|------------------------|--|-----------------------|------------------------|
| prima della tracheotomia . . .    | ossigeno = 15,1 | CO <sub>2</sub> = 40,8 |  | O <sub>2</sub> = 16,0 | CO <sub>2</sub> = 41,5 |
| dopo alcuni minuti che si è fatta |                 |                        |  |                       |                        |
| la tracheotomia . . . . .         | " = 20,3        | " 24                   |  | " 23,4                | " 15,2                 |

Le cause di questo mutamento nei gas del sangue sono parecchie e non ci fermeremo qui ad enumerarle. Ci basta d'aver notato che l'operazione della tracheotomia da sola modifica la composizione del sangue.

Come esempio delle modificazioni che succedono nella composizione del sangue in seguito alla tracheotomia, riferiamo una esperienza da noi fatta sopra un coniglio.

Si prende un campione di sangue dalla carotide sinistra di un coniglio maschio del peso di 1800 gr.:

$$\text{O}_2 = 16,78\% \qquad \text{CO}_2 = 36,18\%$$

<sup>(1)</sup> Paul Bert, *La pression barométrique*, 1878.

<sup>(2)</sup> Fraenkel und Geppert, *Ueber die Wirkungen der verdünnten Luft auf den Organismus*, Berlin, 1883.

Dopo un quarto d'ora si eseguisce la tracheotomia e si prende un campione due minuti dopo aperta la trachea

$$\text{O}_2 = 18,33 \% \qquad \text{CO}_2 = 35,23 \%$$

La rapidità più o meno grande del respiro modificando i gas del sangue, nel prendere il campione di sangue abbiamo aspettato, prima della tracheotomia e dopo di essa, che il coniglio fosse bene tranquillo. L'aver trovato più ossigeno e meno anidride carbonica dopo la tracheotomia, non dipende sempre dal fatto che la ventilazione dei polmoni fosse più attiva; probabilmente l'aria nei polmoni si mantiene più pura perchè minore la lunghezza delle vie e può meglio ricambiarsi perchè lo spazio nocivo, come lo chiamò Loewy, ossia quella parte di aria che rimane nelle vie aeree senza penetrare negli alveoli e nei bronchi, è minore. Inoltre, arrivando l'aria nei polmoni più secca e più fredda, il ricambio dei gas può essere più attivo dopo la tracheotomia.

Le analisi fatte da Fraenkel e Geppert non sono bene paragonabili per stabilire gli effetti della pressione barometrica, perchè essi estraevano i campioni di sangue da esaminare alla pressione ordinaria uno o due giorni dopo che avevano fatto l'esame del sangue nell'aria rarefatta. Ora in questo lasso di tempo il cane poteva in certo qual modo adattarsi al nuovo genere di respirazione.

Noi abbiamo adottato un metodo che ci permettesse di prendere il sangue da analizzare a così breve distanza l'una volta dall'altra, che fossero escluse le variazioni accidentali che rendono variabili i risultati quando si aspetta parecchi giorni. Così pure non abbiamo tenuto troppo lungo tempo legati gli animali come succedeva nelle esperienze di P. Bert, di Fraenkel e Geppert; ma per evitare tale inconveniente abbiamo adottato un metodo di esperienze che ci permettesse di legare gli animali solo nel momento che dovevamo prendere il campione di sangue. Ed il sistema da noi adoperato aveva il vantaggio che 15 o 20 minuti dopo la presa del campione, questo veniva già liberato dall'ossigeno per fare l'analisi.

A questo riguardo le ultime analisi fatte da Tissot <sup>(1)</sup> in una ascensione aerostatica e sotto la campana pneumatica sono meno attendibili, perchè egli faceva le analisi da 13 a 15 ore dopo aver preso i campioni, ciò che spiega la discordanza dei risultati che ottenne.

Un altro errore deve evitarsi ed è quello di non fermare il corso del sangue nell'arteria quando si tratta di conoscere la composizione del sangue circolante. Se si eccettuano le analisi di Tissot, quelle fatte sino ad ora dagli altri sperimentatori per studiare l'azione dell'aria rarefatta, o compressa,

(1) Comptes rendus hebdomadaires de la Société de biologie, 6 décembre 1901, 20 juin 1902.

ebbero l'inconveniente che venne chiusa l'arteria per fissarvi una cannula, così che le prime porzioni del sangue arterioso raccolto erano certamente diverse dal sangue circolante.

A queste svariate cause di errore noi crediamo di aver ovviato adottando con alcune modificazioni il nuovo metodo di analisi proposto da Barcroft e Haldane <sup>(1)</sup>. L'apparecchio adoperato da questi fisiologi ha il grande vantaggio di poter essere trasportato facilmente, cosicchè noi potemmo fare con esso delle esperienze sulla vetta del Monte Rosa, nella Capanna Regina Margherita <sup>(2)</sup>.

Col vecchio metodo dell'estrazione dei gas dal sangue per mezzo della pompa a mercurio non sarebbe stato possibile studiare i mutamenti del sangue sulle Alpi senza disporre di grandi mezzi, e malgrado i mezzi e il dispendio grande di tempo, occorrono delle quantità così grandi di sangue che diviene spesso impossibile il fare diverse prove sullo stesso animale. L'ingegnoso apparecchio di Barcroft ed Haldane permette di fare l'analisi sopra un centimetro cubico circa di sangue con discreta esattezza, specialmente per l'ossigeno.

Il tempo che si richiede per la determinazione dell'ossigeno e dell'anidride carbonica è breve, e l'operazione non presenta grandi difficoltà dopo che si è acquistata un po' di pratica.

La fig. 1 rappresenta l'apparecchio che abbiamo adoperato. Per brevità non diamo la figura dell'apparecchio originale e rimandiamo chi voglia conoscerlo alla bella Memoria di Barcroft e Haldane, oppure allo scritto che pubblicherà uno di noi, dove viene data ragione delle modificazioni introdotte e di alcune correzioni da farsi in casi speciali ai risultati ottenuti per l'ossigeno <sup>(3)</sup>.

L'apparecchio è costituito da due manometri graduati uniti, mediante un tubo di gomma spessa, a due boccette approssimativamente della stessa grandezza (25-30<sup>cc</sup>), una delle quali serve per introdurvi il campione di sangue e l'altra per correggere l'errore dovuto ai cambiamenti di temperatura e pressione barometrica, che avvengano durante l'esperienza. La molla che preme la piccola pera di gomma, unita in fondo a ciascun manometro, serve a far cambiare il livello dell'acqua contenuta nel manometro stesso.

Le boccette presentano due rigonfiamenti laterali di  $\frac{1}{2}$  <sup>cc</sup> di capacità; in uno di essi si mettono 0<sup>cc</sup>,25 di soluzione satura di ferricianuro potassico

(1) *A method of estimating the oxygen and carbonic acid in small quantities of blood.* Journal of Physiology, May 1902.

(2) Siamo lieti di cogliere questa occasione per esprimere la nostra gratitudine ai signori Barcroft e Haldane che ebbero la gentilezza di regalarci il loro apparecchio col quale facemmo le analisi del sangue sul Monte Rosa.

(3) G. Marro, Atti della R. Accademia di medicina di Torino. Maggio 1903.

per liberare l'ossigeno, nell'altro, dopo fatta l'analisi dell'ossigeno, si met-

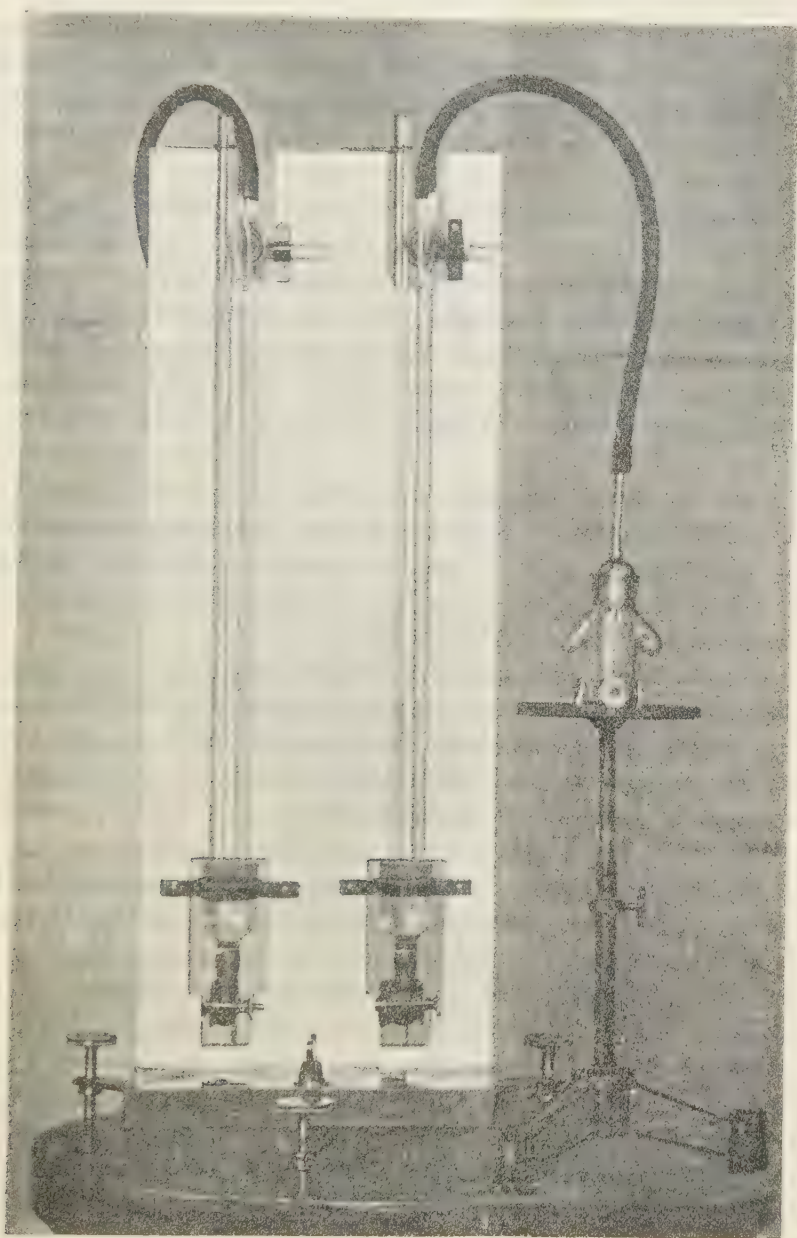


FIG. 1. — Apparecchio modificato di Barcroft e Haldane per l'analisi dei gas nel sangue.

tono 0<sup>cc</sup>,25 di acido tartarico al 20% per liberare l'acido carbonico.

Nel fondo della boccetta si mettono 1<sup>cc</sup>,5 di una soluzione di 2<sup>cc</sup> di ammoniaca del peso specifico 0,88 in 1000<sup>cc</sup> d'acqua. Il sangue si introduce sotto l'ammoniaca, tenendovi immersa la punta della pipetta o siringa.

Le due boccette si immergono in una vaschetta di vetro che trovasi nella parte posteriore dell'apparecchio e che qui non si vede. Si agita l'acqua del bagno con una corrente d'aria finchè le due boccette abbiano raggiunta la stessa temperatura, il che si vede quando il livello nei due manometri subisca variazioni uguali.

A questo punto mediante i robinetti a tre vie, si mettono i manometri a livello, si richiudono i rubinetti, si leva la boccetta, si agita per mescolare bene il sangue all'ammoniaca e inclinando la boccetta si fa venire il ferricianuro a contatto col sangue, si agita la boccetta fino a liberare tutto l'ossigeno e si rimette nel bagno. Quando essa ha ripreso la temperatura dell'altra, premendo sulle pere di gomma, si mette il livello interno dei due manometri allo stesso punto di prima e si legge l'altezza della colonna d'acqua dei due bracci esterni.

La colonna d'acqua della boccetta di controllo si deduce da quella dell'altra; così si ha la pressione del gas svoltosi; conoscendo esattamente il volume della boccetta, col solito calcolo si riduce il volume a 0° e 760<sup>mm</sup>.

Per l'acido carbonico si apre, si mettono 0<sup>cc</sup>,25 di acido tartarico 20% nella seconda taschetta e si fa come prima.

Solo i calcoli sono differenti, poichè si deve aggiungere al volume trovato la quantità d'anidride carbonica rimasta disciolta nel liquido; a questo scopo gl'inventori del metodo hanno determinato il coefficiente di solubilità del gas nel miscuglio di ammoniaca, sangue, ferricianuro, acido tartarico; è di un decimo circa inferiore a quello dell'acqua.

Il sangue da noi esaminato veniva preso direttamente dall'arteria mediante uno schizzetto di vetro simile a quello adoperato da Barcroft e Haldane. Per evitare l'inconveniente di mettere una cannula nell'arteria, ciò che altera la composizione del sangue, che cessa di circolare, ed obbliga ad una perdita di sangue maggiore del bisogno, abbiamo fissato all'estremità dello schizzetto un ago da iniezioni di platino iridiato di media grandezza.

Per levare un campione di sangue basta infiggere obliquamente la punta acuminata dello schizzetto nell'arteria. La pressione del sangue arterioso, se lo schizzetto è bene pulito, basta per spingere in alto lo stantuffo: così che l'operazione si compie senza dover tirare lo stantuffo, il che è un bene perchè si evita il pericolo di estrarre i gas dal sangue. Solo quando si arresta per qualche intoppo, basta muoverlo girando perchè torni a salire fino a che lo schizzetto sia pieno.

Levato l'ago dall'arteria, il sangue esce dalla medesima come uno zampillo, e, se non si legasse sopra e sotto, l'animale morirebbe di emorragia. Noi siamo riusciti ad impedire anche questo inconveniente in modo che pos-

sono farsi numerose esperienze sulla medesima arteria senza metterla fuori servizio.

Quando si leva lo schizzetto dall'arteria si chiude questa sopra e sotto la puntura fatta coll'ago per mezzo di due pinze emostatiche e si applica sopra la puntura una goccia di percloruro di ferro. Un momento dopo, aprendo leggermente la pinza superiore, si lascia uscire una goccia di sangue e si bagna nuovamente con percloruro di ferro. Dopo due o tre minuti si leva prima la pinza periferica e poi quella che sta vicino al cuore, e si trova che l'apertura fatta si è chiusa e che il movimento del sangue si ristabilisce nell'arteria.

Questo metodo serve anche per le arterie dei conigli, solo che si richiedono delle precauzioni maggiori. Essendo le pareti più sottili e il diametro dell'arteria più piccolo, bisogna servirsi con maggiore attenzione del percloruro di ferro perchè non eserciti un'azione astringente sulle pareti del vaso, ed inoltre bisogna far in modo che il tratto compreso fra le due pinze rimanga turgido, ripieno di sangue.

In queste analisi abbiamo avuto spesso l'occasione di vedere che la speditezza delle analisi è una delle condizioni essenziali per conoscere lo stato reale del sangue e studiare i mutamenti che subisce circolando in differenti circostanze.

Prendendo due campioni contemporaneamente dalla stessa arteria ed analizzando prima l'uno e poi l'altro, nel primo campione si trova sempre più ossigeno e meno anidride carbonica: nel secondo meno ossigeno e più anidride carbonica. Che il sangue estratto dall'organismo continui a vivere ed a respirare era già noto. Sul Monte Rosa fummo obbligati a fare le analisi su campioni doppi ed osservammo sempre questa differenza, ma non nello stesso grado però, quantunque il tempo interceduto fra la prima analisi e la seconda sia sempre variato entro i limiti di un'ora e mezza, due ore. Questo sta a provare la poca attendibilità delle correzioni fatte da Tissot alle sue analisi, che eseguì 13-15 ore dopo il prelevamento dei campioni.

Concludendo, la tecnica da noi adottata presenta i seguenti vantaggi principali:

si tiene legato l'animale solo cinque minuti al massimo per ogni esperienza;

si possono eseguire, anche nello stesso giorno, parecchie esperienze sullo stesso animale senza metterne fuori uso alcuna arteria e levandogli solo 1<sup>cc</sup> di sangue per volta;

quindici, venti minuti dopo il prelevamento del campione, lo si libera già dell'ossigeno che contiene, in modo che si evita l'errore sopraccennato.

**Fisiologia.** — *Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa.* Nota del Socio ANGELO MOSSO e del dott. GIACOMO MARRO.

Per istudiare i cambiamenti che subiscono i gas del sangue a grandi altezze facemmo delle analisi comparative in Torino (276 m.) e nella Capanna Regina Margherita (4560 m.). Lungo la strada ci siamo fermati a Gressoney la Trinité (1627 m.) ed al Col d'Olen (2900 m.) per fare altre analisi. Ritornati a Torino, eseguiammo numerose esperienze nella camera pneumatica per controllare i risultati di quelle fatte sulle Alpi.

Partimmo da Torino il 29 luglio 1902 insieme all'inserviente del Laboratorio (Giorgio Mondo, che ci accompagnò nella spedizione, portando con noi due cani. A Gressoney la Trinité prendemmo ancora quattro conigli. I cani furono nutriti con carne e zuppa di pane nel brodo: i conigli mangiarono solo del pane.

Prima di prendere il sangue per le analisi aspettammo sempre un giorno perchè gli animali si acclimatassero meglio al nuovo ambiente dove li portavamo. Si comprende però che quanto al clima le condizioni non fossero comparabili fra loro, perchè partimmo da Torino con una temperatura estiva in media di 25°, mentre sulla vetta del Monte Rosa parecchie ore del giorno e specialmente nella notte la temperatura della stanza scendeva parecchi gradi sotto lo zero. Il sangue venne preso mentre gli animali erano digiuni.

*Analisi del sangue fatte a Torino e nella Capanna Regina Margherita.*

Cane n. I (peso 9 chil.).

Torino 29 luglio 1902;  $t = 23^{\circ}$   $H = 747^{\text{mm}}$ .

Sangue preso dall'arteria femorale destra.

$O_2 = 14,54 \%$       $CO_2 = 37,44$ .

Capanna Regina Margherita, 8 agosto;  $t = 7^{\circ}$   $H = 435^{\text{mm}}$ .

Sangue preso dalla carotide sinistra; colore scuro, nero.

Temperatura rettale del cane  $38^{\circ}.2$ .

$O_2 = 11,21 \%$       $CO_2 = 36,22$ .

*Analisi fatte nella Capanna Regina Margherita e a Gressoney la Trinité.*

Cagna n. II (peso 7 chil.).

Capanna Regina Margherita, 7 agosto 1902;  $t = 6^{\circ},5$   $H = 438^{\text{mm}}$ .

Temperatura rettale  $38^{\circ},5$ .

2 campioni di sangue presi contemporaneamente dalla stessa carotide.

1<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 17,69 \%$   $CO_2 = 29,64$ .

2<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 17,55$   $CO_2 = 30,14$ .

Gressoney la Trinité, 10 agosto 1902;  $t = 15^\circ$   $H = 625\text{mm}$ .

Sangue preso dall'altra carotide; ha di nuovo colore rosso, ancora un po' scuro.

$O_2 = 19,41 \%$   $CO_2 = 36,72$ .

In tutti due i cani si osservò dunque, per effetto della diminuita pressione barometrica, una notevole diminuzione nella quantità di ossigeno e di anidride carbonica nel sangue. Giunti sulla vetta del Monte Rosa, anche prima di fare l'analisi era già evidente la differenza nel colore delle arterie, che erano di un rosso meno chiaro, e, penetrando il sangue nello schizzetto, si vide tutte le volte che era più bruno e non aveva il suo colore normale.

Su questi due cani si fece ancora una serie di analisi del sangue a Torino, che diedero i seguenti risultati. Dobbiamo però avvertire che il cane n. I era ingrassato, mentre che la cagnetta era diventata estremamente magra senza che ne sappiamo la ragione.

*Analisi fatte a Torino il 28 e 30 ottobre 1902.*

$t = 16^\circ$   $H = 747\text{mm}$ .

Cane I:  $O_2 = 12,67 \%$   $CO_2 = 33,14$

Cane II:  $O_2 = 14,8$   $CO_2 = 39,28$ .

*Analisi del sangue fatte sui conigli.*

Coniglio n. 1.

Albergo Col d'Olen, 3 agosto;  $t = 11^\circ,5$   $H = 540\text{mm}$ .

2 campioni presi contemporaneamente dalla stessa arteria.

1<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 15,57 \%$   $CO_2 = 38,65$

2<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 15,64$   $CO_2 = 39,93$ .

Coniglia n. 2.

Capanna Regina Margherita, 7 agosto;  $t = 11^\circ$   $H = 436\text{mm}$ .

Campioni presi dalle due carotidi; sangue nero.

1<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 10,96 \%$   $CO_2 = 35,55$ .

Coniglio n. 3.

Capanna Regina Margherita, 6 agosto;  $t = 12^\circ,5$   $H = 438\text{mm}$ .

Campioni presi contemporaneamente dalle due carotidi.

1<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 12,35 \%$   $CO_2 = 37,17$

2<sup>a</sup> analisi:  $CO_2 = 12,12$  —

Coniglio n. 4.

Gressoney, 10 agosto;  $t = 16^\circ$   $H = 625\text{mm}$ .

Campioni presi dalle due carotidi; sangue molto rosso.

1<sup>a</sup> analisi: —  $CO_2 = 38,48$

2<sup>a</sup> analisi:  $O_2 = 15,12 \%$   $CO_2 = 39,8$

Quando siamo giunti alla Capanna Regina Margherita il 5 agosto 1902 si stava ampliando la capanna e vi erano gli operai che lavoravano a costruire le due stanze che stanno nella parte anteriore, dalla parte opposta al torrione. Le camere erano ingombre dal legname di costruzione. Occupammo la stanza superiore del torrione, che era la sola disponibile, ma, accesa la stufa, scioglievasi la neve che erasi accumulata fra il soffitto e il piano del terrazzo, per un guasto succeduto nella copertura di rame. Questo stillicidio ci dava una grande molestia perchè non si riusciva a deviare l'acqua senza che cadesse sugli strumenti e da per tutto. Essendo questa la sola camera disponibile, che ci serviva come Laboratorio per tenere gli animali e per dormire, dopo quattro giorni fummo obbligati ad interrompere le ricerche e partire. Queste condizioni sfavorevoli per il nostro soggiorno lo furono molto di più per le analisi. Dalla scala veniva su una corrente d'aria fredda perchè gli operai aprivano e chiudevano continuamente la porta della camera sottostante, i serramenti non bene finiti e la tormenta che durò sempre in quei giorni producevano delle correnti d'aria e mantenevano una temperatura incostante poco favorevole per fare delle analisi esatte. Fu per ciò che credemmo necessario prelevare sempre due campioni di sangue contemporaneamente, che venivano analizzati l'uno di seguito all'altro.

Come si vede, tutti i secondi campioni, ch'erano lasciati a sè un'ora, un'ora e mezza prima dell'analisi, indicano chiaramente una minor quantità di  $O_2$  ed una maggiore di  $CO_2$  che nei primi analizzati. D'onde come già dicemmo, la necessità di fare immediatamente l'esame del campione prelevato.

#### *Esperienze di controllo fatte a Torino.*

Per confermare le analisi del sangue fatte sui conigli e sui cani durante la spedizione al Monte Rosa, ripetemmo le esperienze a Torino analizzando il sangue degli animali preso alla pressione ordinaria e sotto la campana pneumatica a 430<sup>mm</sup>, pressione media osservata alla Capanna Margherita. In queste esperienze come in quelle fatte durante la spedizione, il sangue si prendeva dall'arteria carotide, che dopo veniva legata, e si aspettava una settimana per fare l'altra prova, per permettere lo stabilirsi della circolazione collaterale. Negli esperimenti alle altre pressioni abbiamo invece adottato il sistema col percloruro di ferro, descritto nella Memoria precedente.

Prima dell'esperienza si allenavano gli animali alle rapide depressioni per due giorni consecutivi. Nel primo giorno si portavano i conigli in mezz'ora dalla pressione ordinaria a 430<sup>mm</sup> e vi si lasciavano per un'ora; in un'altra mezz'ora si ritornava alla pressione ordinaria. Nel secondo giorno invece di lasciare la pressione a 430<sup>mm</sup> per un'ora, la si lasciava ancora diminuire fino a 300<sup>mm</sup>.

I conigli non hanno mai patito menomamente, anzi li abbiamo visti mangiare tranquillamente a 430<sup>mm</sup>. Per prendere il sangue uno di noi entrava, *coll'animale slegato*, nella camera pneumatica descritta nella prima Nota. Si facevano funzionare le pompe in modo da avere una corrente d'aria di circa 1400 litri per la durata dell'esperienza. Si regolava l'entrata dell'aria in modo da raggiungere la pressione di 430<sup>mm</sup> in un quarto d'ora; si manteneva la pressione a tale altezza per un altro quarto d'ora, quindi si prelevava il campione di sangue. L'arteria veniva scoperta prima di entrare nella campana e gli animali venivano legati solo al momento di dover prendere il campione <sup>(1)</sup>.

Coniglio n. 5.

27 ottobre 1902, ore 10  $t = 14^{\circ},8$   $H = 739\text{mm},8$ .

Campione preso dalla carotide sinistra; sangue discretamente rosso.

$O_2 = 13,57\%$   $CO_2 = 40,42$

3 novembre 1902, ore 10  $t = 13^{\circ},3$   $H = 747\text{mm},8$

" 10,19' " 15 " 430

" 10,34 " 16,8 " 430.

Sangue preso dalla carotide destra, discretamente rosso.

$O_2 = 13,02\%$   $CO_2 = 32,64$ .

Coniglio n. 6.

10 novembre 1902:  $t = 14^{\circ}$   $H = 743\text{mm},7$ .

Carotide destra, sangue discretamente rosso.

$O_2 = 13,02\%$   $CO_2 = 40,50$ .

18 novembre 1902, ore 10,42'  $t = 11^{\circ},4$   $H = 745\text{mm},7$

" 10,50 " " 430

" 11,5 " 13^{\circ},9 " 430.

Carotide sinistra, sangue un po' scuro.

$O_2 = 11,31\%$   $CO_2 = 35,02$ .

Coniglio n. 7.

12 novembre 1902:  $t = 14^{\circ}$   $H = 745\text{mm}$ .

$O_2 = 12,76\%$   $CO_2 = 39,35$ .

22 novembre 1902, ore 9,58'  $t = 12^{\circ},7$   $H = 745\text{mm}$

" 10,13 " 14,3 " 430 (il coniglio pare sonnolento)

" 10,25 " 15,7 " 430.

Carotide destra, sangue scuro.

$O_2 = 9,40\%$   $CO_2 = 33,44$ .

(1) Nel calcolo delle esperienze fatte alla pressione ordinaria si è aggiunto al risultato per cento dell'ossigeno, 0,98 per la pressione di 760<sup>mm</sup> e 0,96 per la pressione di 740<sup>mm</sup>. Per i campioni prelevati sotto la campana, siccome naturalmente, invece di contenere 0,948 volumi per cento di azoto, ne contenevano 0,948  $\frac{430}{760} = 0,536$ , abbiamo ancora aggiunto alla correzione di cui sopra  $0,948 - 0,536 = 0,412$  a 760<sup>mm</sup> e 15°; e 0,386 a 15° e 740<sup>mm</sup>, cioè in totale:

presi a 430<sup>mm</sup> ed analizzati a 760<sup>mm</sup> e 15°  $0,980 + 0,41 = 1,39$

" " " 740 "  $0,960 + 0,38 = 1,24$ .

Coniglia n. 8.

13 novembre 1902:  $t = 13^{\circ}$   $H = 748\text{mm},6$ .

$O_2 = 13,81\%$   $CO_2 = 34,00$ .

19 novembre 1902. Ci accorgiamo che la coniglia è gravida di 8 o 10 giorni.

Ore 14,55'  $t = 15^{\circ},5$   $H = 745\text{mm},7$

" 15,10 " 17 " 430

" 15,25 " 17,6 " 430

Carotide destra, sangue un po' rosso.

$O_2 = 10,83\%$   $CO_2 = 30,29$ .

Coniglio n. 9.

17 novembre 1902. Dalla carotide sinistra, sangue rosso.

25 novembre 1902, ore 9,43'  $t = 11^{\circ},9$   $H = 740\text{mm}$

" 10,3 " 14,5 " 430

" 10,20 " 15,9 " 430

Carotide destra, sangue un po' scuro.

$O_2 = 11,13\%$   $CO_2 = 30,15$

Coniglio n. 10.

24 novembre 1902, ore 9,46'  $t = 12^{\circ},7$   $H = 746\text{mm}$

" 10,2 " 14 " 430

" 10,17 " 15,2 " 430

Carotide sinistra, sangue un po' scuro.

$O_2 = 10,29\%$   $CO_2 = 34,23$

1° dicembre 1902, ore 16  $\frac{1}{2}$   $H = 738\text{mm}$ .

Carotide destra, sangue molto rosso.

$O_2 = 11,70\%$   $CO_2 = 36,94$

Coniglio n. 11.

26 novembre 1902, ore 9,38'  $t = 13^{\circ},8$   $H = 732\text{mm}$

" 9,57 " 15,2 " 430

" 10,12 " 16,5 " 430

Carotide destra, sangue un po' scuro.

$O_2 = 12,18\%$   $CO_2 = 33,61$

2 dicembre 1902, ore 16  $t = 14^{\circ}$   $H = 735\text{mm},2$ .

Carotide sinistra, sangue molto rosso.

$O_2 = 14,63\%$   $CO_2 = 41,54$

Coniglia n. 12.

16 dicembre 1902, ore 10,10'  $t = 16^{\circ},7$   $H = 750\text{mm},5$

" 10,30 " 18 " 430

" 10,45 " 19 " 430

Carotide sinistra, sangue scuro.

$O_2 = 9,49\%$   $CO_2 = 29,92$

23 dicembre 1902, ore 9,30'  $t = 14^{\circ}$   $H = 751\text{mm},5$ .

Carotide destra, sangue molto rosso.

$O_2 = 13,48\%$   $CO_2 = 38,10$

Queste otto esperienze fatte nella camera pneumatica confermarono pienamente i risultati delle analisi fatte sulla vetta del Monte Rosa, e in tutte si vide che il sangue dell'arteria carotide contiene meno ossigeno e meno anidride carbonica alla pressione di 430<sup>mm</sup> di quanto ne contenga alla pressione barometrica di Torino.

Onde poter paragonare meglio i risultati, riferiamo le diminuzioni trovate a cento parti dei gas trovati alla pressione ordinaria:

| Su 100 di ossigeno a 740 <sup>mm</sup><br>ne rimasero a 430 <sup>mm</sup> |         | Su 100 parti di CO <sub>2</sub> a 740 <sup>mm</sup><br>ne rimasero a 430 <sup>mm</sup> |         |
|---------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| n. 5                                                                      | 95,95   |                                                                                        | 80,76   |
| n. 6                                                                      | 86,83   |                                                                                        | 86,48   |
| n. 7                                                                      | 73,71   |                                                                                        | 84,96   |
| n. 8                                                                      | 81,41   |                                                                                        | 89,10   |
| n. 9                                                                      | 70,13   |                                                                                        | 89,99   |
| n. 10                                                                     | 87,97   |                                                                                        | 92,65   |
| n. 11                                                                     | 83,31   |                                                                                        | 80,75   |
| n. 12                                                                     | 70,39   |                                                                                        | 78,52   |
| media                                                                     | 81,21 % |                                                                                        | 85,40 % |

In tutte queste esperienze è costante la diminuzione dell'ossigeno e dell'anidride carbonica a 430<sup>mm</sup>. Però le differenze tra i risultati delle singole esperienze sono molto rilevanti, e la causa ne va ricercata essenzialmente nei cambiamenti di nutrizione che avvenivano nell'animale durante la settimana decorrente fra il primo esame ed il secondo. Si vedrà ora quale concordanza ottenemmo invece in tutte le esperienze che seguono col perfezionare la tecnica in modo da fare le due esperienze a due ore sole di distanza, mantenendo l'animale nelle stesse identiche condizioni.

#### *Esperienze sui cani a 430<sup>mm</sup>.*

La nostra camera pneumatica è troppo piccola per lavorare comodamente sui cani; abbiamo dovuto costruire a tale scopo un sostegno cemicircolare in modo da poter tenere orizzontalmente l'animale ed abbiamo operato come sui conigli, tenendo il cane slegato e fissandolo solo all'ultimo momento, quando la pressione nella camera pneumatica era a 430<sup>mm</sup>. Su questo primo cane, chiudendo le ferite al percloruro di ferro, potemmo fare ben quattro esperimenti senza guastargli nessuna arteria. Quest'animale non aveva ancora servito ad alcuna esperienza in laboratorio, e, per non risvegliarne la diffidenza, lo si legò e gli si mise la carotide allo scoperto sotto la campana solo al momento opportuno.

Cane III, di 8 mesi circa (peso chil. 6,650).

11 gennaio 1903, ore 14,31'  $t = 17^{\circ},9$   $H = 751\text{mm}$ .

" 14,44 —  $H = 480$  il cane respira affannosamente colla bocca aperta per un minuto, quindi normalmente; si rallenta la velocità con cui si fa la rarefazione.

" 14,50 il cane respira di nuovo con un po' d'affanno.

" 14,55  $t = 19^{\circ},9$   $H = 430\text{mm}$  la lingua pare diventata un po' cianotica, continua un leggero affanno di respiro. Si lega il cane, si mette la carotide allo scoperto; l'animale si è mantenuto abbastanza tranquillo, si attende un minuto:

" 15,12  $t = 21^{\circ},5$   $H = 430\text{mm}$ .

Si preleva il campione; sangue scuro.

$O_2 = 15,99\%$   $CO_2 = 36,52$

La carotide non viene legata, si mette il percloruro di ferro sul foro fatto dall'ago e dopo dieci minuti si levano le due pinze in modo da permettere di nuovo la circolazione del sangue nell'arteria. Quindi noi ci troviamo nuovamente di fronte ad un cane che si può dire in condizioni normali. Slegato l'animale, sta un po' di tempo fermo, quindi si mette a girare per la camera. Un'ora e mezza dopo che si trova alla pressione ordinaria, cioè alle 16,45, si lega nuovamente il cane che non oppone resistenza e si preleva il campione dalla carotide destra; anche questa non viene chiusa.

Sangue molto più rosso del precedente, ma più scuro del normale.

$O_2 = 19,47\%$   $CO_2 = 41,63\%$ .

Riferendo la diminuzione trovata nell'ossigeno e nell'anidride carbonica a cento parti dei gas trovati alla pressione ordinaria, abbiamo:

$O_2 = 82,09$   $CO_2 = 87,75$ .

Sei giorni dopo si ripete un'altra esperienza sullo stesso cane, ma in senso inverso; notiamo però che l'animale è un po' depresso e meno vispo della prima volta.

16 febbraio 1903, ore 15: si prende il campione dalla femorale sinistra; sangue un po' scuro; l'animale si è agitato mentre si metteva l'arteria allo scoperto;

$t = 19^{\circ}$   $H = 740\text{mm}$

$O_2 = 18,04\%$   $CO_2 = 43,32$

Slegato il cane, esso rimane abbattuto per una mezz'ora, quindi ritorna allo stato normale. Un'ora e mezza dopo lo si porta entro la campana.

Ore 16,30  $t = 19^{\circ}$   $H = 740\text{mm}$ .

" 16,52  $t = 19^{\circ},7$   $H = 430\text{mm}$ .

Il cane non ha più l'aspetto impaurito che aveva dappprincipio; appare un po' sonnolento.

Ore 16,57 respira un po' affannato, ma tiene la bocca chiusa.

" 17,30 il cane si lascia legare senza difficoltà.

" 16,7  $t = 20^{\circ},8$   $H = 430\text{mm}$ .

Si preleva il sangue dalla carotide sinistra; ed ha un color scuro.

$O_2 = 14,01\%$   $CO_2 = 39,54$  (1).

(1) La differenza di 1,43 per l'ossigeno e di 1,69 per l'anidride carbonica si deve forse attribuire in parte a ciò che nella prima esperienza l'animale era digiuno dalla sera del giorno precedente, mentre che nella seconda esperienza aveva mangiato al mattino

Facendo il rapporto a 100 parti dei gas trovati alla pressione ordinaria, abbiamo per la pressione di 430<sup>mm</sup>:

$$O_2 = 77,70 \quad CO_2 = 91,30$$

Facendo la media colle due analisi precedenti abbiamo:

$$O_2 = 79,39 \quad CO_2 = 89,50$$

mentre pei conigli abbiamo avuto la media di

$$O_2 = 81,21 \quad CO_2 = 85,40.$$

Vista questa concordanza fra le due serie di esperimenti, abbiamo creduto inutile ripetere le prove sui conigli col nuovo metodo, e siamo passati senz'altro alle

*Esperienze a 520<sup>mm</sup>.*

Cane IV (peso gr. 4450).

Esso ha la carotide sinistra legata da due mesi, avendo servito per un'esperienza d'altro genere.

20 febbraio 1903. Il cane è a digiuno. Ore 14,30  $t = 18^{\circ},8$   $H = 755^{mm}$ .

Messa allo scoperto la femorale sinistra, si prende il campione; sangue rosso vivo. Il cane non si è mosso.

$$O_2 = 18,72 \% \quad CO_2 = 37,93.$$

Dopo dieci minuti si lascia nuovamente scorrere il sangue nell'arteria e si slega il cane.

Ore 16,3'  $H = 455^{mm}$   $t = 18^{\circ},5$ .

" 16,18'  $H = 520$   $t = 20^{\circ},5$ .

Il cane è molto tranquillo, senz'affanno di respiro.

Ore 16,25' si lega il cane senza che questi opponga resistenza.

" 16,33  $H = 520^{mm}$   $t = 21^{\circ},5$ .

Si preleva il campione dalla carotide destra; sangue un po' scuro.

$$O_2 = 15,78 \quad CO_2 = 35,33.$$

Quindi a 520<sup>mm</sup>, su 100 parti ch'erano alla pressione ordinaria, sono rimaste:

$$O_2 = 84,31 \quad CO_2 = 93,12.$$

Il 25 febbraio si ripete l'esperimento, facendo le prove in senso inverso; sfortunatamente un incidente ci fece andare a male l'analisi del 2° campione, quello preso a pressione ordinaria. Nel primo, preso a 520<sup>mm</sup> trovammo:

$$O_2 = 14,80 \quad CO_2 = 34,15$$

dati che confermano quelli ottenuti nella prima esperienza.

Coniglio n. 13 (peso gr. 1800).

26 febbraio 1903, ore 3,30'  $t = 17^{\circ},8$   $H = 750^{mm}$ . Carotide sinistra, sangue rosso.

$$O_2 = 15,33 \% \quad CO_2 = 38,43 \%$$

Ore 16,40'  $H = 750^{mm}$   $t = 17,3$ .

" 16,55 " 520 " 18,3.

" 17,10 " 520 " 19. Carotide destra, sangue scuro.

$$O_2 = 11,94 \quad CO_2 = 36,18.$$

---

alle otto. Per inavvertenza sapemmo questo solo quando era finito l'esperimento. Benchè fossero trascorsi sei giorni, il cane ebbe nella seconda volta più paura che nella prima, sebbene si tratti di un'operazione poco dolorosa.

A 520<sup>mm</sup> sono rimasti:

$$O_2 = 83\% \quad CO_2 = 94.1\%$$

Coniglia n. 14 (peso gr. 2000).

10 marzo 1903, ore 9  $\frac{1}{2}$  H = 744<sup>mm</sup> t = 16°. Carotide sinistra, sangue un po' scuro.

$$O_2 = 12,50 \quad 36,02.$$

Ore 10,40' H = 744<sup>mm</sup> t = 16°.

" 10,55 " 520 " 17°,2.

" 11,10 " 520 " 18°. Carotide destra, sangue scuro.

$$O_2 = 10,46 \quad CO_2 = 32,73.$$

Facendo la riduzione restano a 520<sup>mm</sup>:

$$O_2 = 83,65\% \quad CO_2 = 90,88\%$$

Coniglia n. 15 (peso gr. 2390).

Facemmo con questo animale prima l'esperienza colla pressione diminuita. Questo animale non era in condizioni normali perchè, scoperta la carotide, si trovò che era piccolissima con una pressione del sangue molto debole. Alcune ore dopo che fu preso il secondo campione, l'animale era morto.

25 marzo, ore 15,50 t = 19° H = 745<sup>mm</sup>

" 16,5 t = 20°,7 H = 520

" 16,15 si lega l'animale e si mette la carotide allo scoperto

" 16,22 t = 21°,2 H = 520

$$O_2 = 9,37 \quad CO_2 = 29,72.$$

Ore 18,10', t = 19° H = 745<sup>mm</sup>. Carotide destra, sangue rosso vivo

$$O_2 = 11,50 \quad CO_2 = 31,62.$$

Riferendoci a 100 parti dei gas trovati alla pressione ordinaria, rimasero a 520<sup>mm</sup>

$$O_2 = 81,14\% \quad CO_2 = 94\%$$

Facendo le medie delle precedenti analisi alla pressione di 520 mm., otteniamo pei conigli:

$$O_2 = 82,9 \quad CO_2 = 92,96$$

concordemente a quanto si è trovato pei cani, cioè, facendo la media, per cani e conigli

$$O_2 = 83,60 \quad CO_2 = 93,04$$

#### *Esperienze a 590<sup>mm</sup>.*

Trattandosi di una piccola depressione, che forse non agisce sull'organismo colla velocità con cui agivano le altre depressioni maggiori, abbiamo creduto meglio di raggiungerla in 10 minuti, invece che in 15, per rimanervi 5 minuti di più.

Coniglia n. 16 (è gravida; peso gr. 2450).

27 febbraio 1903, ore 15,45' t = 17°,5 H = 740<sup>mm</sup>. Carotide sinistra, sangue rosso

$$O_2 = 14,35 \quad CO_2 = 38,62.$$

Ore 17,21 t = 17°,3 H = 740<sup>mm</sup>

" 17,31 " 18°,3 " 590

" 17,51 " 19°,5 " 590.

Carotide destra, sangue rosso, leggermente più scuro del precedente.

$$O_2 = 12,76 \quad CO_2 = 38,45.$$

L'ossigeno è diminuito, l'anidride carbonica invece presenta una diminuzione che sta entro i limiti d'errore delle analisi. Quindi a 590<sup>mm</sup> rimasero

$$O_2 = 88,88\% \quad CO_2 = 100\%$$

Coniglia n. 17 (peso 2000 gr.).

Su questa si fa prima la prova a pressione diminuita

3 marzo 1903 ore 8,50  $H = 728$   $t = 16^{\circ},9$

" 9  $H = 590$  "  $18^{\circ}$

" 9,20  $H = 590$  "  $19^{\circ},3$ .

Carotide sinistra, sangue rosso.

$$O_2 = 11,27 \quad CO_2 = 35,04.$$

Si prende l'altro campione alle ore 11:  $t = 17^{\circ}$   $H = 728$ <sup>mm</sup>.

Carotide destra, sangue un po' più rosso del precedente.

$$O_2 = 12,26 \quad CO_2 = 34,89.$$

Cioè riferendo a 100:

$$O_2 = 91,8 \quad CO_2 = 100$$

Facendo la media delle due esperienze otteniamo che a 590<sup>mm</sup> rimasero:

$$O_2 = 90,34 \quad CO_2 = 100.$$

Cane V, di un anno circa (peso gr. 4400).

13 marzo 1903, ore 9,10'  $H = 744$ <sup>mm</sup>  $t = 15^{\circ}$ .

" 9,23  $H = 590$   $t = 17^{\circ}$ .

" 9,30 si lega il cane; si agita molto, cosicchè si trova difficoltà a mettere allo scoperto la carotide; il campione si prende tre minuti dopo che il cane è ritornato perfettamente tranquillo, cioè alle

Ore 9,55'  $H = 590$ <sup>mm</sup>  $t = 19^{\circ}$ . Sangue discretamente rosso.

$$O_2 = 17,05 \quad CO_2 = 38,05.$$

Alle ore 14 si lega il cane e si prende il campione dalla carotide destra; ma per un incidente occorso nell'analisi, si perde il campione, perciò dopo un quarto d'ora si lega nuovamente il cane e messa allo scoperto la femorale destra, si prende il campione da questa alle ore 14,30; siccome il cane si è agitato molto, anche stavolta si aspettò tre minuti prima di prendere il campione.

Sangue discretamente rosso.

$$O_2 = 18,30 \quad CO_2 = 40,04.$$

Quindi rimasero a 590<sup>mm</sup>:

$$O_2 = 93,15 \quad CO_2 = 95.$$

Cane VI, dell'età di un anno (peso gr. 3700).

18 marzo 1903, ore 14,40'  $H = 743$ <sup>mm</sup>  $t = 17^{\circ}$ .

Si prende il campione dalla carotide sinistra; il cane non si è mosso.

$$O_2 = 17,84 \quad CO_2 = 41,47.$$

Lo si porta sotto la campana alle

Ore 16,27' H = 749mm t = 16°,6.

" 16,38 H = 590 t = 18°.

" 16,50 si lega il cane, che non oppone resistenza.

" 16,59 si prende il campione dalla carotide destra; il cane è rimasto assolutamente tranquillo. Sangue rosso.

$$O_2 = 15,57\% \quad CO_2 = 40,95\%$$

cioè su 100 rimasero a 590mm

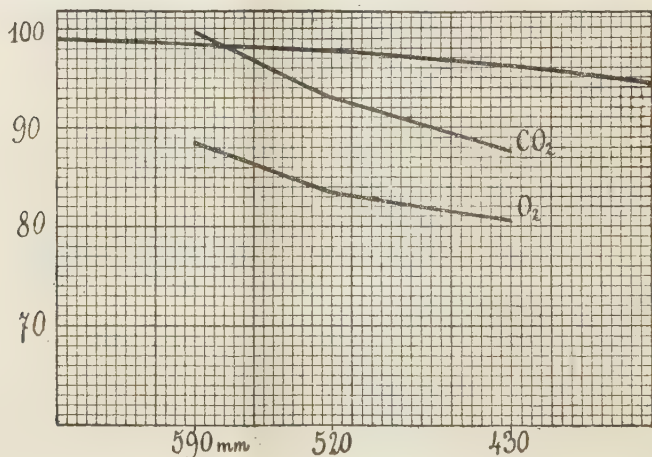
$$O_2 = 87,4\% \quad CO_2 = 98,75\%$$

Le differenze riscontrate nel  $CO_2$  si potrebbero ancora attribuire ad errori d'analisi. Facendo la media di questi risultati con quelli dei conigli e trascurando i dati del cane n. V, si ottiene che a 590mm rimasero

$$O_2 = 88,87 \quad CO_2 = 99,38.$$

Abbiamo intrapreso anche esperienze a pressioni minori e ci siamo trovati di fronte a fatti nuovi che vogliamo appurare; ne faremo oggetto di un'altra comunicazione.

Abbiamo rappresentato graficamente i risultati delle precedenti analisi nella tavola seguente: sulle ascisse sono rappresentate le pressioni, e sulle



Variazioni del  $CO_2$  e dell' $O_2$  contenuti nel sangue alle differenti pressioni barometriche. La curva superiore rappresenta le variazioni dell'ossigeno secondo la tensione dell'ossioglobina (Hüfner).

ordinate le quantità di anidride carbonica e di ossigeno riferite a 100 delle quantità trovate alla pressione normale. Per dare un'idea del fenomeno, abbiamo rappresentato (nella linea superiore) le quantità di ossigeno che dovrebbero esser contenute nel sangue per la tensione dell'ossioglobina alle varie pressioni. Questi dati li abbiamo calcolati da quelli di Hüfner <sup>(1)</sup>,

(1) Archiv für Anatomie und Physiologie Phys. Abt. 1901, pag. 187.

indicando con 100 la quantità di ossigeno che si troverebbe combinata ad una data quantità di emoglobina nell'aria alla pressione ordinaria. Si vede che l'ossigeno non segue le leggi della tensione dell'ossiemoglobina alle pressioni a cui si fecero gli esperimenti. È importante vedere che le due curve dell'ossigeno e dell'anidride carbonica decorrono quasi parallelamente.

Per spiegare la diminuzione dell'ossigeno basta ammettere una insufficiente ossigenazione del sangue dovuta al fatto che, col diminuire della pressione, scema proporzionatamente la quantità assoluta di ossigeno che viene a trovarsi in un dato volume d'aria. Forse il sangue, circolando nei polmoni quando vi è meno ossigeno, non ha più il tempo che gli occorre per ossigenarsi come alla pressione ordinaria; ma il fenomeno è più complesso perchè anche l'anidride carbonica diminuisce nel sangue arterioso per azione dell'aria rarefatta. Questa diminuzione è troppo forte perchè basti a spiegarla la maggior facilità con cui il vapore acqueo e conseguentemente l'anidride carbonica <sup>(1)</sup>, passano nell'aria dei polmoni per effetto della minor pressione. Deve esser succeduto un cambiamento chimico nel sangue, una diminuzione della sua alcalinità.

Lo studio delle cause dei fatti sopracitati sarà l'oggetto della terza spedizione al Monte Rosa, alla quale ci accingeremo quest'anno.

**Parassitologia.** — *Ricerche preliminari dirette a precisare la causa del gozzo e del cretinismo endemici.* Prima Nota del Socio B. GRASSI e del dott. L. MUNARON.

La causa del gozzo endemico e dell'intimamente connesso cretinismo, non ostante le molte ricerche già state fatte, resta tuttora avvolta nel più profondo mistero; mistero verso il quale è attratta l'attenzione degli indagatori specialmente oggiogiorno in cui di una delle malattie endemiche nei nostri paesi — la malaria — si è precisata la causa, e dell'altra — la pellagra — sembra di essere prossimi a determinarla.

Essendoci decisi ad affrontare tale problema, abbiamo ritenuto opportuno di battere una via alquanto differente da quella tenuta in generale dai più recenti osservatori; abbiamo voluto anzitutto procurarci una solida base di fatti che per induzione ci indicasse dove si dovessero dirigere le indagini microscopiche e chimiche per precisare l'agente morboso.

Riassumiamo qui in brevi termini i fatti finora assodati.

1. Dallo studio della letteratura risulta che accanto ad acque sane vi sono acque (fonti, sorgenti ecc.) gozzigene. Noi abbiamo cercato di controllare una parte di questi dati e dobbiamo confessare che finora le nostre ricerche

(1) Grandis e Mainini, R. Accademia di Medicina di Torino, gennaio 1902.

furono sfortunate. Così in molti lavori si riporta l'osservazione di coscritti che si recavano a Cavacurta presso Maleo (Lodi), dove acquistavano il gozzo in quindici giorni coll'uso della sorgente della località (Lombroso). Uno di noi si è recato a Cavacurta e ha verificato che, mentre nessuno sa nulla di questa fonte, a Cavacurta il gozzo non è mai stato endemico.

Si legge che nel villaggio di Antignano (provincia di Asti) esistono tre sorgenti di cui due sembrano possedere in grado diverso, il principio gozzigeno, mentre la terza ne è esente, così che le famiglie le quali fanno uso di una delle sorgenti contano numerosi cretini e gozzuti, quelle che sono più vicine alla seconda sorgente, non hanno che gozzuti, e un'altra parte del villaggio, quella che si serve della terza sorgente, è completamente indenne dalle suddette infermità. L'Ufficiale sanitario di Antignano, dott. Piano, ci comunica che tutto ciò non è assolutamente vero.

Del resto le popolazioni non attribuiscono tutte il gozzo all'acqua potabile; alcune ne ricercano la causa nell'alimento (patate, castagne ecc.).

Aggiungasi che moltissimi passano mesi e mesi specialmente nella stagione estiva in luoghi in cui il gozzo è endemico senza evitare l'uso delle acque gozzigene non cotte, e non filtrate; tuttavia noi non conosciamo alcun caso indiscutibile di gozzo preso durante questo soggiorno.

Non ostante quanto abbiamo riferito, siccome gli autori che hanno parlato di sorgenti gozzigene, sono numerosi ed alcuni molto competenti, così noi proseguiremo ancora le nostre investigazioni sull'argomento prima di pronunciare un giudizio definitivo.

2. Le osservazioni, riguardanti l'ereditarietà del gozzo, sono già numerose. In generale però la determinazione dell'ereditarietà, per quanto noi sappiamo, non sembra che sia stata sufficientemente accurata per i casi in cui gl'individui gozzuti, dopo essersi stabiliti in località in cui il gozzo non era endemico, hanno procreata una prole che non ha mai abbandonate queste località.

Noi abbiamo a questo riguardo raccolto fatti molto interessanti, perchè confermano in modo assoluto l'ereditarietà, e spiegano come col mescersi delle popolazioni, avvenuto specialmente negli ultimi cinquant'anni nel nord d'Italia, il gozzo sia diventato meno frequente in località in cui era endemico, e casi di gozzo si siano manifestati in paesi che erano del tutto indenni.

Passiamo alla parte sperimentale, per la quale ci siamo serviti dei cani.

3. A Cogne (1567 m. sul livello del mare), abbiamo fatto i seguenti esperimenti. Vi abbiamo inviate, verso la prima metà di settembre 1902, sette cagne ritenute pregne, provenienti da Rovellasca e dintorni, paesi indenni da gozzo. Quattro di esse, si dimostrarono non gravide; tre partorirono, già prima del 20 settembre, ma sopravvissero soltanto tre cuccioli, figli di due madri. Le cagne prima di partorire e quelle che non partorirono vennero tenute nella vasta scuderia vuota, annessa alla Casa Reale di Caccia,

scuderia che ha pavimenti di terra battuta. Per giaciglio si usava lo strame. I cuccioli — colle madri relative, finchè durò l'allattamento — vennero allevati nelle stanze terrene dell'abitazione del parroco del luogo, Don Luigi Gadin (molto benemerito di queste nostre ricerche), stanze con pavimento di legno, alle quali si accede per anditi con pavimenti di macigno. Il regime alimentare consistette in zuppa di pane e patate cotte, con pochi residui cotti di cucina, usando esclusivamente acqua previamente bollita. Propriamente si usava quella del serbatoio della cucina economica, che servendo per riscaldare l'ambiente, quando non era in ebollizione, cioè, per la maggior parte del giorno, rimaneva ad una temperatura prossima alla bollitura. L'assoluta esclusione dell'acqua non bollita avveniva necessariamente per la temperatura dell'ambiente, che durante l'esperimento coi cuccioli di cui si parla, fu sempre inferiore a 0°C., toccando un minimo di -18°C. Certamente nelle stanze terrene dell'abitazione del parroco, la temperatura era un po' meno bassa, non sufficiente però a fondere il ghiaccio. I cuccioli esaminati sul luogo il giorno 8 dicembre 1902, vale a dire 80 giorni circa dopo la nascita, non presentavano alcun ingrossamento della tiroide, ma nel successivo esame, fatto il 28 gennaio 1903, ossia circa quattro mesi dopo la nascita, due cuccioli, figli della stessa madre, furono rinvenuti affetti da gozzo bilaterale, in uno egualmente sviluppato da ambo i lati, e precisamente d'ambo i lati grosso quanto una noce ordinaria, nell'altro disegualmente cresciuto e prevalente a sinistra, dove raggiungeva pure le dimensioni di una noce di comune grandezza (furono subito trasportati a Roma). Il terzo cucciolo non aveva traccia di gozzo nè fino al giorno 5 giugno 1903, data dell'ultimo esame, ne presentava traccia alcuna.

Si è sopraccennato al ricovero delle cagne rimaste sterili, nel quale furono accolte dopo l'allattamento anche due delle cagne che avevano figliato, perchè la terza, e propriamente la madre del cucciolo che rimase immune da gozzo, essendo sensibilissima al freddo, visse sempre nella casa del parroco. Il regime, sia per il cibo che per la bevanda, fu quello stesso sopra indicato. Si noti che nella scuderia, meno protetta contro il freddo del pianterreno dell'abitazione del parroco, la temperatura fu molto più bassa, e il terreno restò costantemente congelato per oltre quattro mesi, tanto da essere scheggiato a fatica.

All'esame fatto il giorno 8 dicembre 1902, nessuna delle cagne mostrò ingrossamento della tiroide. Il 28 gennaio la madre dei due cuccioli affetti di gozzo fu trovata affetta essa pure (fu subito trasportata a Roma). Il 6 marzo 1903, la cagna madre del cucciolo che si mantenne sano, la quale aveva vissuto, come si disse, nella casa del parroco, presentava anch'essa moderata ipertrofia della tiroide e così pure la terza cagna che aveva figliato, mentre le altre, ossia quelle restate sterili, ne erano affatto indenni.

L'11 aprile 1903, la madre del cucciolo indenne, presentava ridotto

l'ingrossamento della tiroide, constatato il 6 marzo. Si notava invece aumento del gozzo nella terza cagna, che aveva figliato, e la comparsa del gozzo in una sola delle quattro cagnerimaste sterili.

Il 5 giugno 1903 il gozzo permaneva nelle cagne già infette nel grado precedentemente constatato, mentre compariva anche nelle tre altre rimaste fino allora indenni, notevole in due, moderato in una.

Questi fatti furono verificati da uno di noi, il dott. Munaron, che ad onta dei disagi del viaggio, si è recato da Roma sul luogo. Da Roma ad Aosta, i biglietti ci furono gentilmente concessi dall'Ispettorato delle Ferrovie, per raccomandazione di S. E. il ministro Giolitti, e coll'intercessione del senatore Paternò, ai quali rendiamo i più vivi ringraziamenti, anche per averci fatti ottenere biglietti di trasporto gratuito per i cani.

La suddetta scuderia della Casa Reale di Cogne è stata messa a nostra disposizione per ordine del nostro amato Sovrano, sempre pronto ad ascoltare e favorire gli studiosi.

Da questi esperimenti fatti a Cogne si può indurre:

a) Che il gozzo si manifesta facilmente negli animali molto giovani.  
b) Che lo sviluppo del gozzo ha in generale un decorso relativamente rapido.

c) Che il gozzo si sviluppa anche nel rigor dell'inverno delle nostre Alpi, presentando in ciò una notevole differenza coll'andamento dell'epidemia malarica.

d) Che il gozzo si sviluppa anche bevendo esclusivamente acqua bollita.

Dopo questa prova, che stiamo ripetendo, noi riteniamo che il gozzo si possa prendere anche senza l'intervento dell'acqua potabile. Che con questa si possa prendere, lo riteniamo del pari, specialmente dopo le esperienze di Carle e Lustig, coronate da risultati positivi. Si potrebbe però obbiettare che queste non sono sufficientemente numerose e non sono sufficientemente provative, perchè fatte in località (Torino) dove potevano trovarsi facilmente cani e cavalli ereditariamente disposti ad acquistare il gozzo, località per la quale non conosciamo neppure ricerche estese sufficienti per escludere che il gozzo non sia mai stato o non sia endemico nei cani e nei cavalli.

Un'altra serie di ricerche venne fatta a Roma, località indenne da gozzo, sia per l'uomo che per i cani, come dimostrano, riguardo a questi ultimi, le autopsie, da noi fatte di numerosi cani, provenienti dal canile municipale.

4. A Roma abbiamo cercato di produrre il gozzo con fango e terra proveniente da Cogne, località in cui si può dire che nessun uomo si trovi senza gola piena o gozzo.

Tre cuccioli lattanti, colla madre, furono ricoverati nel canile situato nel giardino attiguo al Laboratorio di Anatomia comparata, ai primi di ottobre 1902, e, tenuti in osservazione fino al 26, parvero crescere normalmente sani e nutriti. Da quel giorno si iniziò la somministrazione diretta

del materiale sopraccennato (piccole quantità di fango e di terra), continuando l'alimentazione quasi esclusivamente con pane e latte.

Già alla fine di novembre i tre cuccioli apparvero malnutriti. Tale distrofia non si arrestò punto e pervenne in circa tre mesi a costituire di questi cuccioli, veri tipi di rachitici, senza che la tiroide presentasse all'esame segni di alterazione. Due morirono rispettivamente l'8 e il 24 febbraio 1903, il terzo, cui fu allora sospesa la somministrazione del materiale, visse fino al 23 aprile. Tutti alla sezione mostrarono i medesimi caratteri: marasmo e scheletro tipicamente rachitico. Le tiroidi invece apparvero normali.

5. Si è tentata un'altra serie di esperimenti, spargendo nell'ambiente in cui vivevano i cani, fango e spazzatura provenienti da varî ambienti di Cogne, e più particolarmente dagli ambienti dove i cani s'infettarono. Finora i risultati sono stati negativi, ma l'esperimento viene continuato essendo per ora la sua durata insufficiente.

6. Il 5 febbraio 1903, innestammo direttamente nel parenchima della tiroide di tre cuccioli di circa 40 giorni, materiale raschiato, al momento di servirsene, dal gozzo di uno dei due cuccioli di quattro mesi, vivo, trasportato da Cogne a Roma, e precisamente di quello che aveva il gozzo ugualmente sviluppato d'ambo i lati.

I tre cuccioli guarirono rapidamente; uno morì di malattia accidentale il giorno 11 marzo 1903, gli altri due sono tuttora vivi. Nessuno ha presentato, o presenta modificazioni nella tiroide. Attribuire questi risultati a immunità degli animali innestati dopo le osservazioni fatte a Cogne ci sembra inverosimile.

Questo esperimento ci sembra di fondamentale importanza, inquantochè tende a dimostrare che nel gozzo non esistono microbi gozzigeni.

Data la grande importanza di questo esperimento, si è ritenuto opportuno ripeterlo, ciò che si è fatto il 18 maggio innestando ad altri tre cuccioli materiale raschiato dal lobo sinistro del gozzo bilaterale voluminoso di un cagnolino di circa sei mesi, proveniente da Cogne. Nella raschiatura usata per questi sperimenti si ebbe cura di comprendere anche una paratiroide. Finora (16 giugno) i risultati sono negativi. Non mancheremo di fare altre controprove, dirette ad escludere sempre più che un microbio capace di prosperare per brevissimo tempo nell'organismo possa accendere il processo morboso, di cui ci occupiamo.

7. Si è tentato un esperimento anche con iniezione sottocutanea di sangue di cane gozzuto in tre cuccioli di circa 50 giorni.

L'esperimento fu fatto il 12 febbraio. Dal 13 marzo al 3 aprile i tre cani morirono di malattia accidentale, senza presentare nessuna alterazione della tiroide.

8. Passiamo ad alcune osservazioni, riguardanti l'andamento del morbo:

a) In paesi dove regna endemico.

Come risulta da quanto sopra si è detto, quella cagna che ha partorito il cucciolo, che si è dimostrato finora refrattario allo sviluppo del gozzo, fu trovata affetta il giorno 6 marzo e già il 18 aprile seguente presentava notevolmente ridotto l'ingrossamento della tiroide.

b) In paese dove non regna l'endemia.

La cagna sgravatasi a Cogne, madre dei due cuccioli, che presentavano già in gennaio il gozzo, riscontrata essa pure affetta, fu trasportata, come si è detto, alla fine di gennaio insieme coi figli a Roma e fu tenuta in osservazione senza cure speciali. Già all'esame praticato il 18 maggio, vale a dire, meno di quattro mesi dopo l'arrivo a Roma, presentava soltanto traccia d'ipertrofia della tiroide.

Il cucciolo già accennato, affetto da gozzo prevalente a sinistra, presentava il 18 maggio, cioè quattro mesi dopo l'arrivo a Roma, la tiroide notevolmente ridotta in volume, ma non ancora normale. (Il cucciolo col gozzo bilaterale fu ucciso dopo l'innesto di cui sopra si è parlato).

Il cagnolino proveniente da Cogne, coi due lobi della tiroide ingrossati, a cui fu tolto il sinistro il 18 maggio 1903 per l'esperimento d'innesto sopradetto, presentò dopo pochi giorni una notevole riduzione del lobo destro, il quale oggi, 16 giugno, cioè circa un mese dopo, sembra diventato normale.

Anche un cane adulto gozzuto, proveniente dalla Valtellina, dopo esser restato un certo tempo a Roma, presentava una riduzione notevole nel gozzo, che tuttavia era ancora voluminoso, quando il cane morì di morte accidentale.

Fatti simili sono già noti per l'uomo e per gli animali. L'importante è che in ogni caso il morbo, ancorchè di recente data, si arresta appena gli animali vengono allontanati dal centro d'infezione.

Noi abbiamo incominciati molti altri esperimenti e perciò non veniamo ancora ad alcuna conclusione definitiva, nè ci estendiamo in citazioni bibliografiche. Non possiamo però tacere la nostra ipotesi che *la causa del gozzo e del cretinismo endemici debba ricercarsi in veleni, derivati da un microbio specifico vivente non già nel corpo dell'essere vivo, bensì liberamente in materiale (a preferenza terreno) umido, forse interrottamente, quando si verificano speciali condizioni non ancora determinate. Questi veleni possono arrivare al nostro corpo, seguendo il tubo intestinale, per svariati veicoli, tra i quali l'acqua potabile*. Colla ipotesi tossica, come viene da noi formulata, tutti i fatti finora noti ci sembrano spiegabili compresa l'azione gozzigena, dei corsi d'acqua a brevissima distanza dai ghiacciai da cui provengono, ossia l'azione gozzigena dell'acqua appena formatasi dalla fusione del ghiaccio, ma intorbidata per lo scorrimento sul suolo.

Se questa ipotesi, che tende ad avvicinare il gozzo e il cretinismo alla pellagra e ad allontanarli dalla malaria, debba o no assurgere al grado di dottrina, ce lo insegneranno appunto gli esperimenti che stiamo compiendo.

**Fisica terrestre.** — *Riassunto* <sup>(1)</sup> *delle determinazioni di gravità relativa fatte nella Sicilia Orientale, in Calabria e nelle isole Eolie* <sup>(2)</sup>. Nota del Corrispondente A. RICCÒ.

Ebbi già l'onore di presentare all'adunanza dell'Accademia del 3 luglio 1898 una relazione preliminare sulle determinazioni di gravità relativa da me fatte in 16 stazioni, che costituivano la prima campagna. Essendosi verificata colle determinazioni ripetute in Catania ed a Pola una notevole variazione dei pendoli, specialmente durante la detta prima campagna; ed inoltre avendo trovato opportuno introdurre nei calcoli e riduzioni delle osservazioni di tempo e di gravità alcuni miglioramenti, suggeriti dall'esperienza mia propria e da quella di altri in quest'argomento, ho stimato utile (anche per dare uniformità ai risultati) di rifare tutti i calcoli relativi alle determinazioni di tempo e di gravità per la detta prima campagna, con quelli stessi metodi che poi ho seguito per tutte le altre 27 stazioni.

Naturalmente ciò ha portato qualche cambiamento, che avevo già preannunziato, presentando i primi risultati. Perciò ora riporterò insieme agli altri anche i risultati della prima campagna, nuovamente calcolati.

*Determinazione del tempo.* — Come nella prima campagna, anche nelle seguenti la determinazione del tempo o più precisamente dell'andamento dell'orologio Hawelk che dava la durata dell'oscillazione dei pendoli, si è fatta per mezzo di segnalazioni telegrafiche fra l'Osservatorio di Catania e quelle stazioni per le quali la comunicazione poteva aversi unendo due linee telegrafiche al più: per questa ragione non potemmo servirci del telegrafo nelle 8 stazioni della Calabria Ultra: Mileto P. S., Bianconovo, Roccella J., Soverato m., Serra San Bruno, Nicotera, Cittanova, Delianova; e neppure all'Osservatorio Etneo ed alla Cantoniera meteorico-alpina, ove non vi era telegrafo (ora vi è una linea telefonica).

Nelle dette 10 stazioni il tempo fu invece determinato con osservazioni del sole al sestante, eseguite dal compianto prof. A. Saija: i calcoli relativi furono fatti prima da lui, e poi rifatti dal prof. G. Boccardi, adottando esclusivamente il metodo delle *altezze corrispondenti*.

Dopo la prima campagna per il confronto telegrafico degli orologi, si è seguito il sistema di trasmettere automaticamente le battute dell'orologio Hawelk, mediante la linea telegrafica, cosicchè esse battute andavano a re-

(1) L'intero lavoro sarà pubblicato nelle Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani.

(2) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Catania.

gistrarsi all'Osservatorio di Catania nel cronografo, accanto alle battute dell'orologio astronomico (*Cavignato II*).

Per avere l'andamento del Hawelk si è adottato per tutte le stazioni il metodo di valersi solo della prima ed ultima determinazione di tempo o del primo e dell'ultimo confronto degli orologi, in modo da comprendere tutte le osservazioni di pendolo, e ciò allo scopo di diminuire l'influenza degli errori e per ottenere una maggiore compensazione delle irregolarità nell'andamento degli orologi.

Per la stessa ragione ho determinato l'andamento dell'orologio sidereo di Catania, valendomi di osservazioni cronografiche al cannocchiale dei passaggi, comprendenti tutti i confronti o segnali telegrafici di una stazione di gravità, e servendomi a preferenza di osservazioni di stelle, od in mancanza di queste, di osservazioni di sole; sempre però combinando osservazioni della stessa natura; cioè di stelle e di stelle, o di sole e di sole.

*Osservazioni di pendolo.* — Dovendo queste osservazioni di gravità servire specialmente per studî geofisici, ed avendo il tempo ed i mezzi limitati, e desiderando io di arrivare a collegare le mie determinazioni con quelle fatte dalla Marina austriaca nell'Italia meridionale, mi sono dovuto accontentare di fare per regola in ogni stazione solo due osservazioni della serie dei tre pendoli Sterneek dell'apparato num. 9, cortesemente prestato dall'I. R. Ufficio idrografico di Pola.

Per Catania, che ha servito di stazione di riferimento immediato, allo scopo di tener conto della variazione dei pendoli, ho fatto tre determinazioni: la prima al principio, la seconda alla fine della prima campagna, la terza quando dovei rinunciare a continuare le determinazioni di gravità. In ogni determinazione di Catania si sono fatte tre osservazioni della serie dei tre pendoli.

A Castellammare di Stabia, che doveva servire per raccordo e controllo colla determinazione fatta ivi dalla Marina austriaca, si son fatte quattro serie (<sup>1</sup>).

A Cittanova Calabria si sono fatte tre serie, perchè il cielo nuvoloso fece differire la seconda determinazione del tempo col sole.

Ordinariamente le due serie si facevano l'una al mattino dopo il primo confronto telegrafico degli orologi o la prima determinazione del tempo col sole, l'altra nel pomeriggio avanti le segnalazioni telegrafiche della sera, o la seconda determinazione del tempo col sole.

Nella prima campagna a fine di compensare gli effetti della variazione della temperatura, i pendoli erano osservati nell'ordine 25, 26, 27 e 25, 26,

(<sup>1</sup>) Questo controllo ha data una differenza nella gravità relativa a Castellammare di solo — 0<sup>m</sup>.00014 tra il valore trovato dagli Ufficiali della Marina austriaca nel 1894, e quello ottenuto da me nel 1898.

27. Avendo poi visto che le variazioni della temperatura generalmente erano molto piccole, perchè le osservazioni di pendolo si facevano in locali a piano terreno e possibilmente anche sotterranei, non soleggiati, non riscaldati artificialmente, ed in clima mite, nelle altre campagne le osservazioni dei pendoli si fecero invece nell'ordine 25, 26, 27 e 27, 26, 25, per compensare meglio nel medio delle due osservazioni di uno stesso pendolo gli effetti della variazione (probabilmente progressiva) dell'andamento dell'orologio Hawelk.

Di ogni pendolo si osservavano ordinariamente 10 coincidenze delle sue oscillazioni con quelle dell'orologio Hawelk, di ordine pari o dispari, corrispondente a quello del distacco dell'ancora nell'*apparato delle coincidenze*; poi si lasciavano trascorrere 50 coincidenze, e poi se ne osservavano altre 10, ottenendo così 10 volte l'intervallo di 60 coincidenze.

Come sostegno dei pendoli ha sempre servito una *mensola a muro*, che non entra in oscillazione col pendolo; inoltre se ne verificava la stabilità, tirandola bruscamente 10 volte colla forza di 5 chilogr., tanto verticalmente che orizzontalmente, mediante una bilancia a molla, funzionante da dinamometro. Se uno dei pendoli, messo in riposo sul piano d'agata, entrava in oscillazione, si stringevano maggiormente le madreviti dei bolloni, od anche, questi si muravano di nuovo.

Nella vetrina contenente il pendolo da osservare, oltre al termometro ordinario a grande bulbo, se ne collocava simmetricamente un altro a piccolo bulbo per assicurarsi dell'equilibrio di temperatura.

Generalmente per determinare la pressione atmosferica si è adoprato un aneroido Naudet di grande modello, di cui si era determinata la correzione per le varie pressioni.

*Gravità relativa.* — La gravità relativa in Catania si è ottenuta dal confronto della media del tempo d'oscillazione del pendolo medio (di 25, 26, 27) nelle tre determinazioni, colla media analoga delle due determinazioni fatte all'Ufficio idrografico di Pola al 12-13 agosto 1897 ed al 23 aprile e 1° maggio 1901, cioè prima della spedizione e dopo il ritorno dell'apparato Sterneck a Pola: e ritenendo per Pola la gravità  $9^m.80642$ , e risultando per Catania  $9^m.80082$ .

Per le 16 stazioni della prima campagna la gravità relativa si è ottenuto dal confronto della media del tempo d'oscillazione del pendolo medio nelle due serie colla media analoga nella prima e seconda determinazione di gravità, fatte in Catania, ritenendo la gravità, come sopra, in Catania:  $9^m.90082$ . Si è poi tenuto conto della variazione del pendolo medio, la quale dalla prima alla seconda determinazione in Catania risultò di  $0^s.00000097$  al mese.

Per tutte le altre stazioni la gravità relativa si è ottenuta col confronto della media del tempo d'oscillazione del pendolo medio colla analoga media

per Catania nella seconda e terza determinazione, ritenendo sempre la gravità in Catania  $9^m.80082$ , e trascurando la piccola variazione del pendolo medio.

*Riduzioni.* — Alle gravità così ottenute si sono fatte le solite riduzioni per l'attitudine, per la piastra di terreno fra la stazione ed il livello del mare, supposta di spessore uniforme, e poi la correzione orografica, positiva, dipendente da eccesso di terreno sopra la stazione o da difetto sotto la stazione, rispetto alla piastra suddetta; per questa correzione il terreno si è decomposto in segmenti cilindrici attorno alla stazione. Nelle correzioni non si è tenuto conto delle masse d'acqua marina vicine.

Per l'Osservatorio Etneo nel primo calcolo avevamo considerato e calcolato il terreno sottoposto, come un paraboloide di rivoluzione, alla forma del quale si accosta assai il Mongibello: rifatto il calcolo col metodo della piastra uniforme e della decomposizione in segmenti cilindrici, è risultata una correzione complessiva (negativa) minore per parecchie unità del quinto ordine decimale: probabilmente questa differenza dipende dal grande scavo nella *Valle del Bove*, di cui non si tiene conto col metodo del paraboloide: quindi abbiamo adottato il risultato dell'altro metodo di correzione.

La gravità, così ridotta all'ellissoide liscio, si è confrontata colla gravità teorica, data dall'ultima formola del prof. Helmert <sup>(1)</sup>, ossia con aumento di 20 unità del quinto ordine, rispetto a quella adottata nel primo calcolo della prima campagna; la differenza dà l'*anomalia* di gravità.

Il seguente quadro presenta per ognuna delle 43 stazioni i dati geografici e la densità del sottosuolo: quindi la gravità osservata, la gravità ridotta al livello del mare, la gravità corretta per l'attrazione del terreno sottostante e sovrastante, ossia ridotta allo sferoide liscio; poi la gravità teorica, ed infine l'*anomalia* di gravità.

Nella fig. 1<sup>a</sup> sono tracciate le linee di eguale anomalia di gravità, giovandomi anche di determinazioni fatte da altri, come dirò; sono segnate con linee continue le isanomale sicure ed esatte: con linee a tratti le altre, che in causa delle lacune sono solo probabili ed approssimate.

*Risultati.* — I principali risultati delle mie determinazioni di gravità relativa sono i seguenti:

1°. Le *anomalie* sono tutte positive.

2°. Le massime *anomalie* sono a Stromboli 184 (u. d. 5° d.) e ad Augusta 174, vicino a grandi profondità marine di 2000 m. e più.

3°. L'*anomalia* minima 4 è all'Osservatorio Etneo (2943 m.) presso la cima dell'Etna.

4°. Altro minimo secondario ed inaspettato (60?) si ha presso la costa orientale della Calabria Ultra; altro sui Monti Nebrodi (60?), altro debole (140?) presso Monte Lauro.

(1) *Die normale Theil der Schwerkraft im Meeresniveau*, Sitzungb. der K. Preuss. Ak. der Wissen. zu Berlin, 14 marzo 1901.



5°. Il massimo gradiente, o variazione dell'*anomalia*, si ha dalla cima dell'Etna alla riva del Jonio, circa 120.

*Collegamenti.* — Ho cercato di collegare a queste mie determinazioni di gravità relativa le sei pregevoli fatte nel 1899 dal prof. Venturi nella Sicilia occidentale ed isole adiacenti <sup>(1)</sup> dalle quali risultano le seguenti *anomalie*, ridotte all'ultimo valore della gravità teorica.

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| Palermo (Martorana) . . . . .       | + 97  |
| Ustica . . . . .                    | + 153 |
| Pantelleria. . . . .                | + 123 |
| Favignana . . . . .                 | + 122 |
| Trapani. . . . .                    | + 109 |
| Valverde (Oss.° meteor.°) . . . . . | + 91  |

Prolungando corrispondentemente le linee isanomale risultanti dalle mie determinazioni, si giunge a queste conclusioni probabili.

1°. L' *isanomala* 180 va da Stromboli a nord di Ustica, passando sopra mare profondo.

2°. L' *isanomala* 120 passa per la punta del Faro, quindi per le Egadi, poi presso Pantelleria, e torna alla Sicilia a Sud dell'Etna, correndo su mari poco profondi.

3°. L' *isanomala* 140 si estende dal massiccio basaltico di Monte Lauro verso Malta, sopra mare poco profondo.

4°. Nel centro della Sicilia si ha un minimo (40°).

Infine prolungando le isanomale di gravità ottenute colle mie determinazioni, in modo da unirle, malgrado le lacune, con quelle trovate dalla Marina austriaca per l'Italia meridionale, si hanno i seguenti risultati d'indole generale:

1°. Le *anomalie* sono ancora tutte positive fino presso Campobasso, ove la gravità è normale.

2°. Le linee *isanomale* corrono parallele alle coste del Jonio e del Tirreno.

3°. Le *anomalie* da entrambi i mari Tirreno e Jonio, ove arrivano oltre 180, diminuiscono verso i Monti Erei, Nebrodi e Peloritani della Sicilia; verso la montagna della Sila e le creste degli Appennini: e su queste cime l'*anomalia* di gravità ha valore minimo. Non ha luogo lo stesso riguardo all'Aspromonte: cosa singolare.

4°. Nell'Adriatico le *anomalie* sono minori che nel Tirreno e nel Jonio; al di sopra Promontorio di Gargano non sono maggiori di 120: ciò corrisponde alla minore profondità.

*Relazione coll'attività geodinamica.* — Tracciando sulla carta delle isanomale di gravità le aree sismiche principali, come risultano dalla *Carta sismica d'Italia* del dott. M. Baratta e come sono state ridotte dal profes-

<sup>(1)</sup> *Determinazioni di gravità relativa nella regione occidentale della Sicilia.* Atti della R. Acc. di Palermo, vol. IV, della serie 3<sup>a</sup>.

sore Gerland <sup>(1)</sup>, si nota che le dette aree giacciono ove le isoanomale sono irregolarmente avvicinate e fortemente piegate, indicando con ciò luoghi di grande squilibrio di gravità, come era da aspettarsi.

Ciò potrebbe contribuire a spiegare perchè la Sicilia orientale e la Calabria occidentale sono specialmente funestate da terremoti, e lo sono ancora la Basilicata, l'Abruzzo e la regione Garganica.

Riguardo ai vulcani attivi, sull'Etna l'*anomia* va decrescendo rapidamente tutt'attorno e si riduce pressochè nulla alla cima: ma anche sui monti non vulcanici degli Appennini si ha analoga diminuzione dell'*anomia*, quantunque meno rapida, dal mare alle cime principali, d'altezza comparabile a quella dell'Etna.

Presso gli altri vulcani attivi, Pantelleria, Vulcano e Stromboli, non si riconosce alcuna notevole singolarità nell'andamento delle linee isanomale; ed altrettanto può dirsi aver luogo presso il Vesuvio, cioè a Napoli ed a Castellammare di Stabia. E lo stesso risulta pure per i vulcani spenti di Monte Lauro, Ustica, Lipari, e per la regione basaltica di Pachino.

Ma quest'argomento dovrà essere studiato in modo speciale e più completamente.

Compio il gradito dovere di dichiarare che, come nella prima campagna, anche nelle altre, il personale dell'Osservatorio di Catania ha preso parte alle operazioni per determinare la gravità; e così l'ing. A. Mascari si è occupato personalmente della trasmissione dei segnali telegrafici nell'Osservatorio di Catania, il compianto prof. G. Saija ha eseguito le osservazioni di tempo, il prof. G. Boccardi ha rifatto (come già dissi) il calcolo delle osservazioni di sole, l'ing. S. Arcidiacono ha eseguite tutte le necessarie quotizzazioni del terreno; mi hanno assistito nelle varie campagne i sig. dott. Triangali, Eredia, Ponte, successivamente; il dott. Mendola mi ha aiutato nei calcoli.

In tutte le stazioni i Sindaci e gli Ufficiali telegrafici mi hanno secondato col maggior zelo. I Direttori dei telegrafi mi hanno concesse le maggiori agevolazioni.

Tutti ringrazio vivamente della cortese prestazione. Come pure sono gratissimo al comm. prof. Tacchini, che essendo allora Direttore dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, accolse la mia proposta di fare questo lavoro; ed al contr'ammiraglio Kalmár, allora Direttore del I. e R. Ufficio idrografico di Pola, il quale accordò il prestito degli strumenti e tante altre cortesie facilitazioni.

Nel finire questo riassunto non posso fare a meno di esprimere il voto che le determinazioni di gravità siano continuate in Sicilia per colmare le lacune, e nell'Italia meridionale per congiungersi colla importante serie di determinazioni gravimetriche fatta dalla Marina austriaca.

(1) Doct. A. Patermanns, *Geogr. Mitteilungen* 1900, Heft XII, Seite 265-271.

| Numero d'ordine | PAESE       | STAZIONE                          | Latitudine | Longitudine da Greenwich | Altitudine<br>m | Gravità osservata<br>$g_1$<br>m | Densità del terreno<br>m | Gravità $g_1$ corretta per l'altitudine:<br>$g_2$<br>m | Gravità $g_2$ corretta per il terreno sottostante:<br>$g_3$<br>m | Gravità $g_3$ corretta per l'attrazione topografica:<br>$g_4$<br>m | Anno della osservazione | Gravità teorica<br>‰ | Anomalia<br>$g_4 - g_0$ |
|-----------------|-------------|-----------------------------------|------------|--------------------------|-----------------|---------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|
| 1               | Sicilia . . | Pachino . . . . .                 | 36° 42', 8 | 15° 5', 3                | 60              | 9,80029                         | 3,0                      | 9,80047                                                | 9,80040                                                          | 9,80040                                                            | 1900                    | 9,79876              | + 164                   |
| 2               | "           | Noto . . . . .                    | 36. 53, 3  | 15. 4, 4                 | 128             | 9,80027                         | 2,3                      | 066                                                    | 054                                                              | 055                                                                | 1900                    | 891                  | 164                     |
| 3               | "           | Siracusa . . . . .                | 32. 3, 5   | 15. 17, 7                | 19              | 9,80074                         | 2,5                      | 080                                                    | 078                                                              | 078                                                                | 1900                    | 906                  | 172                     |
| 4               | "           | Buccheri . . . . .                | 37. 7, 5   | 14. 51, 1                | 797             | 9,79907                         | 2,7                      | 153                                                    | 064                                                              | 066                                                                | 1897                    | 912                  | 154                     |
| 5               | "           | Sortino . . . . .                 | 37. 9, 4   | 15. 1, 7                 | 438             | 9,79995                         | 2,6                      | 130                                                    | 083                                                              | 085                                                                | 1900                    | 914                  | 171                     |
| 6               | "           | Augusta . . . . .                 | 37. 13, 8  | 15. 13, 2                | 17              | 9,80092                         | 2,5                      | 097                                                    | 095                                                              | 095                                                                | 1899                    | 921                  | 174                     |
| 7               | "           | Mineo . . . . .                   | 37. 15, 9  | 14. 41, 5                | 593             | 9,79972                         | 2,2                      | 136                                                    | 087                                                              | 091                                                                | 1897                    | 924                  | 167                     |
| 8               | "           | Scordia . . . . .                 | 37. 17, 7  | 14. 50, 9                | 125             | 9,80054                         | 2,5                      | 092                                                    | 079                                                              | 080                                                                | 1899                    | 927                  | 153                     |
| 9               | "           | Ramacca . . . . .                 | 37. 23, 1  | 14. 41, 6                | 260             | 9,79983                         | 2,8                      | 063                                                    | 033                                                              | 034                                                                | 1899                    | 934                  | 100                     |
| 10              | "           | Catania . . . . .                 | 37. 30, 2  | 15. 4, 7                 | 43              | 9,80082                         | 2,9                      | 095                                                    | 090                                                              | 091                                                                | 1897<br>1898<br>1900    | 945                  | 146                     |
| 11              | "           | Paternò . . . . .                 | 37. 33, 9  | 14. 53, 9                | 235             | 9,79936                         | 3,0                      | 058                                                    | 029                                                              | 031                                                                | 1897                    | 950                  | 81                      |
| 12              | "           | Catenanovà . . . . .              | 37. 34, 1  | 14. 41, 5                | 172             | 9,79971                         | 1,5                      | 024                                                    | 013                                                              | 014                                                                | 1899                    | 950                  | 64                      |
| 13              | "           | Nicolosi . . . . .                | 37. 36, 8  | 15. 1, 5                 | 700             | 9,79910                         | 2,9                      | 126                                                    | 044                                                              | 047                                                                | 1897                    | 954                  | 93                      |
| 14              | "           | Acireale . . . . .                | 37. 36, 8  | 15. 10, 0                | 162             | 9,80064                         | 2,9                      | 114                                                    | 095                                                              | 097                                                                | 1898                    | 954                  | 143                     |
| 15              | "           | Adernò . . . . .                  | 37. 40, 0  | 14. 50, 0                | 560             | 9,79912                         | 2,9                      | 085                                                    | 018                                                              | 020                                                                | 1898                    | 959                  | 61                      |
| 16              | "           | Cantoniera . . . . .              | 37. 41, 8  | 14. 59, 7                | 1883            | 9,79659                         | 2,9                      | 240                                                    | 014                                                              | 031                                                                | 1897                    | 962                  | 69                      |
| 17              | "           | Milo . . . . .                    | 37. 43, 5  | 15. 6, 8                 | 750             | 9,79905                         | 2,9                      | 136                                                    | 046                                                              | 054                                                                | 1893                    | 964                  | 90                      |
| 18              | "           | Giarre . . . . .                  | 37. 43, 5  | 15. 11, 0                | 85              | 9,80018                         | 1,5                      | 043                                                    | 038                                                              | 040                                                                | 1898                    | 964                  | 76                      |
| 19              | "           | Osservatorio Etneo . . . . .      | 37. 44, 3  | 14. 59, 3                | 2943            | 9,79367                         | 2,9                      | 275                                                    | 9,79917                                                          | 9,79969                                                            | 1897                    | 965                  | 4                       |
| 20              | "           | Bronte . . . . .                  | 37. 47, 1  | 14. 50, 0                | 793             | 9,79871                         | 2,6                      | 116                                                    | 9,80031                                                          | 9,80034                                                            | 1897                    | 969                  | 65                      |
| 21              | "           | Linguaglossa . . . . .            | 37. 50, 5  | 15. 8, 5                 | 540             | 9,79984                         | 2,9                      | 151                                                    | 086                                                              | 089                                                                | 1897                    | 974                  | 115                     |
| 22              | "           | Taormina . . . . .                | 37. 51, 0  | 15. 16, 9                | 270             | 9,80030                         | 2,7                      | 113                                                    | 038                                                              | 037                                                                | 1898                    | 975                  | 112                     |
| 23              | "           | Randazzo . . . . .                | 37. 52, 4  | 14. 56, 7                | 760             | 9,79907                         | 2,6                      | 141                                                    | 059                                                              | 063                                                                | 1897                    | 978                  | 85                      |
| 24              | Calabria .  | Melito Porto Salvo . . . . .      | 37. 55, 2  | 15. 47, 1                | 50              | 9,80048                         | 2,4                      | 063                                                    | 058                                                              | 059                                                                | 1899                    | 981                  | 78                      |
| 25              | Sicilia . . | Ali . . . . .                     | 38. 0, 2   | 14. 25, 4                | 5               | 9,80070                         | 2,7                      | 071                                                    | 070                                                              | 074                                                                | 1898                    | 989                  | 85                      |
| 26              | "           | Novara . . . . .                  | 38. 0, 9   | 15. 7, 9                 | 617             | 9,79952                         | 2,8                      | 142                                                    | 071                                                              | 073                                                                | 1900                    | 990                  | 83                      |
| 27              | Calabria .  | Bianconovo . . . . .              | 38. 5, 4   | 16. 9, 2                 | 5               | 9,80056                         | 2,4                      | 057                                                    | 057                                                              | 058                                                                | 1899                    | 996                  | 62                      |
| 28              | "           | Reggio . . . . .                  | 38. 6, 4   | 15. 38, 5                | 10              | 9,80101                         | 1,5                      | 104                                                    | 103                                                              | 104                                                                | 1898                    | 998                  | 106                     |
| 29              | "           | Rometta . . . . .                 | 38. 10, 3  | 15. 24, 8                | 450             | 9,80023                         | 2,4                      | 162                                                    | 117                                                              | 120                                                                | 1900                    | 9,80003              | 117                     |
| 30              | Sicilia . . | Messina . . . . .                 | 38. 11, 5  | 15. 33, 4                | 5               | 9,80123                         | 1,9                      | 129                                                    | 129                                                              | 130                                                                | 1898                    | 005                  | 125                     |
| 31              | "           | Milazzo . . . . .                 | 38. 13, 1  | 15. 14, 5                | 3               | 9,80143                         | 2,3                      | 143                                                    | 143                                                              | 143                                                                | 1898                    | 008                  | 135                     |
| 32              | Calabria .  | Delianova . . . . .               | 38. 14, 0  | 15. 55, 2                | 650             | 9,79961                         | 2,3                      | 162                                                    | 100                                                              | 104                                                                | 1899                    | 009                  | 95                      |
| 33              | "           | Bagnara . . . . .                 | 38. 17, 3  | 15. 48, 4                | 15              | 9,80122                         | 2,6                      | 126                                                    | 124                                                              | 132                                                                | 1898                    | 014                  | 118                     |
| 34              | "           | Roccella Ionica . . . . .         | 38. 19, 2  | 16. 24, 2                | 5               | 9,80074                         | 2,2                      | 075                                                    | 075                                                              | 076                                                                | 1899                    | 017                  | 59                      |
| 35              | "           | Cittanova . . . . .               | 38. 21, 3  | 16. 4, 9                 | 407             | 9,80024                         | 1,9                      | 150                                                    | 118                                                              | 119                                                                | 1899                    | 020                  | 99                      |
| 36              | Isole Eolie | Lipari . . . . .                  | 38. 27, 9  | 14. 57, 4                | 2               | 9,80179                         | 2,4                      | 179                                                    | 179                                                              | 180                                                                | 1898                    | 029                  | 151                     |
| 37              | Calabria .  | Nicotera . . . . .                | 38. 33, 0  | 15. 56, 3                | 190             | 9,80102                         | 2,8                      | 160                                                    | 138                                                              | 141                                                                | 1899                    | 037                  | 104                     |
| 38              | "           | Serra San Bruno . . . . .         | 38. 34, 7  | 16. 19, 9                | 800             | 9,79958                         | 2,1                      | 205                                                    | 135                                                              | 136                                                                | 1899                    | 039                  | 97                      |
| 39              | "           | Soverato . . . . .                | 38. 41, 4  | 16. 12, 8                | 7               | 9,80140                         | 2,5                      | 142                                                    | 141                                                              | 143                                                                | 1899                    | 049                  | 94                      |
| 40              | "           | Pizzo . . . . .                   | 38. 44, 0  | 16. 9, 6                 | 40              | 9,80189                         | 2,4                      | 201                                                    | 201                                                              | 204                                                                | 1898                    | 053                  | 151                     |
| 41              | Isole Eolie | Stromboli . . . . .               | 38. 48, 2  | 15. 14, 1                | 48              | 9,80229                         | 2,9                      | 244                                                    | 238                                                              | 241                                                                | 1898                    | 059                  | 182                     |
| 42              | Calabria .  | Catanzaro . . . . .               | 38. 54, 3  | 16. 35, 6                | 345             | 9,80090                         | 2,5                      | 196                                                    | 160                                                              | 162                                                                | 1898                    | 063                  | 94                      |
| 43              | Napoli . .  | Castellammare di Stabia . . . . . | 40. 41, 6  | 14. 28, 7                | 4               | 9,80338                         | 1,5                      | 339                                                    | 339                                                              | 342                                                                | 1898                    | 223                  | 114                     |

**Fisiologia.**— *Sui così detti composti salino-proteici* <sup>(1)</sup>. Nota I  
del Corrispondente GIULIO FANO e del dott. PAOLO ENRIQUES.

In questi ultimi tempi i fisiologi hanno studiato con speciale attenzione le condizioni fisiche degli organismi viventi, applicando a queste ricerche i dati ed i metodi della chimica fisica. Queste indagini condussero a mettere in luce la grande importanza degli stati molecolari nello svolgimento delle funzioni fisiologiche, e in particolar modo di quelle determinanti la pressione osmotica. Si comprende come questo indirizzo desse risalto al significato funzionale dei sali; e come per quel che riguarda il loro modo di essere nei liquidi e nei tessuti, e il meccanismo di assimilazione e di rigetto di essi, ritornasse in voga la questione dei così detti corpi salino-proteici.

Fino dai tempi di Berzelius si sapeva che l'albumina, precipitando, trasporta seco una parte dei sali che con essa si trovano in soluzione, e li trattiene in modo tale, da non poterne essere liberata con replicate lavature; ma l'esperienza più notevole è quella di Bernard <sup>(2)</sup>, il quale per il primo osservò che se si aggiunge del lattato di perossido di ferro a siero sanguigno, il sale di ferro non è più rivelato « dalle reazioni le più proprie a metterlo in evidenza, nelle condizioni ordinarie della sperimentazione chimica ». Il Bernard adoperava in realtà, come reattivi del ferro, « i prussati giallo e rosso di potassa »; dal risultato negativo di queste mescolanze, il Bernard concludeva che « il lattato di ferro si è dunque combinato col siero ». Si aggiunga che il Bernard eliminava il sospetto che ciò potesse derivare dalla reazione alcalina del siero, neutralizzandolo con un acido organico debole. Invertendo l'esperienza, vale a dire versando qualche goccia di lattato di ferro in una mescolanza di siero e ferrocianuro potassico, la colorazione bleu apparisce; e ciò perchè, dice il Bernard, « il lattato di ferro ha incontrato il ferrocianuro di potassio prima di essersi potuto combinare colla materia organica del siero: la loro azione reciproca si è manifestata. Sicchè, tutte le volte che l'esperienza sarà fatta versando il prussiato di potassa dopo aver mescolato il sale di ferro col siero, non si avrà la reazione; tutte le volte, per contro, che si verserà il lattato di ferro in una mescolanza di ferrocianuro di potassio e di siero, si avrà la formazione di bleu di Prussia. È dunque indubitabile, egli conclude, che i sali metallici possono formare composti solubili colle materie organiche ».

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia di Firenze.

(2) Bernard C., *Léçons sur les effets des substances toxiques et médicamenteuses*. Paris, Baillière, 1857.

Queste ricerche del Bernard furono poi riprese dal Cervello <sup>(1)</sup>, il quale, studiando l'assorbimento del ferro medicinale e l'azione fisiologica dei cloruri di ferro, e adoperando mezzi organici diversi, come albumina d'ovo, o pezzetti di tessuti, conclude ammettendo la combinazione dei sali di ferro coi materiali proteici dell'organismo.

Con ricerche di altro genere, e cioè studiando le condizioni che mantengono costante la concentrazione molecolare del siero sanguigno, Fano e Bottazzi <sup>(2)</sup> furono condotti a supporre che ciò sia dovuto a processi di associazioni e dissociazioni salino-proteiche, a seconda che, rispettivamente, la concentrazione molecolare del siero tende ad aumentare o diminuire.

Il Bottazzi poi <sup>(3)</sup>, trovò che la mescolanza di albume con solfato di ferro determina un aumento di  $\Delta$  minore che la mescolanza della stessa quantità di acqua corrispondente a quella di albume adoperato; in altre parole il Bottazzi colle sue ricerche crioscopiche porterebbe un nuovo contributo per affermare che i sali di ferro si combinano coi corpi proteici.

Ad analoghi risultati crioscopici giunsero Bugarsky e Liebermann <sup>(4)</sup>, mescolando albumina, albumosi e pepsina rispettivamente con acido cloridrico o con potassa; e alle stesse conclusioni vennero colle medesime sostanze, basandosi anche sui dati ottenuti colla determinazione della forza elettromotrice prodotta da quelle sostanze in opportune condizioni; mentre che il  $\text{ClNa}$ , sia nella determinazione crioscopica che in quella della forza elettromotrice, diede risultati negativi, sebbene l'albumina fosse preventivamente dializzata.

Galeotti <sup>(5)</sup> alla sua volta studiò la conducibilità elettrica di vari organi e tessuti, in varie condizioni; e tra le altre venne alla conclusione che le modificazioni postmortalì della resistenza si dovessero attribuire ad associazioni, per le quali il sale, entrando a far parte di una molecola molto complessa, non è più elettroliticamente dissociabile.

Queste conclusioni non potrebbero accordarsi coll'osservazione fatta da Oker-Blom <sup>(6)</sup>, che cioè, nei processi digestivi, la depolimerizzazione dei proteici

<sup>(1)</sup> Cervello V., *Assorbimento del ferro medicinale e sue trasformazioni chimiche nel tubo digestivo*. Arch. di farmacologia e terapeutica, vol. VI, fasc. 4, estr. pp. 12, 1896.

<sup>(2)</sup> Fano G. e F. Bottazzi, *Sur la pression osmotique du sérum du sang et de la lymphe en différentes conditions de l'organisme*. Arch. Ital. Biol., vol. 26, p. 45-61, 1897.

<sup>(3)</sup> Bottazzi E., *Contributo alla conoscenza dell'importanza fisiologica delle sostanze minerali*. Lo Sperimentale, vol. 51, pp. 239-258, 1897.

<sup>(4)</sup> Bugarsky S. u. L. Liebermann, *Ueber das Bindungsvermögen eiweissartiger Körper für Salzsäure, Natriumhydroxyd und Kochsalz*. Arch. f. gesamm. Physiol. 72 B. p. 51-74, 1898.

<sup>(5)</sup> Galeotti G., *Ricerche sulla conducibilità elettrica dei tessuti animali*. Lo Sperimentale, vol. 51, p. 750-814, 1901.

<sup>(6)</sup> Oker-Blom M., *Thierische Säfte und Gewebe in physikalisch-chemischer Beziehung*. VI Mitth.: *Die elektrische Leitfähigkeit und die Gefrierpunktserniedrigung als Indicatoren der Eiweisspaltung*. Skandinav. Arch. f. Physiol. 30 B., p. 359-374, 1902.

non è, nei primi stadî almeno, accompagnata da modificazioni apprezzabili della conducibilità del liquido. Ma su questo argomento torneremo tra poco.

Come si vede la questione dei composti salino-proteici non è ancora chiaramente risolta. Riprendendola in esame abbiamo cominciato col riscontro delle osservazioni fatte da Bernard. Da queste nostre prime ricerche risulta anzitutto confermato entro certi limiti il fatto che, quando si aggiunga ferrocianuro di potassio ad una mescolanza di siero e di un sale ferrico, non si ha la reazione del ferro: non è invece esatta l'affermazione inversa, che si abbia sempre la reazione, quando al siero si aggiunga prima il ferrocianuro e poi il sale ferrico. Abbiamo rammentato questo risultato, perchè, come già si disse, il Bernard interpretava il fatto della avvenuta reazione ammettendo che il lattato di ferro avesse incontrato il ferrocianuro di potassio, prima di essersi potuto combinare colle sostanze proteiche del siero. S'intende del resto che in ogni caso queste reazioni danno effetto negativo soltanto entro certi limiti, al di là dei quali avviene sempre la reazione del ferro, in qualunque ordine siano aggiunti i reagenti. Avvertiamo a questo proposito che neppure si può rivelare la presenza del ferro con solfocianuro di potassio e con acido salicilico; mentre adoperando l'acido tannico e il solfuro d'ammonio la reazione avviene sempre; e ciò, rimanendo nel concetto primitivo di Bernard, si potrebbe comprendere ammettendo che, mentre il ferro non si rivela col ferrocianuro o solfocianuro di potassio, o coll'acido salicilico, perchè nei composti salino-proteici esso non è ionizzabile, ciò avviene invece quando si adoperino reattivi che, distruggendo quelle combinazioni tanto complesse, conducano il ferro a formare molecole elettricamente dissociabili. (Vedi, per quanto riguarda ciò che si è detto fino ad ora, le esperienze citate nelle tabelle della Serie I. — Le Tabelle di queste e delle successive esperienze saranno pubblicate in una seconda Nota).

Sul significato di questa mancata reazione nè Bernard, nè quelli che dopo di lui hanno ripetuto l'esperienza, mettono dubbio. Essi affermano che il ferro non si rivela perchè si è combinato coi corpi proteici. Le cose avvengono proprio così, o, per lo meno, avvengono esse esclusivamente in tal modo?

Previa diluizione e neutralizzazione con acido acetico, abbiamo coagulato i corpi proteici del siero, e nel liquido filtrato e ricondotto al volume primitivo, abbiamo fatto l'esperienza di Bernard, ottenendo circa gli stessi risultati. Abbiamo ripetuto le stesse ricerche, determinando l'eliminazione dei proteici in altro modo. E cioè, dopo aver raccolto in un erogiuolo di porcellana una certa quantità di siero secco, quale si trova in commercio, lo abbiamo coagulato mantenendolo per un giorno in un bagno d'aria alla temperatura di 130°. Dopo ciò ne abbiamo estratto i sali, con una quantità di acqua che desse una concentrazione presso a poco normale, e in questo li-

quido abbiamo di nuovo fatto l'esperienza di Bernard, e sempre con risultati analoghi a quelli del siero in toto. (Vedi tabelle della Serie II). In queste indagini, fatte con soluzioni prive di corpi proteici, si osserva che l'aggiunta del sale di ferro determina la formazione di un precipitato, che, raccolto su un filtro e analizzato, si dimostra contenere fosfato di ferro in notevole quantità. Era naturale il sospetto che la scomparsa del ferro nel siero di sangue non fosse dovuta alla combinazione di esso coi corpi proteici, ma piuttosto ai composti insolubili che esso forma coi fosfati, sempre presenti nel siero. Per mettere in chiaro tale questione, abbiamo fatto due serie di ricerche. Nella prima serie, abbiamo aggiunto un poco di fosfato di ferro al siero sia normale che acidificato con acido cloridrico, o alcalinizzato con carbonato sodico, sia neutralizzato con cura. E abbiamo visto che il fosfato di ferro da noi aggiunto non si ridiscioglie, almeno completamente, tranne il caso che il siero sia stato fortemente alcalinizzato o acidificato, ciò che è facile a spiegarsi. Invece il precipitato che si forma coll'aggiunta di cloruro ferrico al siero, e che ha tutto l'aspetto di essere in gran parte formato da corpi proteici, dopo un tempo più o meno lungo, si ridiscioglie completamente, qualunque sia la reazione, anche neutra, del liquido in questione. In questo e in molti altri casi, noi ci limitiamo a descrivere il risultato delle nostre ricerche, consapevoli che per il momento sarebbe inutile il tentativo di una spiegazione. In tutto ciò apparisce però manifesto che la presenza di corpi colloidali deve essere considerata come un elemento che nel decorso di molte reazioni porta condizioni nuove, le quali conducono a effetti inattesi.

Nell'altra serie di ricerche, abbiamo sottoposto il siero di sangue alla dialisi molto prolungata, fatta in soluzione di  $\text{Cl Na}$  al 0,9 %, perchè non precipitassero le sostanze proteiche. (Vedi tabelle della Serie III). Questo siero dializzato presenta, rispetto ai sali di ferro, alcune particolarità degne di nota. Se immediatamente dopo il sale ferrico, che può essere anche in piccola quantità, aggiungiamo il ferrocianuro di potassio, noi possiamo dimostrare la presenza del ferro; se invece il reattivo viene aggiunto dopo un certo intervallo di tempo, allora il ferro non si manifesta più, ciò che si accorda colla osservazione del Cervello, che il ferro, mescolato a corpi proteici, diventa sempre meno rivelabile, quanto più tardi se ne fa il saggio. Abbiamo inoltre osservato che il bleu di Prussia, formatosi nel siero per l'aggiunta di un eccesso di sali ferrei e di ferrocianuro di potassio, può dopo un certo tempo scomparire. Di più, se al siero dializzato aggiungiamo fosfato di sodio e poi il sale ferrico, possiamo osservare come il ferro si sottragga alle reazioni molto più rapidamente e in quantità maggiore del solito; questi fatti sono accompagnati dalla formazione del solito precipitato, che però in breve si ridiscioglie nel liquido. Evidentemente le differenze tra siero normale e siero dializzato rispetto ai sali di ferro, dipendono da che il primo contiene

fosfati, e il secondo no, o solo in tracce. Ma certo ciò non può darci ragione di due cose: 1°, anche nel siero dializzato una certa quantità di ferro, benchè meno rapidamente, viene sottratta all'azione dei soliti reattivi; 2°, il precipitato di fosfato ferrico, mentre è permanente in soluzione acquosa, scompare dopo un po' di tempo, quando sia ottenuto in presenza di siero.

Da che dipendono queste differenze? Si tratta qui veramente della formazione di composti salino-proteici, o piuttosto la presenza di corpi colloidali non hanno essi determinato condizioni fisiche particolari che possano opporsi alla combinazione del ferro col prussiato? La scomparsa del precipitato di fosfato di ferro è dovuta a una soluzione, o ad una combinazione di esso coi proteici? Benchè consapevoli della difficoltà di mettere in chiaro simili questioni, quando soprattutto si pensi per quali stadi infinitesimali si passi da un miscuglio omogeneo ad una combinazione propriamente detta, pure abbiamo voluto ricercare se la determinazione della concentrazione molecolare del siero nelle diverse condizioni sopra nominate potesse darci qualche indicazione in proposito. Ci siamo perciò rivolti alle determinazioni della resistenza elettrica di questi liquidi, perchè evidentemente, se combinazioni salino-proteiche avvengono, queste conducono alla sottrazione, almeno parziale, di quelle sostanze elettroliticamente dissociabili che determinano il valore della conducibilità elettrica di una soluzione.

Per determinare la resistenza elettrica dei nostri liquidi ci siamo serviti dell'apparecchio di Kohlrausch, con rocchetto d'induzione e telefono. Il liquido da esaminare è posto in un vaso cilindrico, contenente gli elettrodi ed un termometro Baudin, che segna il decimo di grado; il vasetto è immerso in una grande quantità d'acqua, per mantenere costante la temperatura durante le osservazioni. La quantità di liquido adoperata per la determinazione è sovente di 75 cmc.; ma il livello del liquido nel vaso è abbastanza più alto del livello degli elettrodi, perchè non si riscontri nessuna differenza nell'adoperare 65 o 85 cmc. di liquido; ciò che abbiamo empiricamente stabilito. Qualche volta abbiamo adoperato un vaso più grande, con altri elettrodi, ottenendo dati che non sono paragonabili con gli altri; ciò è esplicitamente notato nelle Tabelle delle singole ricerche.

Il metodo ora descritto fu applicato da noi allo studio del siero normale e del dializzato, ai quali si erano aggiunti sali di ferro, come si può vedere dalle sopra ricordate tabelle; e i dati così ottenuti sono stati confrontati con quelli che ci hanno fornito soluzioni di sali di ferro fatte sia in acqua distillata, sia in soluzioni di  $\text{Cl Na}$  isoconduttrici rispetto ai sieri da noi adoperati.

Per renderci conto del valore delle nostre osservazioni, rammentiamo che le differenze in più o in meno che abbiamo potuto ritrovare, possono attribuirsi rispettivamente a possibili combinazioni, o a eventuali dissociazioni

dei sali aggiunti al siero, e che questi due fatti antagonistici possono reciprocamente mascherarsi; non dissimulandoci che la combinazione, in quanto diluisce la soluzione, può essere alla sua volta un fattore di dissociazione; che inoltre lo stato colloidale del siero può per suo conto, indipendentemente dai fattori chimici, avere influenza sulla conduttività del liquido. Premesse queste dichiarazioni, perchè il lettore si renda conto delle difficoltà del problema, e delle ragioni particolari delle nostre ricerche, riassumiamo in alcuni enunciati i risultati ottenuti: il cloruro di ferro si dissocia molto più notevolmente nell'acqua distillata, che in una soluzione al 0,6 % di  $\text{Cl Na}$  (isoconduttrice rispetto al siero), nella quale anzi si dissocia assai poco. Nel siero di sangue l'aggiunta di una soluzione isoconduttrice di cloruro di ferro determina un aumento della resistenza; lo stesso effetto si osserva col siero dializzato, però meno intensamente, il che si concilia col fatto già prima osservato della minore capacità di questo a mascherare il ferro. Quando per l'aggiunta di un eccesso di ferro si forma un precipitato, allora si ha un aumento di resistenza che permane anche dopo il ridisciogliersi di questo precipitato. Che esso sia formato per la maggior parte di corpi proteici, è dimostrato dalla sua abbondanza, e soprattutto dal fatto che esso si osserva anche nel siero dializzato. (Vedi le tabelle della Serie IV).

In tutte le sopra citate esperienze fatte aggiungendo cloruro ferrico al siero, può venire il dubbio che l'aumento di resistenza che si è osservato, sia dovuto alla acidità delle soluzioni del sale ferrico; può darsi che i fosfati e i carbonati alcalini del siero reagiscano coll'acido della soluzione, e parte dell'anidride carbonica si svolga dal liquido, ciò che, evidentemente, deve portare ad un aumento di resistenza. Ma noi abbiamo potuto dimostrare che, se un tale fatto avviene nelle nostre ricerche, esso non è certamente il solo che si produca, quando il sale ferrico si aggiunge al siero. Ciò risulta da varie nostre indagini.

In primo luogo, abbiamo reso acido il siero, con acido cloridrico, e, partendo da questo siero acido, abbiamo ad esso aggiunto un poco di soluzione di cloruro ferrico; ebbene, anche in questo caso abbiamo osservato l'aumento di resistenza, nonostante che la soluzione ferrica fosse molto conduttrice. Questa esperienza ripetuta più volte, modificandola in vario modo, diede sempre lo stesso risultato. In alcuni casi p. e. fu determinata la resistenza del siero, ed aggiunta qualche goccia di  $\text{HCl}$ , fino a reazione acida (la resistenza intanto diminuiva, essendo la soluzione cloridrica assai più conduttrice del siero); si è aggiunto poi ancora un poco di soluzione di cloruro ferrico, e constatato l'aumento di resistenza; per più volte si sono fatte alternativamente queste operazioni, notando una diminuzione di resistenza quando si versava nel liquido l'  $\text{HCl}$ , ed un aumento quando invece la soluzione ferrica. Naturalmente questo aumento di resistenza non è senza limite, essendo la soluzione ferrica molto più conduttrice del siero; prendendo poco siero e

molta soluzione ferrica, si è potuto avere un liquido più conduttore del siero stesso.

Abbiamo anche tentato di stabilire come agisse l'HCl sulla conducibilità del siero. Il fatto che esso diminuisce la resistenza, quando viene aggiunto in forma di soluzione molto conduttrice non ci indica quello che accade tra l'acido e le sostanze del siero. Abbiamo perciò preparato una soluzione di HCl, isoconduttrice rispetto al siero, e determinata la resistenza di mescolanze dei due liquidi fatte in varia proporzione. In questi casi si ha sempre un aumento di resistenza, che diviene molto forte quando è grande la quantità della soluzione cloridrica aggiunta. Ma non possiamo dare valore a queste forti differenze, perchè soltanto finchè la soluzione cloridrica è in scarsa quantità, il liquido si mantiene limpido; dopo si va formando un precipitato che molto probabilmente contiene, insieme a sostanze proteiche, materiali ionizzabili. Abbiamo perciò modificato le condizioni dell'esperienza, evitando la soverchia diluzione del siero, sicchè il liquido non si intorbidasse, pur diventando notevolmente acido; e ciò aggiungendo al siero poche gocce di HCl concentrato. La mescolanza della soluzione isoconduttrice di acido cloridrico con questo siero acidificato determinò, come prima, l'aumento di resistenza, benchè mancasse qualunque precipitato. Per lumeggiare il significato delle qui esposte osservazioni, ad una soluzione di carbonato sodico isoconduttrice rispetto al siero abbiamo aggiunto HCl, in varie condizioni. Abbiamo riprodotto alcuni fenomeni che si ottengono col siero: aumento di resistenza per aggiunta di HCl quando esso si trova in soluzione isoconduttrice, diminuzione quando si trova in soluzione più concentrata; ma quando si è aggiunto al liquido già acidificato, acido cloridrico in soluzione isoconduttrice, non si è più avuto aumento, ma al contrario diminuzione di resistenza; e lo stesso fenomeno, per aggiunta della soluzione di cloruro ferrico. Nulla di strano in questi risultati: la soluzione di carbonato sodico acidificata, era divenuta evidentemente una soluzione di cloruro sodico, più anidride carbonica, sulle quali sostanze l'acido cloridrico non poteva più agire chimicamente; ed aggiungendone ancora, per le leggi delle dissociazioni, si poteva avere un piccolo aumento di conducibilità. Ma questi fenomeni così semplici non avvengono nel siero, nel quale perciò si potrebbe a prima vista sospettare la presenza di una sostanza capace di combinarsi coll'acido cloridrico e col cloruro ferrico, anche quando i sali alcalini sono stati più che neutralizzati dall'acido cloridrico. Questi ultimi risultati erano certo prevedibili, e avremmo potuto risparmiarci tali prove che possono a prima vista sembrare puerili; ma in fatti di determinismo tanto complesso non abbiamo creduto di avere il diritto di concederci alcuna conclusione aprioristica. (Vedi le tabelle della serie V).

Una nuova obiezione, alla quale abbiamo accennato al principio di questo scritto, risulta dalla possibilità che lo stato colloidale del siero che incepta

le movenze dei ioni, possa render conto delle differenze da noi riscontrate nella conducibilità elettrica del siero, indipendentemente da fatti associativi o dissociativi. Per mettere in chiaro tale questione, abbiamo aggiunto cloruro ferrico a soluzioni di gomma. I due liquidi adoperati (soluzione di gomma e di cloruro ferrico) essendo tra loro isoconduttori, e la gomma assai concentrata, (10 %), abbiamo osservato un notevole aumento della resistenza, quando essi venivano mescolati insieme; tale aumento si verifica anche quando il liquido contiene ormai una quantità di gomma molto minore (5-3 %) essendo stato diluito colla soluzione ferrica; e si noti che in questo caso la soluzione ferrica che si aggiunge successivamente è di per sé assai meno resistente del miscuglio a cui partecipa. Abbiamo avuto diminuzione di resistenza, anziché aumento, quando abbiamo aggiunto ad una soluzione di gomma al 2,5 %, qualche cmc. di una soluzione ferrica che offriva una resistenza circa 10 volte più piccola. Risultato questo assai facile ad intendersi. Ma anche con una soluzione di gomma al 2 %, che è stata resa più conduttrice mediante l'aggiunta di un poco di  $\text{ClNa}$ , e che, data la sua concentrazione, è meno viscosa del siero, abbiamo avuto il solito aumento di resistenza; e si noti che anche qui la soluzione ferrica è un poco più conduttrice della gommosa. Avvertiamo inoltre che non solo il cloruro ferrico delle nostre soluzioni è sempre acido, ma anche la soluzione di gomma da noi adoperata.

I risultati ottenuti in queste ultime ricerche ci dimostrano che una soluzione di gomma isoviscosa col siero, e *a fortiori* una più viscosa di esso, influisce sui valori della conducibilità elettrica, riguardo ai sali ferrici, presso a poco come fa il siero, benchè la soluzione gommosa, non mascherando nessuna reazione del ferro, non possa ingenerare il sospetto di fatti associativi, che conducano alla sottrazione di ioni. Non pretendiamo certo che una soluzione isoviscosa di gomma riproduca interamente l'ambiente fisico determinato dal siero; ma non possiamo disconoscere il carattere molto suggestivo dei nostri risultati. (Vedi tabelle della Serie VI).

Da quanto abbiamo esposto finora risulta: che una parte del ferro viene sottratta alla soluzione come fosfato ferrico, e che lo stato colloidale del siero può renderci conto, nei limiti dei valori trovati, delle differenze di resistenza, invero molto piccole, che noi abbiamo riscontrato. Ma chi ben guardi ai molti fatti che si osservano in conseguenza delle mescolanze di siero con sali di ferro, dovrà riconoscere che siamo in un campo circondato da incognite, e che sarebbe, pel momento almeno, prematuro l'affermare che i sali di ferro si combinano coi corpi proteici del siero, nonostante la sparizione della reazione del ferro, ed il fatto che il precipitato di prussiato può ridisciogliersi nel siero stesso, e che nel siero non privato dei suoi corpi proteici non si osserva il precipitato di fosfato di ferro.

Abbiamo voluto ripetere le ricerche eseguite sui sali di ferro, in forma sommaria, anche sui sali di mercurio, dando la preferenza a questo metallo, per l'attenzione che si volle richiamare sugli effetti delle iniezioni endovenose di sublimato corrosivo.

Il cloruro mercurico mescolato al siero normale o dializzato non è rivelabile, col ioduro di potassio, che quando arrivi ad una certa concentrazione: ma anche in questo caso il sale mercurico non è dimostrabile che da una certa quantità di reattivo, sicchè le prime gocce di questo danno la reazione soltanto quando il sublimato è tanto da provocare una notevole precipitazione dei corpi proteici. Chi non dubita dei così detti composti salino-proteici, potrà in questo caso affermare che la formazione del ioduro di mercurio, quando si tratti di quantità di cloruro mercurico non eccedenti certi limiti, avvenga solo quando il ioduro di potassio possa, per azione di massa, spostare il mercurio dalla sua combinazione colle proteine.

La reazione del siero non ha nessuna influenza sopra lo svolgimento dei fatti sopra descritti; perchè essi avvengono ugualmente e colla stessa intensità, o quando si adoperi siero normale alcalino, o quando invece il siero sia acidificato. (Vedi le tabelle della Serie VII).

Le nostre esperienze non ci hanno condotto, come speravamo, a dimostrare la possibilità di ottenere in vitro la combinazione di corpi proteici con certi determinati sali. Ma ciò non dimostra che i corpi proteici non possano già trovarsi combinati con sali, o che speciali trasformazioni di quelli non possano dar luogo a simili combinazioni. Da ciò il pensiero di depolimerizzare le proteine, per vedere se in conseguenza di questo processo che aumenta le superfici di contatto fra le molecole proteiche e l'ambiente che le circonda, avvenissero fatti di associazione o di dissociazione coi sali. A questo proposito ricordiamo che il prof. Galeotti ha affermato che la morte di un tessuto è accompagnata da una associazione dei corpi proteici coi materiali salini. Noi ci siamo detti che, se ciò in realtà avviene, può darsi che sia perchè le depolimerizzazioni, che probabilmente accompagnano o seguono la morte, stabilendo maggiori superfici di contatto tra gli aggregamenti proteici ed i sali, determinano migliori condizioni per le loro combinazioni. Condotti da questo concetto, ed ignorando allora le indagini istituite da Oker-Blom, abbiamo sottoposto l'albumine d'uovo alla digestione peptica e triptica, mescolandolo rispettivamente con cloruro e carbonato di sodio. Nessuna variazione di conducibilità abbiamo potuto osservare in questi liquidi, anche quando già si potevano rivelare in essi notevoli quantità di peptone; ciò che era stato notato anche dal sopra citato Autore. A esperienze finite ci giunse una Nota di Henri <sup>(1)</sup>, che dalla digestione triptica della

<sup>(1)</sup> Henri V. et Larguier des Bancelis, *Loi d'action de la trypsine sur la gélatine*. C. R. Soc. Biol., vol. 55, p. 563-565, 1903.

gelatina ottenne invece notevoli aumenti di conducibilità. Non sappiamo invero a quali cause attribuire questa diversità di risultati, se non forse ad una maggiore intensità dell'atto digestivo, per la maggiore labilità del materiale adoperato.

Per analoghi scopi abbiám fatto ricerche sul siero e sull'albume d'ovo messi a putrefare, senza ottenere neppure in questo caso risultati degni di nota, dimodochè possiamo affermare che nei processi di depolimerizzazione non avvengono fatti di associazione tra i corpi proteici e i sali. Per quanto riguarda la putrefazione, dobbiamo anzi avvertire che quando essa sia spinta molto innanzi, avviene un notevole aumento nella conducibilità del liquido, dovuto evidentemente alla formazione di materiali elettrolitici, a spese di sostanze proteiche distrutte dai saprofiti. Ci limitiamo a riprodurre qui i risultati delle esperienze della putrefazione, perchè quelle della digestione non sono che una ripetizione delle indagini di Oker-Blom. (Vedi le tabelle della Serie VIII).

A queste ricerche tendenti a mettere in chiaro ciò che avviene tra sali e corpi proteici, abbiamo voluto aggiungerne altre allo scopo di renderci conto di ciò che accade quando si mettano in presenza i nucleoproteidi con sali che si riscontrano nel nostro organismo. Abbiamo cominciato coll'estrarre col metodo di Wooldridge i nucleoproteidi della milza e del fegato, sciogliendoli in soluzioni di carbonato di sodio, delle quali si era preventivamente determinata la conducibilità; e abbiamo visto che il fatto della soluzione dei nucleoproteidi nel liquido alcalino sopra citato non determina alcuna modificazione nella conducibilità di detto liquido. Questo risultato, per i nucleoproteidi, male si accorda colla ingegnosa interpretazione di fatti crioscopici data dal Fredericq <sup>(1)</sup> a proposito di proteine, che queste cioè non si trovino nelle soluzioni saline veramente disciolte, ma in uno stato che molto più ricorda quello della sospensione.

Il dato della conducibilità elettrica non ci permette dunque alcuna conclusione positiva intorno alla possibilità della combinazione del carbonato di sodio col nucleoproteide, benchè a spiegare questo risultato negativo della conducibilità, si possa supporre che il nucleoproteide per azione di massa si sia sostituito ad una parte dell'acido carbonico, formando dei proteidati alcalini. Dobbiamo però notare che quando alla soluzione alcalina del nucleoproteide si aggiunga cloruro mercurico, non si ha quel precipitato di cloruro basico di mercurio, che avviene quando questa reazione si faccia in una semplice soluzione di carbonato sodico, senza la presenza del nucleoproteide. Questo risultato negativo è esso dovuto a che il cloruro mercurico si sottrae

<sup>(1)</sup> Fredericq L., *Sur la concentration moléculaire des solutions d'albumine et de sels*. Bull. Acad. roy. de Belgique (Classe des sciences), p. 437-444, 1902.

alla nota reazione, combinandosi coi nucleoproteidi? Non potendo noi invertire l'ordine col quale il carbonato ed il cloruro vengono aggiunti al nucleoproteide, non possiamo neppure tentare di dare una risposta a tale questione. Resta però in ogni modo molto strano il fatto che il nucleoproteide, insolubile nell'acqua, sia reso solubile dalla presenza del carbonato alcalino, senza che i dati della conducibilità ci rivelino alcuna reciproca reazione; tanto più che lo scioglimento dei nucleoproteidi nelle soluzioni alcaline avviene immediatamente. E a questo proposito ricordiamo i fatti negativi ottenuti da Bugarsky e Liebermann. per quel che riguarda la combinazione del cloruro di sodio coll'albumina.

Di fronte ai risultati negativi ottenuti col carbonato sodico, ci siamo chiesti se i sali di potassio, che prevalgono negli elementi strutturali degli organismi viventi, là dove appunto si trovano quei nucleoproteidi, che sono quasi assenti nei liquidi dell'organismo, ricchi di sali di sodio, se i sali di potassio, diciamo, non presentassero coi nucleoproteidi quell'affinità che le nostre esperienze hanno resa discutibile per quanto riguarda i sali di sodio.

Abbiamo a questo scopo ripetuto le stesse ricerche, adoperando carbonato di potassio, ed abbiamo ottenuto gli stessi identici risultati che col carbonato di sodio. (Vedi tabelle della Serie IX).

Riassumendo quanto risulta dalle nostre ricerche, nulla ci permette di affermare che in realtà i sali entrino in vera combinazione chimica coi proteici o i proteidi, come nulla ci prova che in realtà i corpi proteici siano nei liquidi organici combinati coi sali. Neppure l'aumento di conducibilità ottenuto colla putrefazione protratta, perchè questa, determinando una modificazione dello stato colloidale, può concedere ai ioni già liberi quella maggiore mobilità che valga in parte a determinare la diminuzione della resistenza, mentre dalla molecola proteica distrutta si formano sostanze elettrolitiche, che prima come tali non partecipavano alla sua architettura molecolare.

Una cosa soprattutto si dimostra evidente, ed è che in un mezzo colloidale le reazioni chimiche si fanno in modo diverso che nelle soluzioni comuni. Quando si pensi alla importanza che ogni giorno più vanno acquistando le proprietà fisiche della materia vivente nelle nostre rappresentazioni funzionali, si troverà che questo risultato non è certamente trascurabile.

**Matematica.** — *Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica.* Nota I di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

Il presente lavoro consta di tre Note: la prima Nota studia in generale quei problemi dinamici, le cui forze ammettono un potenziale, e i cui fasci di traiettorie (insieme di traiettorie corrispondenti a uno stesso valore della costante delle forze vive) sono permutati tra loro da un gruppo di Lie; la seconda determina effettivamente quelli di questi problemi con tre coordinate libere; la terza studia i problemi dinamici, le cui equazioni differenziali di Lagrange (definenti i movimenti) ammettono un gruppo di Lie. Quest'ultimo problema è un caso particolare di quello che io ho già risoluto <sup>(1)</sup>; ma rientra proprio tra quei casi eccezionali che non ho lì considerato in generale. Di questi problemi e specialmente del primo già si occuparono Stäckel, Liouville, Painlevé nei *Comptes Rendus* (1890-95) e nei *Leipziger Berichte* (1893-97); ambedue queste ricerche e specialmente la seconda danno casi, in cui l'integrazione del problema stesso si può affrontare con i metodi di Lie.

La maggiore difficoltà (dice Painlevé) non è di trovare i problemi con un gruppo a un parametro, ma addirittura i problemi con gruppi a più parametri.

Lo Stäckel studia principalmente il primo dei problemi precedenti con mezzi, che a lui stesso sembrano lunghi e faticosi (*Leip. Ber.* 1897), nè in questa ricerca va più in là dei gruppi a due parametri. Nel presente lavoro con nuovi procedimenti di una grandissima semplicità e valendomi dei risultati e dei procedimenti di altri miei lavori indicherò come si possa procedere alla risoluzione completa dei due problemi precedenti. Nel primo di questi due problemi (unico che sia stato affrontato dallo Stäckel) lo Stäckel non considera il caso che i fasci di traiettorie coincidano, ossia che la funzione potenziale sia costante. Questo è infatti il caso più difficile, che richiede particolari artifizii e neppure noi ce ne occuperemo, perchè esso si trova completamente risoluto nella mia Memoria: *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche* (Memorie dell'Accademia di Torino, 1903).

1. Cominciamo ora dal primo dei due problemi precedenti. Siano  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) le coordinate libere,  $t$  il tempo,  $U$  la funzione potenziale,  $\sum_1^n a_{ik} \frac{dx_i dx_k}{dt^2}$  la forza viva; la  $U$  e le  $a_{ik}$  non dipendano da  $t$ . Noi

<sup>(1)</sup> *Sui gruppi di trasformazioni geodetiche.* Memorie dell'Acc. di Torino, 1903.

indicheremo con  $(\Sigma a_{ik} dx_i dx_k, U)$  il nostro problema dinamico; i fasci di traiettorie non sono che le geodetiche degli spazi di cui  $(U + h) \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$  ( $h = \text{cost}$ ) è l'elemento lineare. Come dimostrò Painlevé (*Sur les transformations des équations de la Dynamique*. Journal de Mathématiques, 1894, pag. 77) se tra due problemi dinamici

$$(\Sigma a_{ik} dx_i dx_k, U) \quad (\Sigma b_{ik} dx_i dx_k, V)$$

si corrispondono i fasci di traiettorie allora si può passare dall'uno all'altro per mezzo di una trasformazione di Darboux, o, in altre parole, si hanno delle relazioni

$$(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \quad V = \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta} \quad \Sigma b_{ik} dx_i dx_k = (\alpha U + \beta) \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono costanti. Allora chiaramente il fascio di traiettorie  $(U + h) \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$  è identico col fascio di traiettorie  $(V + h) \Sigma b_{ik} dx_i dx_k$  relative al secondo problema, dove sia

$$h = \frac{\delta + k\beta}{\gamma + k\alpha} \quad \text{ossia} \quad -k = \frac{\delta - \gamma h}{\beta - \alpha h}.$$

Per esprimere perciò che una trasformazione infinitesima  $\Sigma_r \xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}$  trasforma in sè i fasci di traiettorie di un problema dinamico

$$(1) \quad (ds^2 = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k, U)$$

basta esprimere che lo muta in un suo trasformato di Darboux: e perciò in primo luogo che trasforma proiettivamente la  $U$  (ossia che trasformi le varietà  $U = \text{cost}$  proiettivamente e imprimitivamente) e che trasforma in modo conforme la forma quadratica  $\Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ . Anzi, poichè questa forma quadratica deve diventar moltiplicata per un'espressione  $\alpha U + \beta$  ( $\alpha = \text{cost}$ ,  $\beta = \text{cost}$ ) troveremo intanto:

$$X(U) = \lambda + \mu U + \nu U^2; \quad X(\Sigma a_{ik} dx_i dx_k) = (\tau U + \sigma) \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$$

dove  $\lambda, \mu, \nu, \tau, \sigma$  sono costanti. Di più si deve esprimere che se  $U$  è trasformato dalla  $\begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  allora  $ds^2$  resta moltiplicato proprio per  $\alpha U + \beta$ . Basta a tale scopo esprimere che anche  $U ds^2$  resta moltiplicato per un fattore lineare in  $\frac{1}{U}$  ossia, indicando con  $\varepsilon, \eta$  due costanti che  $X(U ds^2) = (\varepsilon U + \eta) ds^2$ ;

(1) Con questa notazione intendiamo chiaramente le geodetiche relative all'elemento lineare  $(U + h) \Sigma a_{ik} dx_i dx_k$ .

poichè ora

$$X(U ds^2) = X(U) ds^2 + U X(ds^2) = [(\lambda + \mu U + \nu U^2) + U(\tau U + \sigma)] ds^2$$

se ne deduce  $\tau = -\nu$ . Abbiamo perciò le equazioni:

$$(2) \quad X(U) = \lambda + \mu U + \nu U^2 \quad X(\sum a_{ik} dx_i dx_k) = -(\nu U + \sigma) \sum a_{ik} dx_i dx_k.$$

Sono queste le equazioni a cui deve soddisfare la  $X$ , equazioni tanto più semplici delle complicatissime equazioni dello Stäckel. Queste equazioni ci danno senz'altro i seguenti teoremi, che si possono dire i teoremi fondamentali per la risoluzione del nostro problema:

*Le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo che lasciano fisse le superficie equipotenziali ( $U = \text{cost}$ ) <sup>(1)</sup> sono trasformazioni simili per lo spazio, il cui elemento lineare è  $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ .*

Questo teorema è senz'altro evidente per la  $\nu = 0$ .

*Per trovare tutti i nostri problemi dinamici, basta determinare quegli elementi lineari  $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$  che ammettono un gruppo  $G$  conforme possedente un sistema di superficie  $U = \text{cost}$  come sistema di superficie di imprimitività; quel sottogruppo  $\Gamma$  di  $G$  per cui sono soddisfatte le (2) è il gruppo corrispondente al problema ( $ds^2, U$ ); in questo modo si trovano tutti i problemi cercati e i gruppi corrispondenti.*

Questo teorema è per la (2) pure evidente senz'altro; e dai risultati della mia Nota (*Sui gruppi conformi*. Atti dell'Accademia di Torino, 1903) si trae perciò subito:

*La ricerca dei nostri problemi e dei gruppi corrispondenti sotto forma finita si sa eseguire con sole quadrature. Due trasformazioni infinitesime distinte del nostro gruppo hanno traiettorie distinte.*

Se noi non consideriamo come distinti, ciò che pare opportuno fare nel nostro caso, due problemi dinamici, riconducibili l'uno all'altro con una trasformazione di Darboux, possiamo ancora dire:

*I problemi dinamici ( $ds^2, U$ ) che ammettono una trasformazione infinitesima  $X$  coincidono con quei problemi per cui  $ds^2$  ammette  $X$  come trasformazione simile e le varietà  $U = \text{cost}$  sono trasformate imprimitivamente da una trasformazione lineare non fratta.*

Infatti con una trasformazione di Darboux, possiamo far sempre che le  $U = \text{cost}$  vengano da  $X$  trasformate con una trasformazione non fratta, ossia che  $\nu = 0$ ; allora  $X$  per le (2) sarà simile per gli spazi di cui  $ds^2$  è l'elemento lineare.

Quest'ultimo teorema fu già enunciato da Stäckel, che però dice soltanto, meno completamente di quanto è qui fatto, che  $X$  deve essere per  $ds^2$

(1) Ciò equivale a dire che per esse è  $\lambda = \mu = \nu = 0$ .

geodetica e conforme; e, per una svista, dimentica di dire che  $U$  deve essere trasformato da una sostituzione *non fratta*.

2. Nei precedenti teoremi si trova già risoluto il nostro problema; ma per indicare la via più rapida per la effettiva risoluzione, indicheremo un mezzo con cui si possono ancora semplificare le equazioni fondamentali. Poichè  $U \neq \text{cost}$  prendiamo le varietà  $U = \text{cost}$  come superficie coordinate  $x_1 = \text{cost}$ ; sia  $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$  il nostro solito elemento lineare. Nella metrica definita da questo elemento lineare consideriamo le traiettorie ortogonali delle varietà equipotenziali  $x_1 = \text{cost}$ ; e scegliamo i parametri  $x_2, x_3, \dots, x_n$  in modo che queste traiettorie sieno precisamente le  $x_2 = \text{cost}, \dots, x_n = \text{cost}$  <sup>(1)</sup>. Sarà perciò  $a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0$ . Poichè di più, come sappiamo, il nostro gruppo è conforme per  $ds^2$  e poichè le  $x_1 = \text{cost}$  formano un sistema di imprimitività, anche queste traiettorie formano un sistema di imprimitività e perciò ogni trasformazione del nostro gruppo avrà la forma  $\xi_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^n \xi_i(x_2, x_3, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Poichè la  $x_1$  è trasformata proiettivamente, avremo che  $\xi_1$  è un polinomio di secondo grado in  $(x_1)$ ; per le (2) potremo scrivere che ogni trasformazione del nostro gruppo è del tipo:

$$(3) \quad X = (\lambda + \mu x_1 + \nu x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^n \xi_i(x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

mentre la forma quadratica è:

$$(4) \quad ds^2 = a_{11} dx_1^2 + \sum_{i=2}^n a_{ik} dx_i dx_k.$$

E le equazioni fondamentali assumono la forma semplicissima:

$$(5) \quad X(ds^2) = (-\nu x_1 + \sigma) ds^2$$

la quale, posto

$$(6) \quad X(ds^2) = \sum a'_{ik} dx_i dx_k \quad \text{dove} \quad a'_{ik} = \sum_r \left( \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right)$$

diventa:

$$(7) \quad a'_{ik} = (-\nu x_1 + \sigma) a_{ik}$$

che noi chiameremo equazioni di Killing generalizzate. E troviamo così: *Per trovare tutti i nostri problemi, basta determinare tutti gli elementi lineari (4), e i gruppi formati da trasformazioni del tipo (3), per cui valgono le (7).*

Se  $G$  è il gruppo, esso conterrà un sottogruppo  $\Gamma$  che lascia fisse

<sup>(1)</sup> D'ora in poi, quando parleremo di proprietà metriche, intenderemo sempre di riferirci alla metrica definita dall'elemento lineare  $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ .

le  $x_1 = \text{cost}$  (e quindi anche i singoli fasci di traiettorie) e che per le (7) non è altro che un gruppo di similitudini (*eventualmente ridotto all'identità*) per gli spazi, il cui elemento lineare è

$$(8) \quad ds^2_1 = \sum_2^n a_{ik} dx_i dx_k.$$

Trovati perciò tutti gli elementi lineari (8), che ammettono un gruppo  $\Gamma$  di similitudini generato da  $r$  trasformazioni  $X_1, X_2, \dots, X_{r-1}, X_r$  per cui valgano le  $X_i(ds^2) = \varepsilon_i ds^2$  ( $\varepsilon_i = \text{cost}$ ) basterà poi trovare  $a_{11}$ , in modo che  $X_i(a_{11}) = \varepsilon_i a_{11}$  per aver così determinato tutti i problemi dinamici che ammettono un gruppo  $\Gamma$ ; questa determinazione per i risultati della mia Nota citata si sa fare completamente. Per determinare poi i problemi, per cui  $G$  trasforma le  $x_1 = \text{cost}$  a un parametro basta tra i precedenti cercare quelli che ammettono una trasformazione  $X = x^\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \xi_i(x_2 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $\varepsilon = 0$  oppure  $\varepsilon = 1$ ) perchè noi non consideriamo distinti due problemi trasformati di Darboux. Se vogliamo cercare quelli il cui gruppo  $G$  trasforma le  $x_1 = \text{cost}$  a due parametri dobbiamo cercare quelli tra i precedenti che ammettono tanto una trasformazione  $X$  per cui  $\varepsilon = 0$ , quanto una per cui  $\varepsilon = 1$ . Quelli di questi, che ammettono anche una trasformazione  $x^2_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_2^n \xi_i(x_2 \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$  sono quelli, il cui gruppo  $G$  trasforma le  $x_1 = \text{cost}$  a tre parametri. Aggiungerò ora una facile osservazione:

*Se  $\Gamma$  non è tutto composto di puri movimenti per  $ds^2_1$ , e se ha  $r > 1$  parametri, quel suo sottogruppo  $\Gamma'$  a  $r - 1$  parametri <sup>(1)</sup> di puri movimenti per  $ds^2_1$  è certamente intransitivo nelle molteplicità  $(x_2 \dots x_n)$  su cui opera. E infatti se  $X_1 \dots X_{r-1}$  sono le sue trasformazioni generatrici,  $X_r$  è l'ulteriore trasformazione generatrice di  $\Gamma$ , sarà  $X_i(ds^2_1) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r - 1$ );  $X_r(ds^2_1) = h ds^2_1$  ( $h = \text{cost}$ ). E per le (7) sarà  $X_i(a_{11}) = 0$  ( $i = 1, \dots, r - 1$ ),  $X_r(a_{11}) = h a_{11}$ . Poichè  $X_r$  non è un movimento, è  $h \neq 0$ ; se  $\Gamma'$  fosse transitivo, sarebbe per le precedenti equazioni  $a_{11}$  indipendente dalle  $x_2 \dots x_n$ , cosicchè sarebbe  $X_r(a_{11}) = 0$  contro il supposto.*

(1) Cfr. la mia Memoria citata.

Fisica matematica. — *Sulla legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di due cariche elettriche in movimento.* Nota I di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Corrispondente RICCI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi.* Nota I del dott. M. CONTARINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nella V Nota *Sul problema generale della sismografia* <sup>(1)</sup> accennava a un grave equivoco che m'era sfuggito nei miei lavori precedenti dedicati allo stesso argomento; e correggendo intanto l'errore che ne conseguiva in uno dei risultati finali, prometteva di pubblicare in breve tempo una rettifica.

A questa appunto doveva limitarsi il presente lavoro; senonchè, analizzando meglio il problema <sup>(2)</sup> che mi aveva condotto alla teoria dei varî strumenti sismici, trovai che anche nella sua generalità esso era facilmente suscettibile d'un più ampio svolgimento e che anzi da una trattazione più completa di tale problema la teoria matematica dei sismografi poteva scendere più direttamente, evitando in gran parte le considerazioni che la sola rettifica avrebbe richieste.

Prendo dunque a studiare in questa Nota il moto di un *sistema olonomo* di corpi rigidi. In un'altra, o in altre successive, ridurrò il sistema così generale alla *catena* di corpi considerata nel lavoro testè citato; e ritroverò per via diversa, ma più esatta, le equazioni differenziali che reggono il moto dei varî strumenti sismici, correggendo così implicitamente l'errore cui prima accennava.

Per non rimandare continuamente il lettore alle precedenti pubblicazioni ripeto qui brevemente il significato dei simboli che verranno usati.

1. Chiamo:  $C_h$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) uno qualunque di  $n$  corpi rigidi *posti comunque nello spazio*;  $S_h(x_h, y_h, z_h)$  un sistema d'assi cartesiani ortogonali solidali con esso;  $x_{hi}, y_{hi}, z_{hi}$  le coordinate (costanti) di un punto generico  $P_{hi}$  appartenente a  $C_h$ , riferite allo stesso sistema;  $\xi_{hi}, \eta_{hi}, \zeta_{hi}$  le coordinate (variabili) del medesimo punto rispetto a un sistema cartesiano immobile  $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$  al quale vien riferito il movimento dei corpi. Al valore *zero* del-

(1) Rendic. Accad. Lincei, vol. XI, 2° sem., serie 5<sup>a</sup>, fasc. 4°; pag. 182.

(2) Ibid., 1° sem., fasc. 9°, pag. 380.

l'indice  $i$  farò sempre corrispondere l'origine del sistema mobile  $S_h$ ; così

$$\left. \begin{aligned} P_{h0} &\equiv S_h. \\ x_{h0} = y_{h0} = z_{h0} &= 0. \end{aligned} \right\} (h = 1, 2, \dots, h, \dots, n).$$

Chiamati  $\alpha_{h1}, \alpha_{h2}, \alpha_{h3}$  i coseni degli angoli che l'asse delle  $\xi$  fa con gli assi delle  $x_h, y_h, z_h$ , e  $\beta_{hs}, \gamma_{hs}$  ( $s = 1, 2, 3$ ) i coseni analoghi, relativi all'asse delle  $\eta$  e a quello delle  $\zeta$ , e fatte le posizioni:

$$(a) \quad a_{hi} = \alpha_{h1} x_{hi} + \alpha_{h2} y_{hi} + \alpha_{h3} z_{hi}; \quad b_{hi} = \text{ecc.},$$

si sa che il movimento più generale del corpo  $C_h$  è rappresentato dalle equazioni

$$(1) \quad \xi_{hi} = \xi_{h0} + a_{hi}; \quad \eta_{hi} = \text{ecc.}$$

e che, ponendo come al solito

$$(2) \quad \delta\pi_h = \sum_s \beta_{hs} \delta\gamma_{hs} = - \sum_s \gamma_{hs} \delta\beta_{hs}; \quad \delta\chi_h = \sum_s \gamma_{hs} \delta\alpha_{hs} = \text{ecc.},$$

per le componenti d'uno spostamento virtuale del punto generico  $P_{hi}$  si trovano le note espressioni:

$$\delta\xi_{hi} = \delta\xi_{h0} + \delta\chi_h (\zeta_{hi} - \zeta_{h0}) - \delta\varrho_h (\eta_{hi} - \eta_{h0}), \quad \text{ecc.};$$

ossia, ricordando che per le (1) risulta

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} a_{hi} &= \xi_{hi} - \xi_{h0}; \quad b_{hi} = \eta_{hi} - \eta_{h0}; \quad c_{hi} = \zeta_{hi} - \zeta_{h0}, \\ &\quad (i, h, \text{ qualunque}) \end{aligned} \right.$$

le espressioni

$$(3) \quad \delta\xi_{hi} = \delta\xi_{h0} + \delta\chi_h c_{hi} - \delta\varrho_h b_{hi} \quad \text{ecc.};$$

queste espressioni sostituite nell'equazione simbolica dei lavori virtuali che regge il moto del corpo  $C_h$

$$\sum_i \{ (\Xi_{hi} - m_{hi} \xi''_{hi}) \delta\xi_{hi} + \text{ecc.} \} = 0,$$

la mettono sotto la forma

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} X_h \delta\xi_{h0} + Y_h \delta\eta_{h0} + Z_h \delta\zeta_{h0} + X^{(h)} \delta\pi_h + Y^{(h)} \delta\chi_h + Z^{(h)} \delta\varrho_h &= 0, \\ &\quad (h = 1, 2, \dots, h, \dots, n). \end{aligned} \right.$$

avendo posto per brevità

$$(b) \quad \left\{ \begin{aligned} X_h &= \sum_i (\Xi_{hi} - m_{hi} \xi''_{hi}); \quad \text{ecc.}, \\ X^{(h)} &= \sum_i \{ b_{hi} (Z_{hi} - m_{hi} \zeta''_{hi}) - c_{hi} (H_{hi} - m_{hi} \eta''_{hi}) \}; \quad \text{ecc.} \end{aligned} \right.$$

2. Come è ben noto i nove coseni direttori  $\alpha_{h1}, \alpha_{h2}, \dots, \gamma_{h3}$ , che definiscono le *rotazioni* del corpo  $C_h$ , sono legati fra loro da sei relazioni fondamentali; essi dunque possono considerarsi come funzioni di tre sole variabili indipendenti che rappresenterò con  $\varphi_h, \psi_h, \omega_h$ . Chiamando poi  $\delta\varphi_h, \delta\psi_h, \delta\omega_h$  le loro variazioni arbitrarie, ricordando le (2) e osservando che le variazioni  $\delta\alpha_{h1}, \dots$  dei coseni si possono esprimere in funzioni lineari e omogenee di  $\delta\varphi_h, \dots$ , è naturale che anche le *caratteristiche*  $\delta\pi_h, \dots$  sono funzioni lineari di  $\delta\varphi_h, \dots$ ; e si può scrivere

$$(5) \quad \delta\pi_h = p_{h1} \delta\varphi_h + p_{h2} \delta\psi_h + p_{h3} \delta\omega_h; \delta\chi_h = q_{h1} \delta\varphi_h + \text{ecc.},$$

rappresentando con  $p_{h1}, \dots, r_{h3}$  certe funzioni dei parametri  $\varphi_h, \dots$ , che si potranno ritenere note *quando sia fissata la natura dei parametri stessi* <sup>(1)</sup>, ma che in ogni caso soddisfanno alla condizione fondamentale

$$(6) \quad D_h \equiv (p_{h1} q_{h2} r_{h3}) \geq 0.$$

Essendo soddisfatta questa condizione, il sistema (5) si può risolvere rispetto alle variazioni  $\delta\varphi_h, \dots$ , le quali così prendono la forma

$$(5') \quad \delta\varphi_h = P_{h1} \delta\pi_h + Q_{h1} \delta\chi_h + R_{h1} \delta\varrho_h; \delta\psi_h = P_{h2} \delta\pi_h + \text{ecc.}$$

Nella (4) in luogo di  $\delta\pi_h, \dots$  si possono sostituire i secondi membri delle (5): ponendo allora

$$(c) \quad x^{(h)} = p_{h1} X^{(h)} + q_{h1} Y^{(h)} + r_{h1} Z^{(h)}; y^{(h)} = p_{h2} X^{(h)} + \text{ecc.},$$

la (4) si trasforma nella

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} X_h \delta\xi_{h0} + Y_h \delta\eta_{h0} + Z_h \delta\zeta_{h0} + x^{(h)} \delta\varphi_h + y^{(h)} \delta\psi_h + z^{(h)} \delta\omega_h = 0. \\ (h = 1, 2, \dots, h, \dots, n). \end{array} \right.$$

3. Finora, ammettendo l'esistenza di  $n$  equazioni distinte (4) o (4'), si è implicitamente supposto che gli  $n$  corpi  $C_h$  siano indipendenti fra loro. Ma se fra i corpi esiste qualche relazione, cosicchè essi formino un *sistema*, per il principio di D'Alembert deve essere nulla la *somma* dei lavori virtuali *estesa a tutti i punti materiali del sistema*, cioè la somma di tutte le espressioni (4) o (4') corrispondenti ai singoli corpi  $C_h$ ; dunque la equazione simbolica, dalla quale si potranno poi dedurre le equazioni effettive

(1) Non sarà inutile rintracciare l'origine dell'equivoco ricordato in principio. Nella I Nota sulla determinazione dei moti sismici aveva rappresentato i parametri relativi alla rotazione dei varî corpi [tre rotazioni infinitesime successive intorno agli assi delle  $\xi, \eta, \zeta$ ] coi simboli  $\pi, \chi, \varrho$ : quindi le loro variazioni arbitrarie venivano rappresentate coi simboli  $\delta\pi, \dots$  identici ai simboli delle *caratteristiche* (2), facendomi implicitamente ritenere

$$p_{h1} = q_{h2} = r_{h3} = 1$$

e tutti gli altri coefficienti analoghi nulli.

che definiscono il moto del sistema di corpi, deve essere della forma

$$(7) \quad \sum_1^n (X_h \delta \xi_{h0} + \dots + X^{(h)} \delta \pi_h + \dots) = 0,$$

oppure

$$(7') \quad \sum_1^n (X_h \delta \xi_{h0} + \dots + x^{(h)} \delta q_h + \dots) = 0.$$

Considero prima il tipo più generale di legami che rendono *olonomo* il sistema di corpi rigidi, cioè quei legami che possono essere rappresentati in termini finiti da equazioni della forma

$$f_u(t, \xi_{10}, \dots, \xi_{n0}, q_1, \dots, \omega_n) = 0:$$

se di queste equazioni ne esistono  $6n - m$  indipendenti, le variazioni virtuali dei  $6n$  parametri  $\xi_{h0}, \dots, q_h, \dots$  ( $h = 1, 2, \dots, n$ ) sono definite dal sistema di equazioni

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n (A_{uh} \delta \xi_{h0} + B_{uh} \delta \eta_{h0} + C_{uh} \delta \zeta_{h0}) + \\ + \sum_1^n (A^{(uh)} \delta q_h + B^{(uh)} \delta \psi_h + C^{(uh)} \delta \omega_h) = 0, \quad (u = 1, 2, \dots, n - m), \end{array} \right.$$

nelle quali per brevità si è posto

$$(d) \quad A_{uh} = \frac{\partial f_u}{\partial \xi_{h0}}, \text{ ecc.}; \quad A^{(uh)} = \frac{\partial f_u}{\partial q_h}, \text{ ecc.};$$

cioè hanno le espressioni:

$$(8_1) \quad \delta \xi_{h0} = \sum_1^m L_{hs} e_s, \quad \delta \eta_{h0} = \sum_1^m M_{hs} e_s, \quad \delta \zeta_{h0} = \sum_1^m N_{hs} e_s;$$

$$(8_2) \quad \delta q_h = \sum_1^m L^{(hs)} e_s, \quad \delta \psi_h = \sum_1^m M^{(hs)} e_s, \quad \delta \omega_h = \sum_1^m N^{(hs)} e_s,$$

dedotte risolvendo le (8). In queste espressioni le  $e_s$  sono  $m$  quantità arbitrarie e i coefficienti  $L_{hs}, \dots, N^{(hs)}$  sono *minori d'ordine*  $6n - m$  della matrice che ha per elementi  $A_{uh}, \dots, C^{(uh)}$ .

Per costruire ora le equazioni effettive del moto basta dare alle arbitrarie che compariscono nella equazione (7') i valori (8<sub>1</sub>), (8<sub>2</sub>), raccogliere a fattori comuni le nuove arbitrarie  $e_s$  ed eguagliarne separatamente a zero

i coefficienti: così facendo si ottengono le  $m$  equazioni differenziali

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^n (X_h L_{hs} + Y_h M_{hs} + Z_h N_{hs}) + \\ + \sum_1^n (x^{(h)} L^{(hs)} + y^{(h)} M^{(hs)} + z^{(h)} N^{(hs)}) = 0. \quad (s = 1, 2, \dots, s, \dots, m). \end{array} \right.$$

4. Questo procedimento presuppone che la equazione simbolica dei lavori virtuali dalla forma originaria (7) sia stata ridotta alla forma (7') mediante le (5), cioè che siano note le funzioni  $p_{h1}, \dots, r_{h3}$ . Ma può darsi che dalle equazioni dei legami in termini finiti si possano dedurre direttamente altrettante equazioni fra le *traslazioni virtuali*  $\delta \xi_{h0}, \dots$  e le *caratteristiche* delle rotazioni  $\delta \pi_h, \dots$ . Per chiarire meglio questo concetto, si suppongano dedotte dalle equazioni dei vincoli le equazioni (8); allora sostituendo alle  $\delta q_h, \dots$  i loro valori (5') e ponendo per brevità

$$(e) \quad a^{(uh)} = P_{h1} A^{(uh)} + P_{h2} B^{(uh)} + P_{h3} C^{(uh)}, \quad b^{(uh)} Q_{h1} A^{(uh)} + \text{ecc.},$$

le (8) prendono la forma

$$(8') \quad \sum_1^n (A_{uh} \delta \xi_{h0} + \dots) + \sum_1^n (a^{(uh)} \delta \pi_h + b^{(uh)} \delta \chi_h + c^{(uh)} \delta \varrho_h) = 0.$$

I legami che verranno considerati in seguito sono appunto tali che dalle equazioni che li rappresentano si calcolano *direttamente* i coefficienti  $a^{(uh)}, \dots$ , senza bisogno di ricorrere alla trasformazione (5'), cioè senza che sia necessario prefissare la natura dei parametri  $q_h, \psi_h, \omega_h$ . In tal caso le equazioni dinamiche si ottengono applicando al sistema (8'), (7) il procedimento ora seguito per il sistema (8), (7'). Cioè si risolvono le (8') in modo da esprimere le arbitrarie  $\delta \xi_{h0}, \dots, \delta \varrho_h$  mediante  $m$  nuove arbitrarie  $e_1, \dots, e_s, \dots, e_m$ : i valori trovati si sostituiscono nella (7) e si eguagliano a zero i coefficienti delle  $e_s$ . Ma risolvendo le (8') si devono trovare per le  $\delta \xi_{h0}, \dots$  i valori (8<sub>1</sub>), giacchè la trasformazione eseguita per passare dal sistema (8) al sistema (8') lasciava intatte le traslazioni virtuali; e per le caratteristiche  $\delta \pi_h, \dots$ , sapendo ch'esse sono *sempre* legate alle variazioni  $\delta q_h, \dots$  dalle relazioni (5), si devono trovare i valori

$$(8'_2) \quad \delta \pi_h = \sum_1^m l^{(hs)} e_s, \quad \delta \chi_h = \sum_1^m m^{(hs)} e_s, \quad \delta \varrho_h = \sum_1^m n^{(hs)} e_s,$$

ottenuti appunto dalle (5) sostituendovi a  $\delta q_h, \dots$  i valori (8<sub>2</sub>), e ponendo per brevità

$$(f) \quad l^{(hs)} = p_{h1} L^{(hs)} + p_{h2} M^{(hs)} + p_{h3} N^{(hs)}; \quad m^{(hs)} = q_{h1} L^{(hs)} + \text{ecc.}$$

Dunque in questo caso le equazioni del moto hanno la forma:

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^n (X_h L_{hs} + \dots) + \sum_1^n (X^{(h)} l^{(hs)} + Y^{(h)} m^{(hs)} + Z^{(h)} n^{(hs)}) &= 0. \\ (s = 1, 2, \dots m). \end{aligned} \right.$$

Non sarà infine superfluo dimostrare l'identità dei due sistemi (9) e (9'). A questo scopo basta sostituire alle quantità  $x^{(h)}$ ,  $y^{(h)}$ ,  $z^{(h)}$  che compariscono nelle (9) e alle  $l^{(hs)}$ ,  $m^{(hs)}$ ,  $n^{(hs)}$  che compariscono nelle (9'), rispettivamente i valori (c) ed (f), perchè le somme

$$\sum_1^n (x^{(h)} L^{(hs)} + \dots), \quad \sum_1^n (X^{(h)} l^{(hs)} + \dots),$$

e quindi anche le equazioni (9) e (9'), diventino esplicitamente identiche.

5. Sul problema algebrico, al quale è ridotta la ricerca delle equazioni differenziali (9) o (9'), è opportuno fare alcune considerazioni che saranno utili in seguito: per maggior comodità l'enunciazione sotto questa forma alquanto più generica: « Alle quantità  $x_s$  che compariscono nella somma

$$(I) \quad S = \sum_1^N U_s x_s$$

sostituire i valori più generali compatibili con le condizioni

$$(II) \quad \sum_1^N a_{hs} x_s = 0 \quad (h = 1, 2, \dots p; p \leq N) \text{ »}.$$

Se la soluzione generale delle (II) è

$$(II') \quad x_s = \sum_1^{N-p} A_{st} y_t,$$

la (I) diventa

$$(I_1) \quad S = \sum_1^{N-p} \left( \sum_1^N U_s A_{st} \right) y_t.$$

Supponiamo ora che alle  $x_s$  siano imposte altre condizioni indipendenti e compatibili con le precedenti:

$$(III) \quad \sum_1^N b_{ks} x_s = 0 \quad (k = 1, 2, \dots q; p + q \leq N);$$

poichè queste devono coesistere con le (II), ossia con le loro equivalenti (II'), si può: sostituire alle  $x_s$  i valori già trovati (II') cosicchè queste diventano

$$(III_1) \quad \sum_1^{N-p} \left( \sum_s^N b_{ks} A_{st} \right) y_t = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

risolvere questo sistema esprimendo le  $y$  in funzione di  $(N - p) - q$  parametri nuovi

$$(III') \quad y_t = \sum_1^{N-p-q} B_{t\tau} z_\tau;$$

eliminare le  $y_t$  fra queste equazioni e le (II'), ottenendo la soluzione generale (1)

$$(II'') \quad x_s = \sum_1^{N-p} \sum_1^{N-p-q} A_{st} B_{t\tau} z_\tau.$$

Sostituendo infine nella somma (I) alle  $x_s$  i valori (II''), si ottiene

$$(I_2) \quad S = \sum_1^{N-p-q} \left( \sum_1^{N-p} \sum_s^N U_s A_{st} B_{t\tau} \right) z_\tau.$$

Ma è facilissimo verificare che all'identica espressione si arriva sostituendo nelle (I<sub>1</sub>) in luogo delle  $y$  i valori (III'): infatti con tale sostituzione la (I<sub>1</sub>) diventa

$$S = \sum_1^{N-p} \left( \sum_s^N U_s A_{st} \right) \sum_1^{N-p-q} B_{t\tau} z_\tau,$$

la quale coincide con la (I<sub>2</sub>) dopo semplici trasposizioni dei simboli  $\sum$ .

In modo analogo si può procedere se oltre alle (II) e (III) le  $x_s$  devono soddisfare alle condizioni

$$(IV) \quad \sum_1^N c_{is} x_s = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; p + q + r \leq N);$$

(1) Che le (II'') siano effettivamente la soluzione generale delle (II), (III), si dimostra verificando che quei valori delle  $x_s$  soddisfano le equazioni (II) e (III) e osservando che i valori stessi dipendono da  $N - (p + q)$  parametri arbitrari.

basta cioè sostituire in queste alle variabili  $x_s$  successivamente le  $y_t, z_\tau$  mediante le (II'), (III'), risolvere il sistema risultante

$$(IV_1) \quad \sum_1^{N-p-q} \left( \sum_1^{N-p} \sum_1^N c_{is} A_{st} B_{t\tau} \right) z_\tau = 0$$

rispetto alle nuove incognite  $z$ , e sostituirne i valori

$$z_\tau = \sum_1^{N-p-q-r} C_{\tau l} u_l$$

nella somma (I<sub>2</sub>), trasformandola in

$$(I_3) \quad s = \sum_1^{N-p-q-r} \left( \sum_1^{N-p-q} \sum_1^{N-p} \sum_1^N U_s A_{st} B_{t\tau} C_{\tau l} \right) u_l.$$

Queste osservazioni, di per sè abbastanza evidenti, non sono però superflue, perchè si possono riassumere in una regola praticamente importante: « Se da un sistema olonomo di corpi rigidi si passa ad un altro sistema meno generale mediante l'aggiunta di nuovi legami, non è necessario trasformare l'equazione simbolica dei lavori virtuali partendo dalla sua forma primitiva (7) o (7') e tenendo conto *simultaneamente di tutte* le equazioni di condizione; ma si può partire dalla equazione simbolica *già trasformata* in virtù di legami precedenti ed eliminare i parametri arbitrari ch'essa contiene mediante la soluzione generale dei nuovi legami, *trasformati anch'essi* col metodo di sostituzione accennato poco fa ».

Quando poi le equazioni dei legami sono date o trasformate in modo che *alcune* delle quantità  $\delta \xi_{10}, \dots, \delta q_n$  siano espresse esplicitamente mediante funzioni lineari delle rimanenti, il sistema si può ritenere risoluto in generale, bastando perciò considerare come parametri arbitrari tutte le incognite che non compariscono nei primi membri delle equazioni stesse.

Infine se non esistono equazioni di condizione sono arbitrarie tutte le quantità  $\delta \xi_{10}, \dots, \delta q_n$ .

6. Per concludere questa parte generale dello studio che mi sono proposto, esamino brevemente una specie di legami che più facilmente si realizzano in pratica. Essi consistono in ciò che « ciascun corpo può avere un punto o una retta costantemente in comune con un altro corpo del sistema ». Poichè l'esistenza di una retta in comune equivale all'esistenza in comune di due punti distinti, questa specie di legami si può rappresentare brevemente con tante eguaglianze simboliche

$$(10) \quad P_{hi} \equiv P_{kj}$$

quanti sono i punti comuni a una coppia di corpi  $C_h, C_k$ . È facilissimo

verificare che questa specie di legami gode appunto della proprietà accennata al n. 4.

Infatti per ogni identità (10) hanno luogo tre equazioni effettive in termini finiti

$$(11) \quad \xi_{kj} = \xi_{hi}, \quad \eta_{kj} = \eta_{hi}, \quad \zeta_{kj} = \zeta_{hi},$$

dalle quali si ricava

$$(11') \quad \delta \xi_{kj} - \delta \xi_{hi} = \delta \eta_{kj} - \delta \eta_{hi} = \delta \zeta_{kj} - \delta \zeta_{hi} = 0;$$

e basta in queste ultime sostituire a  $\delta \xi_{hi}, \dots, \delta \zeta_{kj}$  i valori (3) perchè esse prendano la forma

$$(12) \quad \begin{aligned} &\delta \xi_{k0} - \delta \xi_{h0} + \delta \chi_k c_{kj} - \delta \chi_h c_{hi} - \\ &\quad - \delta \varrho_h b_{kj} + \delta \varrho_k b_{hi} = 0 \text{ ecc. } (1) \end{aligned}$$

analoga alle (8) e indipendente dalla natura dei parametri  $\varphi_h, \dots, \omega_k$ .

**Fisica.** — *Sulla scarica per effluvio in seno ai gas.* Nota del dott. D. PACINI, presentata dal Socio BLASERNA.

**Chimica.** — *Sulla riduzione elettrolitica delle soluzioni acide di anidride molibdica e su alcuni composti del triocloruro di molibdeno.* Nota di A. CHILESOTTI, presentata dal Socio S. CANIZZARO.

Queste due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Paleontologia.** — *Il Clisiophyllum Thildae n. sp. nel Pará.* Nota di GIOACCHINO DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio T. TARAMELLI.

Il chiaro prof. H. von Jhering, direttore del Museu Paulista di San Paulo nel Brasile, affidò gentilmente al mio studio un corallo fossile, raccolto nei dintorni di Itahituba, lungo il Rio Tabajoz (= Tapajoz = Tapajos) affluente del Rio delle Amazzoni.

Non è cosa facile formarsi un concetto chiaro della costituzione geologica di quelle lontane e poco conosciute regioni; tuttavia facendo tesoro di quanto è stato anteriormente scritto intorno alla geologia del Brasile in ge-

(1) Per la generalità della trattazione si può osservare che non è necessaria la costante coincidenza dei punti  $P_{hi}, P_{kj}$  perchè siano verificate le (12) ossia le (11'); ma anzi si può dimostrare che la condizione più generale sufficiente e necessaria è questa « che il vettore  $P_{hi} P_{kj}$  abbia una lunghezza e una direzione determinata per ogni istante ».

nere e del bacino delle Amazzoni in ispecie, si riesce a raccogliere molti fatti che possono tornare utili per il caso presente.

Spigolo dai lavori di una eletta schiera di geologi, come: d'Orbigny, Coutinho, Rathbun, Foetterle, Lallemant, Plant, Chaudles, Carruthers, Vélain, Gorceix, Katzer, Hartt, Derby, Steimann, ecc. alcune informazioni geologiche.

L' *Arcaico* nel Brasile è specialmente rappresentato dai gneiss granitoide e porfiroide. A queste rocce seguono i micascisti e gli scisti micacei untuosi, che gradatamente passano alle quarziti. Sopra, ma con discordanza, giacciono altri scisti con lenti di calcare cristallino: l' itacolumite corona tutta la potente formazione.

Nel *Precambriano* predominano le arenarie micacee e subordinatamente affiorano scisti e conglomerati.

La formazione *siluriana* è largamente rappresentata, nel basso bacino delle Amazzoni, da rocce scistose, qua e là argillose, le quali racchiudono i fossili dell'epoca.

Il *Devoniano* affiora col sistema precedente ed è costituito da arenarie ferruginee e da scisti. Non mancano i fossili caratteristici.

Il primo che scoprì il *Carbonifero* fu il maggiore Coutinho durante il viaggio che intraprese per accompagnare il celebre Agassiz, per ordine dello stesso imperatore Don Pedro II. Il Coutinho lo segnalò fra il Rio Gurupatuba ed il Rio Surubiu. La constatazione scientifica della presenza di questo sistema ad Itaituba si deve specialmente al Derby <sup>(1)</sup> ed all'Hartt <sup>(2)</sup>. Le rocce di questa formazione sono quasi esclusivamente calcaree, solo localmente si può avere una *facies* scistosa. I fossili generalmente sono silicei; interessante è l'identità che presentano alcuni fossili con quelli sincroni europei.

Inferendo, col Frech <sup>(3)</sup>, dalle faune marine conosciute nel Carbonifero dell'America meridionale, si giunge a stabilire che l'area corrispondente alla vastissima regione del Rio delle Amazzoni apparteneva, durante i tempi del Carbonifero inferiore, al continente Indo-africano. Solo verso la fine di questo sistema la regione nominata fu invasa dal mare, il quale vi depositò le rocce, donde si esumarono le faune descritte dall'Hartt, dal Derby e dagli altri paleontologi. Il nostro fossile probabilmente è una specie isolata proveniente da quelle formazioni. Il mare che trasgredì sopra quel lembo del continente

(1) Derby O. A., *On the Carboniferous Brachiopoda of Itaituba, Rio Tapajós. Province of Pará, Brazil.* Bull. of the Cornell University, vol. I, n. 2. Ithaca, 1874.

(2) Hartt C. F., *Report of a reconnaissance of the Lower Tapajós.* Bull. of the Cornell University (Science). Vol. I, n. 1. Ithaca. New-York, 1874. Hartt fu allievo e compagno di viaggio dell'Agassiz nel Brasile.

(3) Frech F. *Lethaea geognostica. Die Steinkohlenformation.* Carta IV, V. Stuttgart 1899.

americano era il medesimo che affogava quasi tutta l'Europa orientale: ciò spiega le intime relazioni che corrono fra le faune di così lontane regioni.

Non ancora regna accordo sul riferimento delle arenarie rosse, non marine, che soventi ricoprono le rocce paleozoiche; invero alcuni le riferiscono al *Triasico* ed altri le chiamano *cretaciche*.

Poco o punto c'interessano presentemente le altre formazioni secondarie, terziarie e quaternarie.

Il polipierite in istudio appartiene sicuramente ai così detti *Tetracorrallia* Haeck. o *Rugosa* E. H. e quindi accenna, con molto fondamento, a formazioni paleozoiche. Ciò non costituisce una nuova conquista scientifica, dacchè è già conosciuto il Carbonifero nella località di provenienza del nostro esemplare; come si ricava dagli studi geologici citati e specialmente da quello del Derby, dove sono enumerati i fossili del Carbonifero di Obides, di Itahituba ecc. (1). Paleontologicamente però è interessante il fossile brasiliano, perchè rappresenta da solo una nuova forma di un genere, il quale è conosciuto fossile dal Siluriano sino al Carbonifero. Invero questa specie non deve essere stata menzionata fra i diversi coralli carboniferi nominati dal Derby (1894), non avendone riportato alcuno al gen. *Clisiophyllum* cui si riferisce sicuramente il nostro esemplare.

Se sentirò la necessità di esprimermi talvolta con qualche esitazione, mi si perdoni in considerazione della difficoltà straordinaria — talvolta insuperabile — che incontra chi vuol consultare l'antica bibliografia geologica che riguarda l'America e specialmente l'America meridionale.

Senz'altro dimostro che il nostro polipierite appartiene al gen. *Clisiophyllum*, inteso col significato diverso da quello dato dall'autore del genere (Dana, 1846. *Explor. Exped. Zooph.*, pag. 361); ma nel senso con cui lo definiscono il Milne Edwards ed Haime nel 1850 (*British fossils Corals*, p. LXX); poi dagli stessi riconfermato (*Polyp. foss. terr. palaeoz.*, pag. 409-1851; *Hist. Corall.*, vol. III, pag. 402-1860) e dagli altri autori quasi generalmente riconosciuto.

#### Gen. CLISIOPHYLLUM (2) Dana (*pars*).

Invero esso è isolato, curvo. Porta setti ben sviluppati, dei quali parecchi raggiungono, quasi dritti, il centro calicinale che è foggiato a modo di cono rilevato. La lamina columellare è poco distinta superiormente da un setto principale. La columella è falsa e risulta dal sollevamento dei tavolati. Vi hanno molte traverse. Le sezioni longitudinali e trasversali corrispondono, per le particolarità anatomiche interne che mostrano, a tutte quelle corrispondenti figurate per altre specie dello stesso genere.

(1) Journal of Geology. Vol. II, n. 5, p. 480-501. Chicago 1894.

(2) κλισίον (κλισία); φύλλον.

A questo stesso genere giunsi servendomi delle diagnostiche (*Metodo dicotomico*) che sono riportate e nel lavoro ultimo citato del Milne Edwards (Tom. III) ed in quello del de Fromentel (*Intr. étud. polyp. foss.* Paris, 1861). Seguendo quest'ultimo abbiamo:

pag. 71.  $\alpha$ . - RUGOSA;

$\beta$ . - setti ben sviluppati;

$\gamma$ . - fossetta settale;

pag. 72.  $\delta$ . - apparato settale regolare;

$\epsilon$ . - una sola teca;

$\eta$ . - calice rotondo od ovale;

$\theta$ . - epiteca;

pag. 73.  $\iota$ . - senza prolungamenti radiceiformi;

$\kappa$ . - setti al centro;

$\lambda$ . - setti dritti, columella lamellare rudimentale: gen. CLISIOPHYLLUM.

Per il polipierite rimane così assicurata la posizione generica.

Poichè, come cercherò di dimostrare, il nostro esemplare non può riferirsi ad alcuna delle specie conosciute del gen. *Clisiophyllum*, quindi lo descrivo come tipo di una specie nuova che chiamo

*Clisiophyllum Thildae* n. sp.

Descrizione. — *Polipierite* (vedi fig. 1) isolato, conico, alquanto allungato: irregolare nella sua forma esterna a causa delle intermittenze dello sviluppo; queste sono così pronunciate da dar luogo, a diverse distanze, ad anelli forti ed angolosi, in modo che ne risulta una vera e propria soluzione di continuità della teca; per la forma esterna ha qualche analogia con il *Cyathophyllum* (?) *Loveni* E. H. (*Brit. foss. Corals*, pag. 280, tav. 66, fig. 2). Il polipierite (vedi fig. 2), quando si vede dalla parte calicinale, si riterrebbe formato da diversi individui che si sarebbero impiantati l'uno nel centro dell'altro inferiore; ciò che però non è come viene poi luminosamente dimostrato dalla sezione longitudinale.

L'*epitecio* è stato asportato; ma esisteva, come si vede dove è conservato; sembrerebbe spesso ed ondulato nel senso trasversale. Non si può dire di più a causa della cattiva conservazione.

Il *calice* (vedi fig. 2) è quasi circolare. Nulla posso asserire sulla profondità della *fossetta*, nè sulla configurazione dei bordi, i quali, quantunque si mostrino alquanto aperti, non dovevano però essere rovesciati.

I *setti*, in numero di circa 36, pare arrivino quasi tutti sino al centro calicinale: essi sono relativamente forti e dritti.

La *columella* è falsa, non risultando di una formazione propria, ma dal rigonfiamento in alto dei tavolati. Tuttavia essa, vista esternamente è lamellare e pare che abbia uno speciale e più intimo rapporto con un setto calicinale che si potrebbe quindi ritenere come *setto principale* (vedi fig. 2). La sua struttura interna è svelata dalle sezioni longitudinali e trasversali.

Nelle nominate sezioni, quantunque, durante la sostituzione della sostanza silicea a quella dello scheletro, siano rimasti grossi vacuoli, pure vi si possono rilevare quasi tutte le particolarità anatomiche interne.



FIG. 1. — Grandezza naturale.

FIG. 2. —  $\times 2$ .

FIG. 3. — Poco meno del naturale.

Invero riconosciamo nella sezione longitudinale della regione preapicale del polipierite (vedi fig. 3) che l'*area esterna*, relativamente di poco spessore, è ripiena di vescicole molto piccole, talvolta lunghe e molto inclinate.

L'*area media*, maggiormente sviluppata rispetto all'esterna, è molto ben distinta. Essa è rappresentata da linee che s'innalzano e si sovrappongono formando una specie di stratificazione lenticolare con pendenza generale quaquaversale: le cavità lenticolari sono abbastanza allungate. Tale struttura si deve certamente attribuire ai *tavolati*.

L'*area centrale* risulta quasi vuota, quando non sono rimasti i residui dei tavolati sezionati nella parte più elevata che formava le successive false columelle lamellari.

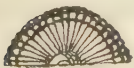


FIG. 4. — Poco meno del naturale.

La sezione trasversale mostra meno, per alcuni caratteri, di quanto si scorge nella regione calicinale; tuttavia essa mostra più chiaramente la struttura della falsa columella (vedi fig. 4).

Dimensioni. — Il polipierite, prima che lo sezionassi, misurava 4 cm. di lunghezza; mancava però della parte apicale e del bordo calicinale.

Il diametro maggiore, che si trova a  $\frac{2}{3}$  circa della sua lunghezza, è di circa cm. 2. L'ultimo orifizio calicinale invece è più piccolo di oltre la metà, giacchè misura ora mm. 9: ciò che dimostra un sensibilissimo immi-

serimento avvenuto verso la fine della vita del polipierite. La columella nella parte saliente doveva essere poco più lunga di 1 mm. e molto meno larga.

Rapporti e differenze. — Tra le diverse specie del gen. *Clisiophyllum*, che sono a mia conoscenza, quella che più di ogni altra si avvicina alla nostra è il *Cl. turbinatum* M' Coy (E. H., *Brit. foss. Corals*, pag. 184, tav. 33, figg. 1 e 2), la quale forma pur se ne allontana per molti caratteri, cioè: forma generale, numero e disposizione dei setti, dimensioni, struttura interna del polipierite, ecc. ecc.

Anche facilmente si differenzia la nuova specie da tutte quelle conosciute nei terreni paleozoici dell'Europa; così si allontana per il numero dei setti, per il rapporto della lunghezza ed il diametro del calice e per la costituzione della falsa columella ecc.

dal *Cl. Hisingeri* E. H. (*Polyp. foss. palaeoz.*, pag. 410, tav. 7, figg. 5, 5a);

dal *Cl. coniseptum* Keyserling sp. (*Wissenschaftliche Beobachtungen auf einer Reise in des Petschoraland im Jahre 1843*, pag. 64, tav. II, fig. 2a-c; Stuckenberg A., *Korallen u. Bryoz. Steinkohlenablag.* etc., pag. 87, tav. II, fig. 16; tav. IV, fig. 1; tav. V, fig. 1)

e dal *Cl. Bowerbanki* (E. H., *ibidem*, pag. 186, tav. 37, figg. 4, 4a).

Per i menzionati caratteri e per altri ancora si separa il *Cl. Thildae* dalle altre forme conosciute nella regione paleozoica dell'Europa orientale.

Così si differenzia dal *Cl. squamosum* Ludwig (*Zur Palaeontologie des Ural's*, pag. 214, tav. 31, fig. 3a-b; Stuckenberg, *Korallen u. Bryozoen der Steinkohlenablagerungen des Ural u. des Timan*, pag. 89, tav. IV, fig. 4; tav. V, fig. 2) specialmente per il numero dei setti e per la loro disposizione, ecc.; cui del resto somiglia per la figura generale e per molte altre particolarità;

dal *Cl. gracile* Ludwig (loc. cit., pag. 213, tav. 31, fig. 2a,b; Stuckenberg, loc. cit., pag. 91, tav. V, fig. 3) per il numero dei setti, per non arrivare questi verso il centro, per la forma e disposizione della columella, ecc.;

dal *Cl. cinctum* Ludwig (loc. cit., pag. 214, tav. 31, fig. 4a,b; Stuckenberg, loc. cit., pag. 92, tav. IV, fig. 5; tav. V, fig. 4) anche per il numero dei setti e per la disposizione della columella; quantunque non manchino caratteri comuni;

dal *Cl. uralense* Stuckenberg (loc. cit., pag. 93, tav. IV, fig. 6; tav. V, fig. 5) per la forma generale, per la struttura anatomica interna e per la disposizione dei setti nel calice, ecc.;

dal *Cl. Krasnopolski* Stuckenberg (loc. cit., pag. 94, tav. IV, fig. 7) per la forma generale, per la disposizione e numero dei setti e per la struttura interna, ecc.;

dal *Cl. Pironai* de Angelis d'Ossat (*Contrib. stud. fauna foss. paleoz.*

*Alpi Carniche*, pag. 22. fig. testo) per la disposizione delle coste, per la forma generale e per molti altri caratteri.

Similmente riesce facile la distinzione con le forme americane. Invero basta specialmente il numero e la disposizione dei setti per riconoscere la differenza col *Cl. teres* Girty (*Devonian and Carboniferous fossils*, pag. 514, tav. 67, fig. 2a-d: U. St. Geol. Surv. Washington, 1899).

Dal *Cl. Danaanum* E. H. (*Polyp. foss. palaeoz.*, pag. 412) si allontana per il numero dei setti, per essere meno tozzo; per il bordo e la fossula calicinale, non svasato quello, non profonda questa, ecc.

Nello stesso modo deve essere separata la nuova specie dal *Cl. Billingsi* Dawson sp. (Lambe Lawrence M., *A revision of the genera and species of Canadian Palaeozoic Corals*. Geol. Surv. of Canad., vol. IV, part. II, pag. 174, tav. 14. hgg. 10 e 10a) per l'aspetto generale, per il numero e disposizione dei setti e specialmente per la struttura anatomica interna.

Finalmente non è difficile riconoscere notevoli differenze pure con l'incerta forma del d'Orbigny (*Paléont. de l'Amerique mérid.*, pag. 56, tav. 6, figg. 4 e 5) dallo stesso denominata prima *Turbinolia striata* e poi *Cyathoxonia striata* (*Prod.* I, pag. 158) e che proviene da Yarbichambi nella Bolivia.

Località. — Itahituba lungo il Rio Tabajos, Pará, Brasile.

Valore cronologico. — Con moltissima probabilità la nuova forma appartiene al sistema carbonifero. Eccone le ragioni:

1. Ad Itahituba è conosciuto il Carbonifero ed i fossili sono silicei come il nostro in istudio.

2. Le specie europee che presentano le maggiori somiglianze col *Cl. Thildae* sono:

*Cl. turbinatum* (fungites),  
" *squamosum*,  
" *cinctum*.

Tutte vissero nel Carbonifero, la prima si conosce nel Belgio (Visé) e nell'Inghilterra (Oswestry, Welington, etc.) e le altre due furono descritte sopra esemplari del Carbonifero dei Monti Urali.

Le più conosciute specie americane del genere *Clisiophyllum* sono:

|                      |                          |
|----------------------|--------------------------|
| <i>Cl. teres</i> ,   | <i>Cl. (?) striata</i> , |
| " <i>Billingsi</i> , | " <i>Danaanum</i> .      |

Anche queste sono tutte del Carbonifero americano meno l'ultima, essendo stata questa raccolta nel Siluriano superiore del Tennessee (Perry County) negli Stati Uniti.

Laonde tutto porterebbe a ritenere che la nuova forma sia carbonifera.

Tipo. — L'unico esemplare che rappresenta la specie si conserva nel Museu Paulista di S. Paulo nel Brasile.

Geologia. — *Contribuzioni allo studio dei Cimini*. Nota del prof. LIBERTO FANTAPPIÈ, presentata dal Socio STRUEVER.

## II. Sul Peperino.

Faccio seguito alla mia precedente Nota (*Profili strutturali*) colla quale ho iniziato queste *Contribuzioni*.

Il Peperino porta nel nome stesso una causa di equivoci; perchè vengono con tale nome indicate in varî luoghi della zona vulcanica Tirrena diverse rocce in base alla sola apparenza esterna, dovuta soprattutto alla punteggiatura nera che vi porta specialmente la mica. Non è però il caso di far qui una questione di nomenclatura litologica.

La questione importante che si agita ormai da circa un secolo è quella che riguarda i rapporti tettonici e genetici della roccia nell'insieme della formazione.

Il Brocchi <sup>(1)</sup> distingueva le rocce delle alture Cimini col nome di « lava necrolite a grandi feldspati » ed il Peperino dei cavatori col nome di « lava necrolite a piccoli feldspati » considerandole come due « varietà » di rocce « analoghe a quelle della Manziana, della Tolfa e del Monte Amiata » <sup>(2)</sup>.

Egli aveva inoltre portato un notevole contributo in riguardo ai rapporti di giacitura di queste rocce notando nella « necrolite a piccoli feldspati » (v. da pag. 169 a 174 del *Catalogo ragionato*) alcuni inclusi che egli riferiva alla roccia « a grandi feldspati » e dichiarando quella esplicitamente (pag. 174 di tale opera) come *posteriore* a quest'altra.

Questo accenno aveva richiamato la mia attenzione fin dal 1895 benchè io conoscessi l'opinione del Verri <sup>(3)</sup> il quale considerava la roccia come « tufo trachitico » sottostante alla roccia delle alture.

D'altra parte non si può negare che vi sono numerose apparenze che militano per quest'ultima opinione: ed io dovetti poi anche accogliere il dubbio

(1) *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce* ecc. Milano 1817.

(2) Fu poi per rilevare la differenza di queste sue « varietà » specialmente col Peperino dei colli Albani, che egli non volle seguire il Santi (il quale aveva chiamato « peperino » la roccia del Monte Amiata) ed adottò il nome di *necrolite* (v. « *Catalogo ragionato* », pag. 156) che è la grecizzazione del nome « sassomorto » usato come sinonimo di « Peperino » al Monte Amiata: nome che egli dichiarò inutile tre anni dopo (*Dello stato fisico del suolo di Roma*, 1820, Roma. V. pag. 204) quando seppe che in Francia si era dato a simili rocce il nome di *trachite*.

(3) *I vulcani Cimini*. R. Accad. dei Lincei, Cl. di sc. fis. matem. e natur. serie 3<sup>a</sup>, vol. III, 1880.

che non fosse troppo sicura per il Brocchi l'identificazione della roccia delle alture coi mezzi dei quali egli allora disponeva. Disgraziatamente anch'io ho potuto procurarmi i mezzi di indagine solo stentatamente ed a furia di lunghi ritardi: e nella grande varietà degli inclusi ho dovuto per lungo tempo cercare che mi capitassero quelli che permettevano di controllare le osservazioni del Brocchi in modo sicuro.

Intanto per bene impostare la questione sulla roccia, occorre prenderne in esame le condizioni speciali di giacitura ed i caratteri.

Questa roccia dunque, come ho già detto nella Nota precedente, forma un banco di notevole potenza, che raggiunge più o meno direttamente i materiali sedimentari circostanti alle alture, scendendo dolcemente dalle parti centrali dei Cimini propriamente detti verso la periferia.

Riposa spesso su argille plioceniche: come alla mattonaia di Falcioni e lungo il fosso Luparo (con notevoli caratteri) presso Viterbo, presso Orte, ed altri luoghi già noti. In qualche luogo, come al podere Ravicini ed all'Arcionello, presso Viterbo, riposa con leggera intercalazione di materiali argillosi, su un calcare fossilifero sul quale richiamai l'attenzione dell'illustre prof. C. De Stefani nell'occasione di una sua gita qua: consegnandogli per lo studio paleontologico l'abbondante raccolta da me fatta nelle due predette località.

Credo che non vi sia bisogno di dimostrare che non ha importanza per la questione del Peperino la discussione alla quale dette luogo il primo lavoro <sup>(1)</sup> di determinazione paleontologica nel quale l'illustre professore mi fece l'onore di associare al suo nome il mio. Non intendo però con questo di rinunziare a prendere la parola sugli argomenti di quella Nota in altra occasione: beninteso senza invadere la questione paleontologica che non mi riguarda, ed alla quale ormai portarono un ragguardevole contributo con esito risolutivo tanto il mio chiaro amico prof. dott. G. Di Stefano <sup>(2)</sup>, quanto, con un notevole lavoro posteriore <sup>(3)</sup>, lo stesso prof. C. De Stefani, che mi pregio di ringraziare qui per la cortesia usatami nel dedicarmi una nuova specie da lui trovata nel materiale suddetto.

Uno dei fatti più importanti in riguardo alla giacitura del peperino è poi la presenza di alcuni acciottolati di aspetto caotico che si intercalano tra il peperino e le argille sottostanti in più punti, specialmente nelle insenature (dico così per non confondere queste colle valli attualmente esistenti) dei monti ed in parti piuttosto prossime alle alture.

(1) C. De Stefani e L. Fantappiè, *I terreni terziari superiori dei dintorni di Viterbo*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, Cl. sc. fis. matem. e natur. vol. VIII, serie 5<sup>a</sup>, 1899.

(2) Dott. G. Di Stefano e ing. V. Sabatini, *Sopra un calcare pliocenico dei dintorni di Viterbo*. Boll. del R. Com. geolog. anno 1899, n. 4.

(3) C. De Stefani, *Molluschi pliocenici di Viterbo*. Atti della Soc. Tosc. di sc. naturali, Memorie, vol. XVIII, 3, 1901.

Uno di questi acciottolati si nota presso al ponte a ferro di cavallo sotto Bagnaia; un altro nel fosso presso Vitorchiano e se ne vedono di simili in varî altri punti.

Alquanto diversi da questi acciottolati, ma spesso in grande vicinanza, si osservano certi ammassi di frammenti rocciosi dei quali uno è sulla strada al di là del ponte suddetto presso Bagnaia; uno sopra al Mulino di fosso Luparo presso le falde della Pallanzana; un altro notevolissimo messo in vista a breve distanza dal precedente dai tagli operati nel fosso stesso per la condotta dell'acqua a Viterbo; e varî altri nei quali predominano frammenti e ciottoli di varia grossezza che si possono in gran parte riportare a rocce delle alture e in parte a varietà di Ciminite che sembrano aver subito l'influenza di contatti interni.

Nei fitti acciottolati del primo gruppo si vedono dei frammenti che ricordano le rocce più chiare e più esterne delle alture (questa somiglianza è notevolissima tra certi ciottoli sottostanti al peperino sotto Bagnaia e certe rocce già indicate dei fianchi del S. Valentino) misti ad altri che gradualmente passano ad una cristallizzazione così marcata che gli avvicina ai *proietti feldspatici* di tipo sanidnico: senza che manchino i frammenti scuri che attraverso ad alterazioni notevoli si rivelano come materiali affini alle Trachidoleriti del genere della Ciminite, ed ai quali poi si uniscono, tra altri materiali abbastanza varî, anche di quelli con deciso carattere di contatto, come certi blocchetti con granato ed idocrasio.

Ricordo qui che dei blocchetti simili, a granato ed idocrasio, si mostrano ora inclusi sporadicamente entro il peperino, ora in acciottolati di materiali abbastanza simili ai precedenti, sia nelle parti superiori, sia nelle parti inferiori del peperino stesso, e che finalmente altri blocchi a granato ed idocrasio del tutto simili ai precedenti si trovano anche sugli orli del recinto vicano presso Ronciglione: come notai in miei precedenti lavori <sup>(1)</sup>.

Seguendo poi il riposo del peperino sui materiali sedimentari sottostanti, dalla periferia verso le alture che si aggruppano intorno alla massa centrale Cimina, come ad es. lungo il fosso Luparo a partire dall'Arcionello salendo su poi per monte Pizzo verso la Pallanzana, si vedono le argille sottostanti al Peperino elevarsi di livello. Il fenomeno è stato posto in evidenza in quest'anno specialmente dai detti tagli per la condotta dell'acqua; ma si può osservare anche da Viterbo alle fornaci di Bagnaia, nelle cui argille, che si elevano ad una quota notevole tra il S. Valentino e Montecchio, si trovano poi dei gessi dovuti probabilmente ad effetti di emanazioni laterali.

<sup>(1)</sup> *Sopra alcuni blocchi a granato ed idocrasio nella regione Cimina.* Riv. di Min. e Cristallogr. Ital. vol. XX, 1898, Padova; *Minerali nuovi od in nuove condizioni di giacitura per la regione Cimina.* Riv. di Miner. e Cristallogr. Ital., vol. XXIII, 1899, Padova.

In unione ai precedenti fenomeni che riguardano soprattutto la genesi delle masse Cimine, se ne rende rimarchevole un altro che io ebbi occasione di notare fin dal 1893, quando mi recavo spesso ad un giacimento di sandini al pie' del S. Valentino, e che avvertii anche al distinto sig. Washington quando (nel 1897) mi fece l'onore di visitare la mia collezione privata. Questo fenomeno consiste nella presenza di piccoli lembi marnosi più o meno alterati nei punti ove vengono ad avvicinarsi le falde ripide di due alture come ad es. il S. Valentino colla Rocchetta. Questi lembi sono ricchi di ciottolotti e nuclei di varia sorta spesso fortemente arrossati.

L'importanza di tali lembi marnosi è grandissima pel fatto che la loro presenza a ridosso delle masse rocciose Cimine esclude i fenomeni di proiezione di una certa importanza ed è in appoggio di eruzioni pastose più o meno lente.

L'interesse di simili fatti poi aumenta quando si consideri che in certi punti, come quello già detto sopra al mulino del fosso Luparo <sup>(1)</sup>, i citati ammassi di frammenti di roccia delle alture tendono a rilevarsi verso le falde di queste mescolandosi con frammenti sedimentari: in modo da mostrare *un'intercalazione detritica* tra le ossature massicce delle alture ed il Peperino.

In riguardo ai caratteri litologici propri del Peperino oltre alle osservazioni in posto serve da splendido museo la pavimentazione delle strade di Viterbo nei giorni nei quali è ben rilavata dalle piogge: e durante i quali dà occasione di moltiplicare le osservazioni riguardo a certi caratteri molto significanti.

Questa roccia si presenta in generale sulle superficie di rottura con una massa ruvida formata in gran parte da feldspato ordinariamente allo stato di frammenti (come già rilevò il Brocchi) e con lamine di biotite relegati da una sostanza d'aspetto piuttosto terroso. Questo cemento dà generalmente alla massa un aspetto grigio giallastro, ma è rimarchevole il fatto che quando ci si avvicina verso le parti più denudate dei picchi delle alture ove appaiono le Trachi-andesiti rossigne anche il Peperino, specialmente nelle parti superiori, prende questa tinta, che va gradualmente dal giallo-rossastro al rosso vinato, in vari punti fino a far confondere a prima vista il Peperino colla suddetta roccia delle alture. Così ad es. è in una piccola cava a lato della via da Viterbo a Bagnaià presso il Parco Lante; così pure a monte Pizzo, poi sotto la Chiesuola alle falde della Pallanzana, ed altrove.

Ma la roccia è tutt'altro che uniforme: e vi sono numerosi caratteri che mostrano che essa ha risentito di variazioni dipendenti non solo dallo spazio, ma anche dal tempo.

(1) Però sulla sponda destra dalla parte dello sperone della Pallanza, mentre quell'altro indicato pei tagli della condotta dell'acqua è sulla sponda sinistra ed un poco più a monte.

Varia moltissimo di consistenza essendo questa di regola maggiore nel mezzo dei banchi e minore in basso ed in alto.

Nelle parti superiori di alcuni punti, e specialmente in quelli che raggiungono più o meno direttamente le falde del Cimino presenta un fenomeno interessantissimo, il quale si osserva in modo molto chiaro specialmente salendo per la strada vecchia di Soriano dietro il Parco Lante. Quando si è giunti sul ripiano peperinico presso al braccio del « Petrisco » che, come già dissi, ha scavalcato la Ciminite, allora in un fossetto si mostra sotto al Petrisco stesso, con una piccola intercalazione di tufo terroso, un Peperino molto tenero chiazzato da lenti chiare di materiali riccamente feldspatici molto simili a quelli della massa scoriacea più esterna delle alture: e continuando a salire per la stessa strada si raggiunge finalmente un lembo di Peperino decisamente terroso, fortemente caolinizzato, del tutto simile a quello che si trova dall'altra parte del Cimino poco sotto Soriano sulla strada che conduce a Viterbo. Anche nel ripiano che si stende dalla « Chiesuola » verso le falde del S. Valentino e delle altre alture soprastanti a Bagnaia si nota poi un ampio campo di Peperino arenaceo che mostra che la degradazione delle alture ha dato effetti alquanto diversi non solo per la diversità del materiale nei varî punti, ma anche pei diversi processi coi quali si è effettuata.

La grana della roccia poi presenta una variazione non del tutto accidentale: è più fina e di aspetto più terroso nei punti più lontani dalle alture; mentre in vicinanza di quelle, ed in genere sulle direzioni di più facile denudazione, si presenta a grossi e fitti frammenti cristallini, specialmente pei feldspati, ed assume perciò un carattere che ad occhio nudo ne rende non sempre facile la distinzione rispetto alla roccia delle alture.

In alcuni punti poi, ad es. in una cava al ponte dell' Elce presso Viterbo, la massa è intersecata da chiazze e vene quasi nere che includono piccole punteggiature feldspatiche. In altri punti, e sono ordinariamente quelli addossati alle falde delle alture, l'alternanza tra la massa grigia e le striature brune è così fitta che alla lontana dà alla roccia l'aspetto di uno *gneis*. Così è nel campione 1330 della mia collezione, preso nella suddetta località.

Finalmente danno una grande varietà di aspetti alla roccia gli inclusi che più o meno fitti vi si trovano sempre e sono di materiali sedimentari e vulcanici talvolta accumulati, con grande rammarico dei caveratori, in tale quantità da farla sembrare una breccia: *carattere questo che non si riscontra mai nella roccia delle alture.*

Gli inclusi di materiali sedimentari sono marne, calcari, arenarie, uniti a materiali varî di contatto come i blocchi a granato ed idocrasio: con dimensioni varie che vanno da una nocciola a quelli grossi come una testa circa; a contorni acuti od arrotondati, e soprattutto con varî gradi di alterazione, di solito non molto accentuati.

Notevole quelli che mostrano una rigatura ondulata dovuta ad alternanza di roccia ignea bruna con evidenti strati di roccia sedimentaria recante ancora minute brecciole malgrado la commistione e l'alterazione di contatto (che però in alcuni sembra abbastanza leggera) e che sembrano strappati a lembi periferici di contatto tra il focolaio interno e le formazioni incassanti. Così nel mio campione 1358 della cava di Arcionello presso Viterbo.

Non meno importanti quelli in cui i materiali di origine sedimentaria si mostrano arrossati in modo da somigliare dei pezzi di mattone accompagnati spesso da vene di roccia bruna, che sembrerebbe avvicinarsi a quelle di tipo piuttosto basico ma che ordinariamente si mostra altrettanto modificata quanto i materiali di origine sedimentaria.

La varietà aumenta negli inclusi di decisa indole vulcanica; ma predominano, tra tutti, quelli costituiti da rocce grige con varie graduazioni verso il bruno e con punteggiatura feldspatica più o meno fitta, le quali tanto all'aspetto esterno quanto al microscopio passano da caratteri che le avvicinano alle Trachi-andesiti ad altri che ricordano la Ciminite.

Vi sono poi abbondanti inclusi riferibili alle rocce delle alture: e specialmente dei grossi pezzi irregolari della parte grigia scoriacea già notata; ma non mancano i pezzi compatti tendenti al rosso più o meno accentuato ed appartenenti alle masse più interne come si osserva in un campione proveniente dalla Cava di Arcionello presso Viterbo, e che porta il n. 1356 della mia collezione.

Di notevole significato sono due forme di inclusi che rispetto a tutti gli altri assumono una speciale delineazione di caratteri.

Una di queste forme si fa notare sulle superficie di taglio della roccia coll'aspetto di lenti di color bruno, che in generale sono disposte parallelamente alla direzione di immersione dei banchi della roccia alla quale danno in certi punti una marcata somiglianza col « Piperno » di Pianura presso Napoli, come già fu rilevato dal vom Rath <sup>(1)</sup> e dal Washington <sup>(2)</sup>, benchè quest'aspetto « pipernoide », non implichi una grande somiglianza della massa costituente le due rocce. È notevole che sul taglio fresco della roccia in direzione parallela a queste macchie lenticolari la loro superficie mostra spesso un'alterazione un po' terrosa di materiali ferruginosi alla quale corrisponde forse la ricchezza dei silicati colorati in armonia coi caratteri dei materiali meno acidi della formazione.

Merita poi il più attento esame tra i caratteri della roccia la seconda forma delle dette inclusioni rappresentate da nuclei di roccia più o meno chiari che sulle superficie di taglio si mostrano contornate da un orlo bruno.

(1) *Geognostisch-mineralogische Fragmente aus Italien*, II Theil. Abdruck a. d. Zeitschr. d. Deutschen geologischen Gesellschaft, Jahrg. 1868.

(2) *Italian Petrological Sketches* II. Reprinted from the Journal of Geology, vol. IV, n. 7 october-november 1896.

Quest'orlo in alcuni punti somiglia molto il materiale delle già dette lenti brune, ma in generale si presenta come dovuto ad una elaborazione piuttosto accentuata di materiali che come le suddette lenti presentano delle affinità coi materiali basici che includono la Ciminite. Il nucleo interno di roccia chiara tende spesso al rossigno e si mostra costituito da una massa a feldspati bene sviluppati: la quale in generale richiama la costituzione dei ciottoli feldspatici già citati, e in qualche punto poi giunge ad una notevole somiglianza colla parte scoriacea della roccia delle alture.

Questi interessanti caratteri si osservano specialmente nei punti del banco peperinico più prossimi alle alture. Così nella cava del ponte dell'Elce presso Viterbo (es. il camp. n. 1332 della mia collezione privata): e nella cava sulla via di Bagnaia presso il villino Panatta (camp. n. 1333 della mia collez. priv.). Ricco soprattutto a questo riguardo si mostra il peperino della cava di monte Pizzo che si osserva in varie vie di Viterbo, ma che ora è raramente cavato.

Microscopicamente il Peperino fu studiato dal Mercalli <sup>(1)</sup> che lo indicò come una « Trachite andesitica quarzifera o dacite felsitica »; dal Deeche <sup>(2)</sup> che lo indicò come un andesite-micacea con pirosseno; e finalmente dal Washington <sup>(3)</sup> che lo indicò come un tufo.

Anche con una serie un po' estesa di sezioni sottili non vi è da aggiungere molto alle determinazioni dei materiali figurati della roccia stessa: dopo che è stata giustamente esclusa dal Washington la presenza del quarzo come costituente. Questi materiali l'avvicinano in modo evidente alle Trachi-andesiti delle alture *per la costituzione mineralogica*, e più specialmente alla roccia grigia scoriacea a grossi sanidini delle parti esterne.

Però vale la pena di mettere in rilievo certi caratteri della sua costituzione complessiva che forse per la loro apparente accidentalità non sono stati abbastanza apprezzati. Uno è quello che riguarda i nuclei orlati e le affinità che quest'orlo bruno mostra in genere colle masse più basiche della formazione in qualche punto ove è più esteso e meno alterato; poi viene il carattere frammentario dei costituenti del Peperino, già rilevato dal Washington; finalmente il carattere del magma predominante. Tutti questi caratteri sono specialmente importanti in confronto con quelli delle rocce delle alture.

Riguardo al carattere frammentario dei costituenti, riconosciute pei feldspati già macroscopicamente dal Brocchi, si deve riconoscere al Washington il merito di averlo messo in evidenza collo studio microscopico. Si può aggiungere che malgrado la difficoltà di distinguere effettivamente tra il caso

<sup>(1)</sup> *Osservazioni petrografico-geologiche sui vulcani Cimini*. Rend. del R. Istit. Lombardo, serie II, vol. XXII, fasc. III, 1889, Milano.

<sup>(2)</sup> *Bemerkungen zur Entstehungsgeschichte und Gesteinskunde der Monti Cimini*. N. Jahrbuch f. Mineralogie, etc. Beilageband VI, Stuttgart 1889.

<sup>(3)</sup> Loc. cit.

di una frammentazione di *origine esplosiva* e quello di una fratturazione di *origine meccanica* più propriamente detta, tuttavia l'aspetto dei frammenti, specialmente dei pirosseni e delle miche, che si mostrano spesso contorti e corrosi, è tale da far propendere per l'idea della fratturazione meccanica.

Il magma poi in generale non solo si differenzia notevolmente da quello delle alture che è di tipo prevalentemente felsitico, ma merita di essere anche analizzato nella sua frequente apparenza fluidale. Intanto a nicol incrociati colpisce spesso per le sue plaghe nere d'aspetto decisamente colloide ove mancano anche le più minute individualizzazioni microlitiche; ma poi colpisce anche l'aspetto che corrisponde a tali plaghe in luce naturale. Infatti vi abbondano le punteggiature brune dovute specialmente a materiali opachi e l'apparenza fluidale invece che dalle microliti è frequentemente data da macchie terrose di materiali fini sospesi nella massa, che nell'insieme mostra che quest'apparenza fluidale può essere in gran parte dovuta a rilegature di origine secondaria. Interpretazione questa largamente appoggiata anche dall'esistenza di abbondanti vene macroscopiche di *Jalite* e *Fiorite* in vari punti della massa del Peperino. Anche il Quarzo indicato nelle prime ricerche del Mercalli, potrebbe essere stato occasionalmente presente come prodotto di origine secondaria, od allo stato di frammenti inclusi accidentalmente, come fu da me altra volta indicato tanto pel Peperino quanto per le Trachandesiti delle alture.

**Zoologia.** — *Sulla presenza e distribuzione del genere Anopheles in alcune regioni della penisola Iberica, e suoi rapporti col parassita della malaria umana.* Nota del dott. GUSTAVO PITTALUGA, presentata dal Socio B. GRASSI.

Dall'agosto al dicembre del 1902 ho compiuto, specialmente in Catalogna, una serie di ricerche sulle manifestazioni locali della infezione malarica, delle quali rendo conto in un'altra Nota. Contemporaneamente, ho avuto modo di raccogliere i dati relativi alla presenza e diffusione delle zanzare del genere *Anopheles*, non solo nel territorio della provincia di Barcellona, ma anche in quelli di Valenza, di Madrid, di Guadalajara, e nelle isole Baleari.

Queste osservazioni personali sono state continuate, in parte, durante i mesi scorsi del 1903; e se ad esse si aggiungono i dati fornitimi da medici e naturalisti spagnuoli, appunto in cotesti periodi di tempo (1), si può dire

(1) Voglio cogliere questa occasione per ricordare e ringraziare il prof. Odon de Buen, zoologo dell'Università di Barcellona, che mi ospitò per qualche tempo nel suo gabinetto; il dottor Turrò della Academia de Ciencias medicas de Cataluña, che mi fu largo di tanta cortesia; ed altri molti ai quali debbo notizie, aiuti e cooperazione.

che noi possediamo oggi una nozione generale sui rapporti fra la malaria umana e il genere *Anopheles* nella penisola iberica, la quale conferma interamente i concetti etiologici ed epidemiologici sostenuti per primo da Grassi in Italia.

Debbo qui ricordare come nel 1899, il dottor I. Macdonald, medico della Compagnia mineraria di Rio Tinto (provincia di Huelva) in seguito alle scoperte sul ciclo evolutivo degli emosporidi della malaria, abbia cercato per il primo, in Ispagna, cotesti rapporti fra l'endemia e l'infezione (nella parete intestinale e nelle ghiandole salivari) degli *Anopheles*. I risultati delle sue osservazioni comparvero successivamente sul Siglo medico di Madrid, e sul British Medical Journal <sup>(1)</sup>; e furono poi riuniti in monografia (Parigi, 1902). Recentemente, al Congresso internazionale di Medicina di Madrid, ebbi grata occasione di osservare i preparati del dottor Macdonald e di avere da lui stesso altre informazioni.

Il suo campo di studio era limitato a quella zona di aridi terreni metalliferi nell'alto, acquitrinosi a valle, compresa fra le mine di rame del Rio Tinto a nord d'Huelva, e gli sbocchi dell'Odriel e del Rio Piedras al mare.

Nei limiti di questo territorio furono osservate poche località indenni da infezione malarica, fra le quali si ricorda particolarmente la *Playa de Punta Umbria*, dove le poche case si trovano in terreno arenoso e sembra che tutte le acque siano molto salate. È singolare, tuttavia, che a pochi chilometri (non più di quattro o cinque) da questa striscia di spiaggia, si trovino luoghi gravemente colpiti dall'infezione, come in generale le case e le capanne circostanti alla così detta *marisma d'Almacete* ed anche le vicine stazioni di *carabineros* (finanzieri).

Ad ogni modo, Macdonald ha trovato in questa e nelle poche altre località non malariche endemicamente, varie specie di *Culex*; precisamente:

1. *Culex pipiens*;
2. " *elegans*;
3. " *phytophagus*;
4. " *spathipalpis*;
5. " *penicillaris*.

Invece, in tutte le località colpite dalla infezione (sempre dentro i limiti sopradetti della provincia di Huelva), ha trovato:

1. *Anopheles claviger* (*maculipennis*);
2. " *pictus* (*pseudopictus*, Grassi).

Durante le stagioni malariche 1901 e 1902 egli ha cercato di stabilire, almeno in piccole zone, la percentuale di *Anopheles* infetti nella parete inte-

<sup>(1)</sup> Siglo Medico 1900, pag. 437 e 449: *Investigaciones modernas sobre el paludismo*; ibid. 1902, 3 agosto, pag. 483. Brit. Med. Jour., 1900, I, pag. 270, e sez.

stinale e nelle ghiandole salivari; i suoi dati non differiscono a questo proposito da quelli stabiliti in Italia *nelle regioni meridionali e in rapporto con le infezioni estivo-autunnali* (dominanti, con gravi forme perniciose, di Huelva); ma debbo qui mettere in rilievo che, contrariamente a quanto trovarono alcuni ricercatori (per esempio il Testi in Italia, Grosseto 1901), Macdonald trovò rare volte i corpi di Ross negli *Anopheles*. Non gli parve possibile metterli in rapporto con fatti epidemiologici.

All'infuori delle osservazioni di questo autore, non si avevano che dati negativi, sulla coincidenza fra la distribuzione dei Culicidi in generale, degli *Anopheles* in ispecie, e la distribuzione della malaria umana, nella penisola iberica.

Malgrado che i buoni lavori dottrinali di Gil y Morte, professore all'Università di Valenza <sup>(1)</sup>, e di Rioja y Martin, professore in quella di Oviedo <sup>(2)</sup>, avessero valso a diffondere in Ispagna la conoscenza di nuovi concetti etologici della infezione malarica, si ebbero solo, durante gli anni 1901-1902, tentativi di obiezioni, in parte anche fondate su pretese osservazioni. Tali quelle di Gonzalez Rey <sup>(3)</sup> di Pascual de Sande <sup>(4)</sup>, di Sarmento <sup>(5)</sup> etc., in parte radunate e commentate da Rodriguez Mendez <sup>(6)</sup>. Io ho ad esse risposto, in varî punti del volume pubblicato nell'occasione del XIV Congresso Internazionale di Medicina *Investigaciones y estudios sobre el Paludismo en España*, soprattutto con dati di fatto.

Così, per esempio, mentre il dottor Pascual de Sande, sul *Medico titular* (loc. cit.) aveva asserito di aver accertata la mancanza di larve e di adulti del genere *Anopheles* nei territorî paludici del Rio Jarama (Moraleja ecc.), io ho invece trovato moltissimi *Anopheles* (anche infetti) appunto lungo le rive di questo fiume, in provincia di Madrid.

Nel 1901 furono raccolti dai dottori Huertas e Mendoza i dati relativi alla provincia di Cáceres (Estremadura). Questi autori rinvennero abbondantissime le specie: *Anopheles claviger* (soprattutto), *A. pseudopictus* e *A. superpictus*, osservarono l'infezione in numerosi esemplari di quella prima, e condussero anche a termine un piccolo esperimento di profilassi meccanica, abbastanza dimostrativo, di cui si dà conto nel volume sopra citato <sup>(7)</sup>.

Dopo di queste non mi resta che a ricordare alcune ricerche di Betten-

(1) *El paludismo*, Valencia, tipogr. del Mercantil valenciano, 1900.

(2) *Conoscimento del Ciclo evolutivo completo de los parásitos que originan en le hombre las Umadas fiebres paludicas*. Discurso inaugural, Oviedo, 1902.

(3) Rivista medica di Levilla, 30 gennaio 1900.

(4) *El medico titular*, settembre 1902.

(5) *A medicina contemporanea*, Lisboa, 20 e 27 gennaio 1901.

(6) Gaceta medica Catala a, 30 sett.-31 dicembre 1902; soprattutto v. pag. 751.

(7) *El paludismo y su prophylaxis en la provincia de Cáceres*, 1902.

court Ferreira in Portogallo <sup>(1)</sup>; non mi consta che sieno state pubblicate da altri osservazioni positive in altre regioni.

Le mie ricerche personali si svolsero dapprima nel territorio del basso-piano del Llobregat, fiume che sbocca a circa 20 chilometri di distanza a sud di Barcellona. Il delta di questo fiume si distende per oltre quindici chilometri dalle falde argillose di un terreno quaternario, che domina in tutta l'alta vallata, e forma i bordi del letto fluviale. I paesi di Prat de Llobregat, Cornellà, Viladecans, Gavà, Castelldefels, soprattutto, situati nel piano, sono notevolmente malarici.

Le condizioni idrografiche di questo territorio sono tipiche dei luoghi palustri. Verso il mare, stagni di notevole grandezza, con acque tuttavia dolci, permettono ancora la vita e lo sviluppo degli stadi larvali del genere *Anopheles*. Ma soprattutto questi si sviluppano nei paludelli e fossati che innumerevoli s'incontrano al disotto della strada ferrata da Barcellona a Valenza.

Durante il mese di agosto le larve di *Anopheles* erano numerosissime in tutte le acque superficiali; diminuirono di molto nel mese di settembre: ma se ne trovavano di nuovo molte in ottobre. In seguito la diminuzione fu rapida: tuttavia si trovarono larve ancora nel novembre, non mai però nelle acque più alte, sempre nelle piccole raccolte foveali, ecc.

Nelle vicinanze delle case (per esempio a Castelldefels dove ho avuto campo di compiere una più accurata indagine per la cortese ospitalità del sig. Molinari, direttore di una fabbrica di materiali da costruzione), ho veduto spesso volte larve di *Culex* e larve di *Anopheles* nelle medesime raccolte d'acque, specialmente in piccole pozze, in tinozze e barili ripieni di acqua piovana.

L'*Anopheles claviger* è di gran lunga il più importante per ciò che riguarda la trasmissione della malaria umana, soprattutto perchè abita quasi sempre in contatto con l'uomo. Ma io ho trovato *A. pseudopictus* e *A. bifurcatus* nelle medesime località. Perciò che si riferisce, appunto, alle condizioni dell'*habitat*, si confermano interamente le osservazioni tanto minuziose di Grassi, quelle di Ficalbi e di altri.

Nel paese di Prat de Llobregat abbondano straordinariamente i *Culex*; al contrario scarseggiano molto gli *Anopheles*. Nella casa del medico del paese, dottor Salgot, fu trovato nel mese di agosto un solo esemplare di *Claviger*. Invece nelle case di campagna, pur non molto lontane, a un chilometro dal paese sono già abbondantissimi gli *Anopheles*. Questo fatto sembra dimostrare ancora una volta che gli *Anopheles* si allontanano di poco dai loro focolari di origine. A questo proposito ricordo che il 27 settembre (1902) essendo disceso da quel sobborgo di Barcellona che si chiama la Bordetta, lungo il ramo finale del canale della infantia Carlotta, ho voluto esaminare

(1) *Sezoes ou malaria* (A Medicina contemporanea, Lisboa, numero 24-28, 1902).

le poche case disseminate lungo le falde del Montjuich sino al cimitero, per cogliere i limiti di diffusione e di elevazione degli *Anopheles* e determinare se fosse possibile e facile la loro entrata in città da cotesta parte.

Gettando un'occhiata sulla cartina da me disegnata che rappresenta il Delta del fiume Llobregat, e che accompagna il volume già citato, si vede bene come la roccia del Montjuich costituisca un notevole ostacolo frapposto tra la città di Barcellona e il piano malarico, che si distende a sud per oltre 25 chilometri. La costa del Montjuich è ripida e scoscesa e mancante di case abitate. In quelle poche che circondano il cimitero erano scarsissimi gli *Anopheles* e gli abitanti assicuravano che le zanzare non vi cagionano mai grande molestia. È molto probabile che a ciò contribuisca il gran vento di aperto mare che batte assai di frequente contro coteste pareti del monte e per cui gli *Anopheles* non si sollevano e non si allontanano dai luoghi di loro diretta origine, nel piano irriguo pur non molto distante.

Quando si consideri adunque che malgrado la poca elevazione del Montjuich esso costituisce una barriera che gli *Anopheles* non superano (per il vento; perchè mancano le abitazioni e quindi le tappe ed il cibo; perchè le falde sono scoscese e rocciose), quando si aggiunga che la via del mare, verso il porto di Barcellona, è strettissima e frequentata soltanto dai cortei funebri fra la città e il cimitero; non rimane aperta agli *Anopheles* della campagna di Llobregat che la via ad ovest, per il sobborgo di Sans, per introdurre in Barcellona qualche infezione presa di fuori.

La qual cosa avviene certo con molta frequenza poichè di lì entrano i carri che hanno percorso la strada di Castell de Fels e del Prat, ripetendosi il fatto tante volte osservato sulle vie che da Ostia, da Fiumicino, da Ponte Galera, da Castel Giubileo ecc. convergono alle porte di Roma.

Del resto debbo dire senz'altro che anche nell'interno della città di Barcellona non mancano focolari, forse transitori, di *Anopheles*. Durante l'estate quasi tutti i quartieri della città sono invasi da *Culex* (*Pipiens*); non solo i più bassi lungo la così detta Rambla (corso) ma anche la parte nuova (ensanche). Quando ebbi notizia della esistenza di vere febbri malariche nei sobborghi e anche nei quartieri della città, rivolsi appunto le mie ricerche alla determinazione di cotesti focolai. Con l'aiuto del personale addetto alla cattedra di storia naturale del prof. Odon de Buen, che mi è doveroso ricordare e ringraziare, trovai a più riprese le larve degli *Anopheles* in alcune acque mal rinnovate del parco e giardino zoologico, situato a nord della città (agosto e settembre); più tardi anche in una vasca del giardino botanico annesso all'edificio della Università.

Pochi *Anopheles* adulti mi furono portati, frammisti con molti *Culex* dall'orto di una villa del sobborgo della Buonanova (calle Ganduxser, n. 131). Alcune femmine ibernanti furono trovate in seguito negli edifici militari prossimi al parco.

Mi resta a dire brevemente della infezione degli *Anopheles* osservata in Castell de Fels. Un esame sistematico delle femmine (*claviger*) raccolte nelle abitazioni, fu eseguito solamente in Castell de Fels, che deve ritenersi d'altra parte, come il punto più malarico di tutta la costa.

Dal 20 di agosto al 30 di settembre il corso della infezione degli *Anopheles* fu in proporzione discendente <sup>(1)</sup>. Faccio notare subito che i 200 operai della fabbrica già ricordata, del sig. Molinari, i quali costituivano, insieme con pochi impiegati della stazione ferroviaria, la totalità degli abitanti di quella contrada, erano contemporaneamente sottoposti a una cura non metodica, ma tuttavia efficace per diminuire il numero dei parassiti e lo sviluppo delle loro forme sessuate nel sangue. Alla fine di agosto incontravamo sopra 30 o 40 esaminati un *Anopheles* infetto nel tubo dirigente, il che costituisce ancora una proporzione molto considerevole e di sufficiente potenzialità epidemica. Durante il mese di settembre diminuirono molto i *Claviger* nell'interno delle abitazioni, e diminuì anche la proporzione degli infetti. In seguito a piogge abbondanti e nei giorni che seguirono a una prima inondazione del fiume Llobregat <sup>(2)</sup> i *claviger* comparvero numerosi nelle case (in qualche luogo il fatto fu notato come una vera invasione), e le femmine accompagnate da qualche maschio. Evidentemente gli agenti meteorici determinavano l'inizio del periodo di ibernazione.

In quel medesimo periodo scoppiarono molte recidive. Ora io mi domandava se cotesti fenomeni meteorici non potessero avere indirettamente una certa efficacia per la ulteriore ripresa di brevi periodi epidemici di vere infezioni primitive. Alla fine di ottobre e poi nel novembre feci a questo proposito l'esame delle glandole salivari di molti *Anopheles* trovati nelle condizioni suddette in una delle case dove avevano dormito persone con febbri recidive. Questo esame diretto, a fresco, per la ricerca degli sporozoi nelle ghiandole salivari, rappresenta per così dire un semplice metodo clinico i cui risultati spesse volte dubbiosi e difficili da interpretare mal servirebbero per una statistica, ma possono essere utili per avere appunto qualche dato sull'inizio delle nuove possibili infezioni primitive. Verso la fine di novembre io trovai realmente alcuni di cotesti *claviger* infetti nelle glandole salivari.

Sebbene sia mancata in questo caso la ulteriore determinazione di un rapporto diretto fra questa infezione degli *Anopheles* e lo scoppio di febbri primitive, tuttavia quel dato rimane a stabilire la possibilità di questo fatto e la relativa importanza dei fattori meteorologici a cui abbiamo accennato poc'anzi.

(<sup>1</sup>) Parlo qui della presenza di Amfionti nella tunica dell'intestino e non della infezione delle glandole salivari. Non descrivo i metodi che sono quelli adottati da Grassi (Vedi *Studi di uno zoologo sulla malaria*, seconda edizione, 1902).

(<sup>2</sup>) Nel mese di ottobre; poichè nel dicembre se n'ebbe una maggiore, alla quale si riferiscono le figure a pag. 135 e seg. del volume già citato sul *Padudismo in Spagna*.

In Sampedor, paese del distretto di Manresa, appartenente ancora alla provincia di Barcellona, alto 450 metri sul livello del mare, e luogo di lieve malaria endemica, si sviluppò, durante i mesi estivi del 1902, una grave epidemia tifica e malarica insieme. Questo caso di Sampedor diede luogo a discussioni e polemiche locali dipendenti appunto dalla interpretazione di questi fatti epidemiologici e delle loro cause. Io, recatomi sul luogo, ebbi a constatare che le condizioni idrografiche del territorio di Sampedor, e in particolare lo stato delle acque superficiali nelle immediate vicinanze del paese, permettevano assai bene lo sviluppo delle larve dei *Culicidi* in genere, e degli *Anofeli* in ispecie. Trovai inoltre, nel mese di novembre, parecchi esemplari di *claviger* in alcune case del paese, e nelle sue vicinanze anche di *bifurcatus* (27 novembre).

Numerose ricerche furono fatte, durante la prima metà di ottobre, da me e dal dott. Pijoan nella provincia di Valenza, precisamente nei paesi di Carcagente, Tabernes de Valldigna, Gandia, Cullera, Favaretta, e nei villaggi situati intorno alla grande laguna detta *Albufera*, cioè il Palmar, Catarroja, Silla, Sollana, Alfafar ecc. Dappertutto trovammo i *claviger* molto abbondanti nelle case e nelle stalle. Debbo qui ricordare che in alcune gite compiute insieme col prof. Eduardo Boschà, zoologo della università di Valenza, trovammo esemplari di *claviger* i quali, sebbene non presentassero caratteri differenziali rilevanti, tuttavia raggiungevano dimensioni molto superiori a quelle medie della specie (11-11½ millimetri con la tromba), ed avevano le macchie dalle ali più intensamente segnate.

La macchia intermedia, sulle venule trasverse, appariva *sempre* completamente biloba.

Nel villaggio del Palmar, molto malarico, caratteristico perchè interamente costruito di capanne sopra una rete di canali presso la *Albufera*, si trovarono *Culex spathipalpis* ed anche parecchi *Culex malariae* (sinonimo *Culex vexans*). Sembra che i *pipiens* vi manchino affatto.

Tutto l'esteso territorio tra la *Albufera* al nord, il fiume Jucar, e al sud, sino verso Gandia, è occupato da risaie. Le notizie storiche che si hanno da un lato intorno alle condizioni della malaria locale, da un altro lato intorno alla coltivazione del riso in questa regione, tendono a dimostrare che dacchè quest'ultima ha preso un grande sviluppo, l'intensità della infezione malarica è diminuita alquanto <sup>(1)</sup>. Ebbi a questo riguardo anche notizie e dati personali dal dott. Luigi Comenge, Direttore dell'ufficio d'igiene di Barcellona. Tuttavia io faccio rilevare che le condizioni di insalubrità per malaria sono ancora tali, in tutto cotesto territorio, da non

(1) In una *Topografia medica de Valencia y su zona* edita nel 1879, il dott. Giovanni Battista Peset y Vidal fornisce dati a questo riguardo molto importanti, relativi anche alla limitrofa provincia di Castellon de la Plana.

permetterci di indurre che la coltivazione del riso costituisca un beneficio per la salute pubblica. E d'altra parte gli stati larvali degli *Anopheles*, nelle acque delle risaie sono stati trovati da me in questi luoghi, come in Italia ed altrove.

*Anopheles, claviger* e *bifurcatus* adulti furono pure trovati, durante la prima settimana di ottobre in quantità considerevole nella stazione di Almenara (provincia di Castellon della Plana, ferrovia da Valenza a Barcellona), e in molte case di Cihilches, ed altri luoghi della costa.

Poco più tardi ebbi occasione di recarmi, da Madrid, a compiere alcune osservazioni nella prossimità di S. Fernando, sul fiume Jarama, che attraversa la strada ferrata al km. 19-20.

Insieme con lo studente di scienze naturali D. Luis Lozano, in due case nella prossimità del fiume, circa un chilometro al di sotto della stazione ferroviaria (figg. 8 e 9) ho catturato, in giorni differenti, un gran numero di *claviger* (i quali parevano però già disposti per la ibernazione). Le due case erano situate l'una proprio all'altezza della sponda del fiume, a 20 metri da questo, circondata di pozze d'acqua molto abbondanti; l'altra, invece, sulla costa, che sale ripida per un trenta metri d'altezza; ed è degno di osservazione che gli *Anopheles* erano molto più abbondanti in questa seconda che nella prima, nella quale dormiva tutta una famiglia. Di questa famiglia era ammalata di febbri, a forma terzanaria, la moglie del colono (l'esame del sangue fu poi praticato a Madrid: negativo?); anche un bambino aveva avuto febbri intense e prolungate durante il mese di settembre. Degli *Anopheles* raccolti fu fatto l'esame, in più volte, nell'Ospedale generale di Madrid (reparto del dott. Huertas, e laboratorio diretto dal dott. A. Mendoza); soltanto uno fu trovato infetto nelle ghiandole salivari (18 ottobre), nessuno nella tunica dell'intestino medio.

Osservazioni di qualche interesse ebbi pure occasione di compiere nell'isola di Mallorca (Baleari), durante il mese di settembre 1902 (1).

Si debbono al dott. Fajarnés (2) alcune precedenti osservazioni sui parassiti malarici in infermi delle vicinanze di Palma, capitale dell'isola. Ma che

(1) Per ciò che riguarda i dati storici sulle condizioni della malaria nelle Baleari, mi preme di ricordare qui solamente un libretto di Claudio Francesco Passerat de la Chapelle, medico dell'esercito francese (1764), tradotto da poco allo spagnuolo: *Reflexiones generales sobre la isla de Menorca, su clima, el genro de vida de sus habitantes y las enfermedades que en ella reinan* per el doct. etc., traduccion. Maon, 1901, nel quale sono contenute molte osservazioni veramente interessanti.

Un'opera egualmente degna di essere tenuta in gran conto è quella di George Cle-gorn: *Observations on the epidemical diaeases in Menorca, from the year 1744, to 1749*. London, 1753.

(2) *Notas sobre el micro-organismo de la malaria*, in: Rev. balear de ciencias medicas, Palma 1890, pp. 236-238 etc.

io sappia, nessuno aveva compiuto la ricerca degli *Anopheles* e osservato i loro rapporti con la distribuzione della malaria nell'isola.

Tanto nei luoghi visitati lungo la costa ai due lati di Palma e sulla strada di Felanitx sopra un terreno quaternario che si continua oltre i cinque o sei chilometri con una grande estensione di miocene superiore e medio, interrotto da striscie di alluvione recente che discendono sino al mare (villaggio di San Giorgio, torrente de Jueus, Ca' Republicans), quanto nel territorio di Alcudia e della Albufera al nord dell'isola, io constatai la presenza del genere *Anopheles*, catturai numerosissimi esemplari di *claviger* ed alcuni di *bifurcatus*, ebbi modo infine di confermare per la maggior parte i dati relativi all'*habitat* delle larve e degli adulti dei due generi *Anopheles* e *Culex*. A proposito della specie *bifurcatus* debbo dire che i pochi esemplari esaminati (adulti), si avvicinavano moltissimo, per i caratteri delle ali e per la dimensione, alla varietà descritta dai Sergent in Algeria, e da essi classificata come « bona species » sotto il nome di *Anopheles algeriensis* <sup>(1)</sup>. In realtà gli stessi Sergent ammettono che i caratteri distintivi siano molto lievi; aggiungono anzi che l'*Anopheles algeriensis* può considerarsi come la forma vicariante dell'*Anopheles bifurcatus* in Algeria. Essi fanno rilevare che i *bifurcatus* incontrati in Algeria (*A. algeriensis*) sono più corti dei parigini; ma questo carattere non ha grande importanza perchè le cifre relative a quei primi non si discostano dai limiti minimi della specie; piuttosto possono riferirsi alla varietà *nigripes*, o a quelle *forme intermedie* a cui già accennava Grassi, a pag. 118 della seconda edizione degli *Studi di uno zoologo sulla malaria*.

I caratteri riguardanti le nervature trasversali anteriori e posteriori, addotti dai fratelli Sergent, non costituiscono dati sufficienti neppure per una varietà, nonchè per una specie.

I soli caratteri che sembrano discostarsi alquanto da quelli fissi della specie *bifurcatus*, sono quelli relativi alle setole mediane e angolari delle larve, giacchè i Sergent hanno osservato tre volte sopra 46 coteste setole munite di ramuscoli o peluzzi. Questa proporzione non è sufficiente a stabilire il carattere con assoluta certezza. Noto che Grassi e Noè scrivevano a pag. 118 dell'opera citata: « le larve (di *bifurcatus*) si distinguono dalle altre per l'assoluta mancanza di ramuscoli sulle setole angolari, le quali sono perciò affatto semplici; setole mediali affatto semplici. Anomalmente tanto le une quanto le altre possono essere biforcate; anche in questo caso però le setole sono affatto sprovviste di ramuscoli o peluzzi ».

Io non mi credo in alcun modo autorizzato a interpretare i pochi caratteri differenziali dei *bifurcatus* adulti incontrati nell'isola di Mallorca, come sufficienti alla determinazione di una specie, sebbene corrispondano interamente

(1) Annales de l'Institut Pasteur, 1902; e gennaio 1903.

a quelli descritti per l'*Anopheles algeriensis*. Ritengo invece che possa trattarsi di varietà intermedia fra il *bifurcatus* e il *nigripes*, da cui secondo Staeger (1839) era venuto il nome a tutta la specie, appunto perchè molto frequente.

In complesso, considerando bene i caratteri delle specie degli *Anopheles* propri della penisola iberica, si vede come essi non possano contribuire a quelle minuziose distinzioni di specie che hanno dato il modo a Theobald di arricchire smisuratamente la terminologia tassinomica. Non mi trattengo intorno a questo argomento perchè già il Bordi <sup>(1)</sup>, ed altri commentarono e criticarono le conclusioni di cotesto autore.

Restano come specie sicure della penisola iberica le quattro che da Ficabi e da Grassi furono tanto esattamente descritte in Italia, e cioè *Anopheles pseudopictus*, *A. superpictus*, *A. claviger*, *A. bifurcatus*.

Debbo rilevare infine, che nella penisola iberica si trova il genere *Aedes*, il quale nè da Grassi, nè da Ficalbi, è stato trovato in Italia.

**Patologia.** — *Chiluria da filaria sanguinis hominis nocturna in Europa*. Nota del dott. D. BIONDI, presentata dal Socio TODARO.

Ho potuto fare tale osservazione di malattia tropicale su di un giovane ventenne nativo di Gibilterra e dimorante a Siena da poco meno di un anno. La malattia si iniziò cinque mesi or sono in mezzo al più completo benessere, senza febbre, e senz'altro disturbo, che urina chilosa, dimagrimento e fame. Col dosaggio, si è determinato che la quantità di grasso perduta con le urine è soprattutto abbondante dopo i pasti e varia con le alimentazioni.

Ho potuto constatare solo di notte, mentre l'ammalato riposa, le larve nel sangue periferico, donde sono ingerite da speciali zanzare che possono propagare la malattia. La malattia è nota nei tropici e l'osservazione in individuo derivante da un paese, che si trova allo stesso grado di latitudine della Sicilia e dove non esiste il male, è nuova. In genere, la filariosi umana, che a differenza di quella dei cani (*filaria immitis*) dà chiluria, induce morte per gli effetti della progressiva denutrizione.

Nel mio malato le larve di *filaria* vivono numerosissime nel sangue (sino a 15 per campo microscopico) senza dare reazione di sorta e senza disturbi subbiettivi; dippiù, come risulta dalle preparazioni istologiche, senza indurre notevole eosinofilia e leucocitosi. Ciò forse perchè i loro prodotti di ricambio non sono tossici.

<sup>(1)</sup> *Contribuzione alla sistematica dei culicidi etc.* (Rend. d. R. Acc. dei Lincei, 7 dicembre 1902).

In seguito a speciale procedimento, ho potuto conservare vive le larve in preparati di sangue per molti giorni. In tali preparati, anche dopo 15 giorni di conservazione, si vedono numerosissime larve che si muovono nel campo microscopico con vivacissimi movimenti come quelli di anguille. La luce, la temperatura ambiente, quella sotto zero, non esercita influenza sulle larve, a condizione di proteggere il preparato dallo essiccamento. Oltre l'essiccamento, bastano soluzioni diluitissime acidificate, soluzioni antisettiche come quella all'1 su 50,000 di sublimato, di tachiolo, di acido fenico, di lisolo, per indurre immediatamente morte delle larve. Anche soluzioni all'1 ‰ di bcloruro di chinino e soluzioni alcaline uccidono prontamente le larve.

Nelle urine chilose, ed ematochilose, come si raccolgono in seguito a passeggiate od a strapazzo del malato, si vedono appena emesse ed in seguito alla centrifugazione, molte larve di filaria, di cui alcune morte ed altre vive con movimenti poco attivi e che muoiono dopo circa 4 ore, forse per la acidità delle urine.

Inoculando urine e sangue con larve vive in molti animali, non si è indotto sinora filariosi.

Nei preparati a secco, dopo l'azione di alcuni mordenti, mi è stato dato di avere ottima colorazione delle larve con il *bleu* di metilene e l'eosina.

Iniezioni sottocutanee di sublimato per cinque giorni di seguito, nella proporzione di un centigrammo per giorno, hanno dato leucocitosi e diminuzione del numero delle larve circolanti, senza che resti influenzata la chiluria.

Iniezioni sottocutanee di cloruro di chinino per altri cinque giorni di seguito, nella proporzione di un grammo per giorno, hanno dato polinucleosi e notevole diminuzione delle larve circolanti. In seguito a quest'ultimo trattamento si è potuto raccogliere le urine per alcuni giorni intermittenemente limpide, ed in quelle chilose si è potuto col dosaggio determinare diminuita la quantità di grasso perduto.

Ho in corso altre osservazioni sulla patogenesi della chiluria che pare derivi dai linfatici del trigono vescicale, per parziale ostruzione del dotto toracico occupato dal parassita evoluto. Inoltre ho in corso ricerche istologiche su diverse zanzare raccolte dalla camera occupata dal malato, per determinare se anche queste zanzare possono propagare la malattia.

L'acido timico per via gastrica nella proporzione di sei grammi in sei ore di seguito è stato bene tollerato, però non ha influenzato il decorso del male. Infine ho iniziato tentativi terapeutici coll'estratto di felce maschio per agire per via gastro-intestinale direttamente sul parassita evoluto che, come si è detto, risiede probabilmente nel dotto toracico ed è causa delle manifestazioni morbose.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente BLASERNA dà il triste annuncio delle perdite fatte dall'Accademia nelle persone del Socio nazionale senatore prof. LUIGI CREMONA, morto il 10 giugno corr., e del Socio straniero CARLO GEGENBAUR, mancato ai vivi il 14 giugno corr. Apparteneva il primo all'Accademia, sino dal 7 dicembre 1873, e ne faceva parte il secondo dal 20 settembre 1887.

Dopo di aver brevemente ricordato i meriti degli estinti, il Vicepresidente aggiunge che una speciale Commemorazione di entrambi sarà fatta nella prima seduta che terrà la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali; e propone, e la proposta è approvata all'unanimità, che siano inviate le condoglianze dell'Accademia alle famiglie degli estinti.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio VOLTERRA fa omaggio di alcune pubblicazioni del prof. GÜNTHER e ne discorre; ed offre, alcune altre pubblicazioni a nome dell'autore professore LEBON.

## COMITATO SEGRETO

Nell'adunanza generale del 6 giugno 1903, la Commissione incaricata di giudicare il concorso al premio Reale, del 1901, per la Matematica, comunicava la seguente Relazione all'Accademia, per mezzo del Socio VERONESE, relatore.

*Relazione della Commissione del concorso al premio Reale di Matematica scaduto nel 1901.* — Commissari: L. BIANCHI, V. CERRUTI, U. DINI, E. D'OVIDIO e G. VERONESE (relatore).

Al concorso pel premio reale di matematica, scaduto il 31 dicembre 1901, chiesero di essere ammessi i sigg. BONGI CESARE, GENNA PIETRO, LOJACONO DOMENICO, PASCAL ERNESTO, RICCI GREGORIO, UGOLINI GIULIO e infine CASTELNUOVO GUIDO ed ENRIQUES FEDERIGO uniti insieme. Non diamo l'elenco delle pubblicazioni dei singoli concorrenti, perchè bisogna anzi tutto risolvere una questione di massima e avere una norma anche in casi simili in avvenire. Si presentano a questo concorso i proff. sigg. Castelnuovo ed Enriques come un solo concorrente, con Memorie singole e con Memorie comuni.

La questione di massima da risolvere è la seguente:

Sono ammesse a questi concorsi Memorie o Scoperte singole di più autori uniti insieme, quando siano fatte indipendentemente dall'uno e dall'altro in uno o più campi della scienza posta a concorso?

Esponiamo prima di tutto i fatti. I sigg. Castelnuovo ed Enriques presentano le loro pubblicazioni dedicate alla teoria delle superficie algebriche, segnalandone alcune sulle quali chiedono in particolare il giudizio dell'Accademia. Essi dicono testualmente nella loro domanda:

« Desideriamo che il giudizio sia complessivo sulla nostra comune opera.  
« Tale desiderio ci par giustificato dal fatto che le nostre ricerche sebbene  
« in parte compiute separatamente l'uno dall'altro di noi, sono tuttavia stret-  
« tamente collegate, e secondo un comune ordine d'idee tendono ad unico  
« fine, quello di perfezionare la teoria delle funzioni algebriche di due varia-  
« bili. D'altra parte le nostre principali ricerche si trovano riassunte in una  
« pubblicazione dell'anno corrente, cui noi due abbiamo collaborato, e dove  
« abbiamo esposto gli ultimi risultati più generali ai quali insieme per-  
« venimmo » (1).

Le pubblicazioni da essi presentate, e di cui alleghiamo l'elenco, sono trentuna, delle quali tredici di Castelnuovo, quindici di Enriques e tre comuni. La prima di queste Memorie di Castelnuovo fu pubblicata nel 1890, quella di Enriques nel 1893. Le pubblicazioni invece sulle quali gli autori domandano in particolare il giudizio dell'Accademia sono quindici, delle quali sei di Castelnuovo, sei di Enriques e tre comuni. Di queste le due prime di Castelnuovo furono pubblicate nel 1893, la prima di Enriques nel 1894. Questi due autori chiedono inoltre che il giudizio dell'Accademia sia *complessivo sulla loro opera*, sebbene tre sole delle pubblicazioni da essi presentate siano state fatte in comune.

Queste pubblicazioni comuni consistono in due Note che trattano argomenti secondari, e furono pubblicate nel 1895 l'una, nel 1900 l'altra; e in una Memoria riassuntiva dei risultati ottenuti dagli autori separatamente e indipendentemente l'uno dall'altro, perfezionati e integrati coll'aggiunta di nuovi risultati. Questa Memoria, che è la principale delle pubblicazioni comuni, fu pubblicata nel 1901.

La Commissione, riunitasi ai primi di dicembre 1902, osservò che nei concorsi a premi reali si ebbero finora due soli casi tipici di lavori compiuti in comune.

1.° Quello del lavoro del fisico Pisati e del geodeta Pucci sulla lunghezza del pendolo a secondi in Roma, presentato al concorso del premio reale di fisica, scaduto nel 1882;

2.° quello della vora del prof. Ciamician sulla costituzione del pirrolo, presentato al concorso del premio reale di chimica, scaduto nel 1887. Questi

due casi erano diversi, e diversi quindi furono i giudizî dell'Accademia. Nel primo caso, poichè era necessario alla soluzione del quesito, il concorso di un fisico e di un geodeta, divise il premio fra i due autori, nel secondo caso, ancorchè in alcune delle molte Memorie che su quel tema furono presentate dal Ciamician altri nomi comparissero, il premio fu aggiudicato per intero al Ciamician, poichè si giudicò che gli altri (i quali non avevano preso parte al concorso) avevano prestato un'opera di semplice aiuto, tale da non diminuire il merito dell'autore principale. Il caso dei proff. Castelnuovo ed Enriques è dunque affatto nuovo.

Si tratta di due autori che avendo lavorato separatamente e indipendentemente l'uno dall'altro nella maggior parte delle loro Memorie principali, e l'uno prima dell'altro, in un determinato campo della geometria con metodi analoghi, sebbene seguendo specialmente nelle loro prime Memorie criteri di ricerca diversi, domandano un giudizio complessivo oltre che sulle tre pubblicazioni effettivamente fatte in comune, anche sulle altre.

La Commissione, considerando che altra volta la Presidenza, si rivolse al Consiglio di Stato per chiedere di dare il parere sulla interpretazione del regolamento per i premi reali, credette opportuno di pregare la Presidenza di rivolgersi di nuovo all'alto Consesso.

Frattanto il 20 dicembre gli autori presentavano alla Presidenza un memoriale per spiegare come essi ritengono conforme al regolamento, che determina le istituzioni dei premi reali, il desiderio espresso nella loro domanda che le loro Memorie *vengano considerate come un'unica opera*, da ammettere al premio reale, pregando che le loro considerazioni fossero comunicate al Consiglio di Stato. E la Presidenza in nome dell'Accademia per mezzo del Ministero della Pubblica Istruzione, fatta rilevare la differenza di questo caso dai due surriferiti e notando che ci si trova dinanzi a tre concorrenti: il prof. Castelnuovo, il prof. Enriques e l'unione Castelnuovo-Enriques formulava i seguenti quesiti:

1.° Quantunque la domanda sia sottoscritta da ambedue gli autori, può o deve l'Accademia esaminare partitamente i lavori di ciascuno dei due per stabilire il loro merito relativo?

A tale giudizio concorrerebbero anche i lavori fatti in comune dai due autori, a cui per questa parte comune, si assegnerebbe uguale merito. Quest'ultima assegnazione non altererebbe il merito relativo dei due autori, ma darebbe a ciascuno di essi il valore assoluto per servire di confronto con quello degli altri concorrenti.

2.° Ovvero, deve l'Accademia alla domanda fatta in comune rispondere soltanto con un giudizio sui lavori fatti in comune? E siccome uno di essi contiene un sunto dei lavori fatti partitamente dai due autori, può e deve l'Accademia tener conto del merito intrinseco accennato in tali sunti, con-

siderandoli, sia come opere separate dei due, sia come opera preparatoria per il lavoro sintetico dei due autori riuniti?

In quest'ultimo caso, se cioè l'Accademia volesse considerare i lavori separati dei due autori, e accennati nei sunti, come lavori preparatori per l'opera sintetica dei due autori riuniti, basterebbe il giudizio eventualmente proferito dall'Accademia, che cioè l'insieme deve considerarsi come una scoperta unica, per giustificarla di fronte agli altri concorrenti, i quali nella loro aspirazione al premio reale, si troverebbero a lottare colle loro forze isolate contro quelle dei due autori riuniti?

Non mancava poi la Presidenza di far notare al Consiglio di Stato che più volte fu diviso il premio fra due concorrenti quando ciascuno avrebbe meritato il premio se non avesse avuto competitori, e i *lavori dei due concorrenti, non essendo comparabili, non consentivano una graduazione di merito.*

Il Consiglio di Stato (sez. I), nel parere dato nell'adunanza del 23 gennaio 1902, accenna fin da principio alla questione mossa dall'Accademia sull'ammissibilità al premio reale dei *lavori fatti in comune*, da due o più autori, e sul modo di loro esame, mentre dalla domanda dell'Accademia risulta non già che il lavoro di Castelnuovo ed Enriques sia *fatto in comune*, ma che in comune fu fatta la domanda per l'ammissibilità al premio.

Data questa premessa, non corrispondente del tutto al caso in esame, il Consiglio di Stato, dopo avere riportati nelle sua relazione i quesiti dell'Accademia pronunciò il seguente parere:

« Considerato che con l'ultima questione proposta la R. Accademia dei Lincei tocca direttamente il punto dal quale conviene cominciare. In riguardo di che conviene guardare alla natura del concorso, in quanto cioè pel fine a cui esso è diretto, miri piuttosto alla designazione di un merito assoluto che di un merito relativo, o viceversa. Della prima specie sono i concorsi, nei quali per l'intento dell'incremento delle scienze e delle arti, o per data opera di pubblico decoro, viene con un premio stimolata l'energia dei possibili concorrenti, e compensata almeno in parte la spesa cui eventualmente devono sobbarcarsi; sono della seconda specie i concorsi che han per oggetto l'assegnazione di uffici, posti, cariche, con l'intento di fare eletta dei migliori nella media capacità che si richiede per lo adempimento delle funzioni proprie della carica. In questa specie di concorsi, il merito assoluto trova designazione in un *minimum* sotto il quale non si può discendere; e questo *minimum* è punto di partenza ad una graduatoria dei concorrenti che è essenziale perchè è nei fini del concorso; nella prima specie, di un minimo conseguibile sarebbe fuor di luogo parlare e la tenzone del merito si spazia, se trattasi di opera scientifica, dal punto in cui la scienza è già prevenuta al punto conseguibile dalla indefinita potenza dello spirito umano; se di opera letteraria o di arte nell'incessante conato dello spirito a tradurre in

forma il fuggevole fantasma del pensiero e della idea. In questa specie di concorsi la graduatoria non è punto necessaria, perchè non è nei fini del concorso; e se la si fa, si fa solo a soddisfazione legittima, se vuolsi, dei concorrenti; ma questa graduatoria non rappresenta una distribuzione di sedi fra un punto già fisso ed un massimo raggiunto; rappresenta bensì un ordine fra i concorrenti, senza nessun rapporto ad un modulo di ragguaglio. Di che per conseguenza è da concludere che in queste due specie di concorsi il valore del giudizio sul merito assoluto e sul merito relativo è in ragione inversa; perciocchè di quanto incomparabilmente più alto nei primi il giudizio del merito assoluto, di altrettanto perde in valore ed importanza il giudizio sul merito relativo, che è invece di essenza e di massima importanza nei secondi.

« Considerato che da ciò direttamente ad un'altra conseguenza si discende ed è che mentre nei concorsi della seconda specie sarebbe impossibile ammettere un lavoro che da più concorrenti fosse in comune compiuto, nulla osta perchè di tali lavori siano ammessi nei concorsi della prima specie, perchè in questo oggetto proprio del premio è l'opera che rimane acquisita alla scienza o all'arte, non la persona alla quale nessun'altra cosa si chiede, e con la quale nessun vincolo si contrae; nè per il premio che ad un'opera in comune compiuta venga concesso, alcuna ragione di doglianza possono avere coloro i quali presentarono il frutto dei loro lavori individuali, perchè il concorso non è indetto ad esperimento di individuale capacità, ma ad incremento delle liberali discipline.

« Considerato che di qualunque specie sia il concorso, la riuscita del medesimo vuol essere considerata con mira diretta a ciò che quale oggetto del concorso fu proposto; o in altri termini al tema che o propose a sè stesso il concorrente in un concorso libero, o alla classe dei concorrenti fu imposto dall'autorità che indisse il concorso.

« Che quindi presentato da più autori un lavoro in comune, ancorchè, questo risulti da un certo numero di Memorie, che dell'uno e dell'altro sieno proprie, il giudizio, di regola, deve essere dato sul complesso del lavoro; non sulle singole parti, che nel lavoro fatto in comune ciascuno degli autori si assunse, perchè in nessuna di quelle parti è tutto intero il tema, e il tema non compiuto non vince il concorso.

« Considerato che *a priori* giudicando, non pare che a questa regola possano farsi più di due eccezioni: 1° quando nei lavori individuali di uno studio fatto in comune, abbiano a ravvisarsi opere distinte in loro specie e per sè indipendenti, ma dirette ad unico risultato non conseguibile che col concorso di diverse discipline, quale fu appunto il caso del concorso Pisati-Pucci; 2° quando pure essendo per avventura difettoso il tema nelle sue conclusioni, possa alcuno dei lavori parziali apparire di per sè meritevole del premio del concorso; o perchè contenga esso stesso una rilevante scoperta, o perchè siasi per esso fatto un lungo passo nel cammino della scienza.

« Tale è il parere della Sezione sui quesiti che furono proposti ».

La Commissione, riunitasi il 5 aprile p. p. e presi in esame gli Atti e le pubblicazioni dei proff. Castelnuovo ed Enriques per quanto concerne la questione di massima, se cioè essi costituiscano effettivamente un lavoro fatto in comune, ebbe subito ad osservare che nel parere del Consiglio di Stato non è contemplato il caso Castelnuovo-Enriques. Il Consiglio crede infatti, data la premessa sopra riferita, che si tratti di un lavoro fatto in comune, mentre tre sole delle pubblicazioni di Castelnuovo ed Enriques sono fatte effettivamente in comune, delle quali la principale è quella stampata nel 1901, nell'anno in cui scade il concorso, e le altre, per essere state fatte dagli autori separatamente e indipendentemente l'uno dall'altro, non si possono considerare come un lavoro fatto in comune nel quale ciascun autore abbia trattato questa o quella parte, come se fossero i capitoli di un'opera unica.

Per lavoro compiuto in comune da più autori deve intendersi quello nel quale vogliono fin da principio secondo un programma di ricerche stabilito risolvere insieme una determinata questione. Questi lavori più che nelle speculative sono frequenti nelle scienze sperimentali, dove è talvolta necessario il concorso di discipline o di attitudini diverse per la risoluzione di determinati problemi. Tale fu il lavoro sopra citato di Pisati-Pucci. E sebbene nelle ricerche originali di matematica pura per la loro natura speculativa sembri difficile la unione di più autori, pure non manca qualche esempio di lavori fatti in comune, come quello di Brill e Noether sulle curve algebriche.

Ora, gli art. II e VI del regolamento dei concorsi ai premi reali, per le Memorie presentate al giudizio dell'Accademia non fanno cenno che di un autore, e parrebbe quindi che di regola non fossero ammissibili i lavori presentati da parecchi ad un tempo. Ma per lo spirito stesso dell'istituzione si direbbe che non s'abbiano ad escludere quelli fatti in comune da più autori per risolvere determinate questioni.

Non è però un lavoro fatto in comune quello risultante dall'insieme delle Memorie di più autori che separatamente e indipendentemente l'uno dall'altro hanno ottenuto dei risultati in una data scienza o in un campo più o meno vasto di essa, anche quando i risultati degli uni hanno servito agli altri, per conseguire nuovi risultati, con metodi più o meno analoghi. Non si tratta più allora di un lavoro compiuto in comune, ma di un lavoro ottenuto da più autori indipendentemente gli uni dagli altri. Ad avviso della Commissione, per lo spirito della istituzione dei premi reali e del regolamento che ne determina le norme, siffatti lavori devono essere esclusi dai concorsi ai premi reali. Oltre al caso attuale, altri casi simili ma più gravi potrebbero presentarsi in avvenire. È noto infatti che l'Accademia più volte ha premiato l'insieme dei lavori di un concorrente, anche quando erano per contenuto diversi.

Ora, se fosse ammesso il principio che lavori indipendentemente fatti da più autori in un campo più o meno ampio di una data scienza potessero concorrere insieme al premio reale, ne scenderebbe tosto la conseguenza che parecchi studiosi che abbiano lavorato nello stesso campo o in campi diversi, indipendentemente gli uni dagli altri, potrebbero unirsi insieme e presentarsi al concorso del premio reale, invocando a loro giustificazione e beneficio i precedenti. E poichè per l'art. I del regolamento si devono premiare le migliori Memorie (o scoperte) e quindi, quando è possibile, bisogna fare un confronto di merito fra le Memorie presentate, è chiaro che la somma delle Memorie di più autori riuniti avrebbe a *priori* sulle altre di autori isolati maggiore probabilità di vittoria.

La Commissione non nega l'importanza delle pubblicazioni dei due valorosi autori, che più di altri in Italia si sono occupati della geometria sulle superficie algebriche, ma crede che manchi all'insieme di esse l'unità scientifica del lavoro fatto in comune.

Alla Commissione non rimanevano quindi che due soluzioni possibili:

o esaminare e giudicare il merito dei lavori dei professori Castelnuovo ed Enriques come se fossero due concorrenti distinti, tenendo anche conto del merito che può essere a ciascuno attribuito per le pubblicazioni fatte in comune;

ovvero esaminare e giudicare le sole pubblicazioni compiute in comune, considerando gli autori come un solo concorrente, e quindi escludendo dal giudizio le Memorie particolari di ciascuno.

L'una e l'altra soluzione avrebbero potuto essere discusse dall'Accademia, ma a tale discussione si oppone la domanda stessa dei proff. Castelnuovo ed Enriques, i quali domandano un giudizio complessivo sulla loro opera costituita dalle Memorie presentate e in particolare da quelle segnalate nel loro elenco, comprese dodici Memorie non comuni.

È chiaro altresì che essendo la questione di massima indipendente da quella del merito, rimane intatto il diritto dei proff. Castelnuovo ed Enriques di presentare gli stessi lavori a futuri concorsi del premio reale nei termini prescritti.

Dopo queste considerazioni la Commissione ritenendo suo dovere di sottomettere alla sentenza dell'Accademia la questione di massima, astenendosi intanto da un giudizio sul merito relativo delle Memorie degli altri concorrenti presentate al concorso, all'unanimità sottopone all'approvazione dell'Accademia la seguente proposta:

Visto il parere del Consiglio di Stato in data 23 gennaio 1903 sull'ammissibilità ai premi reali dei lavori fatti in comune,

udita la relazione della Commissione del concorso al premio reale di matematica,

delibera:

1° che l'insieme delle pubblicazioni dei proff. Castelnuovo ed Enriques, sulle quali chiedono un giudizio complessivo non possono riguardarsi come un'opera unica fatta in comune;

2° che per la domanda stessa dei due autori non si possono giudicare i loro lavori separatamente, considerandoli come due concorrenti distinti, nè giudicare le sole pubblicazioni da essi fatte in comune, considerandoli come un solo concorrente,

3° che tale deliberazione non pregiudica il diritto dei proff. Castelnuovo ed Enriques di presentare gli stessi lavori a futuri concorsi del premio reale di matematica nei termini prescritti,

4° che il giudizio sulle Memorie degli altri concorrenti sia rinviato all'anno venturo.

---

Elenco (in ordine cronologico) delle Memorie presentate da Castelnuovo ed Enriques al concorso per il premio Reale per la Matematica, del 1901. (Le iniziali C. ed E. indicano l'autore).

I lavori sui quali gli Autori chiedono in particolare il giudizio dell'Accademia sono indicati con un asterisco apposto al numero corrispondente.

1-C. *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* (1890). — 2-C. *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre* (1890). — 3-C. *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (1891). — 4 e 5-C. — *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica* (Nota I e II) (1891). — 6-E. *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (1893). — 7-E. *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (1893). — 8\*-C. *Sulla razionalità delle involuzioni piane* (1893). 9\*-C. *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili* (1894). — 10\*-C. *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve ellittiche* (1894). — 11-E. *Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica* (1894). — 12\*-C. *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (1894). — 13\*-E. *Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche* (1894). — 14\*-E. *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (1894-96). — 15-C. *Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (1894-96). — 16\*-C. *Sulle superficie di genere zero* (1894-96). — 17\*-C. ed E. *Sulle superficie alge-*

briche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè stesse (ms.) (1895). — 18-E. *Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche* (1896). — 19\*-E. *Sui piani doppi di genere uno* (1896). — 20\*-E. *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica  $f(xyz)=0$  con funzioni razionali di due parametri* (1896). — 21\*-C. *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (1897). — 22-E. *Le superficie algebriche di genere lineare  $p^{(1)}=2$*  (1897). — 23-E. *Sulle superficie algebriche di genere lineare  $p^{(1)}=3$*  (1897). — 24-C. *Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo* (1897). — 25-E. *Sui piani doppi di genere lineare  $p^{(1)}=1$*  (1898). — 26\*-E. *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (1898-99). — 27-E. *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare* (1899). — 28\*-C. ed E. *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi* (1900). — 29\*-C. ed E. *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* (1900-01). — 30-E. *Sopra le superficie algebriche che ammettono integrali di differenziali totali di prima specie* (ms.) (1901). — 31\*-E. *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche* (1901).

---

Sulle conclusioni della Commissione sorse una discussione, alla quale presero parte, in senso diverso, i Soci SEGRE, VOLTERRA, CARLE, GABBA, SCHUPFER e il relatore VERONESE.

In seguito a richiesta del Socio SEGRE, le proposte della Commissione furono messe partitamente ai voti, e risultarono approvate dall'Accademia.

---

Dopo la lettura e l'approvazione della Relazione dei Commissari FINALI e STRINGHER, sul bilancio accademico del 1902, l'Amministratore VOLTERRA ricordò all'Accademia che non era stato tenuto conto nei preventivi passati, come risultava dalla Relazione anzidetta, di un premio Reale per le Scienze sociali ed economiche non conferito nel 1898, prorogato a tutto il 1903, e che dovrà conferirsi nel 1905.

Il Socio VOLTERRA propose quindi, e l'Accademia approvò, che la deliberazione presa nell'adunanza generale del 3 giugno 1899, e in particolare la disposizione transitoria « di far servire ogni residuo di premio Reale non conferito all'unico scopo della integrale ricostituzione del fondo di tali premî » sia estesa a tutto l'anno 1905.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 6 giugno 1903.*

- Anderson T. and Flett J. S.* — Report on the eruptions of the Saufrière, in St. Vincent, in 1902, and on a visit to Montagne Pelée, in Martinique. Part I (From Philosop. Trans. of the R. Soc. of London. Series A. Vol. 200 ecc.). London, 1903. 4°.
- Baroni M.* — Sulla ricerca di norme che determinino la stabilità delle costruzioni in calcestruzzo armato. Milano, 1903. 8°.
- Bassani F.* — Sui pesci fossili della pietra leccese. Lettera al prof. Cosimo De Giorgi in Lecce. Lecce, 1903. 4°.
- Багеньскимъ Ч.-Будде Е. О. — Указатель къ матеріаламъ, собраннымъ Г. чувинскимъ въ “ трудахъ этнографической статистической экспедиции императорскаго русскаго географическаго общества въ западнорусскій край ”. Казань. 1900. 8°.
- Bellucci G.* — La chimica e la fisica nell'astronomia. Perugia, 1903. 8°.
- Betti E.* — Opere matematiche pubblicate per cura della R. Acc. dei Lincei. Tom. I. Roma, 1903. 4°.
- Borredon G.* — Dell'attrazione planetaria, forza centripeta e gravitazione universale. S. I. 1903. 8°.
- La legge del sistema planetario, o l'armonia del moto dei suoi corpi. S. I. 1903. 8°.
- Clemm W. N.* — Die Gallensteinkrankheit, ihre Häufigkeit, ihre Entstehung, Verhütung und Heilung durch innere Behandlung. Berlin, 1903. 8°.
- Флёровъ А. — Флора владимірской губерніи. Москва, 1902. 8°.
- Günther S.* — Das Polarlicht im Altertum. Leipzig, 1903. 8°.
- Faltungs- und Plateaugebirge in ihrem Verhalten zur Verteilung der Schwerkraft. (Sonderabdruck aus “ Das Weltall ”). Berlin, s. a. 4°.
- Lebon E.* — Sur un manuscrit d'un cours de J.-N. Delisle au Collège Royal. Paris, 1902. 8°.
- Sur le plan d'une Bibliographie analytique des écrits contemporains sur l'histoire de l'astronomie. (Bull. de la Soc. Astr. de France). — Mai 1903. Paris, 8°.
- Lockyer N. and Lockyer W.* — Solar Prominence and Spot Circulation. 1872-1901 (from the Proceedings of the R. Society). Vol. 71. 8°.
- Maluta G.* — Principi di suggestione terapeutica. Padova, 1903. 8°.
- Memorie di Anatomia e di Embriologia dedicate al prof. G. Romiti in Pisa — Firenze, 1903. 8°.
- V marzo 1903 (Arch. ital. di Anat. e di Embr., vol. II, fasc. 1).

- Notice biographique et bibliographique sur M.<sup>r</sup> Ernest Lebon agrégé de l'Université etc. — Extrait du Dictionnaire national des Contemporains par C. E. Curinier. Paris, 1902. 8°.
- Ocagne (M. d')* — Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. Paris, 1903. 4°.
- Panichi L.* — Primo saggio di applicazione all'uomo del siero antipneumotico Tizzoni-Panichi (dall'Ist. di Pat. gen. della R. Univ. di Bologna). Milano, s. a. 8°.
- Pascal E.* — Su di una equazione differenziale di forma più generale di quella di Riccati e sul rapporto anarmonico di quattro radici di una equazione algebrica a coefficienti variabili. (Rend. del Circ. mat. di Palermo), 1903.
- Résumé de quelquesuns de mes récents travaux sur la théorie des groupes de Lie (dal Prac matematyczno fizycznych, t. XIV). Warszawa, 1903. 8°.
- Altre ricerche sulle matrici a caratteristiche invarianti nella teoria delle forme ai differenziali di second'ordine. Nota II (dai Rend. del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. 1903). Milano, 8°.
- Sulla integrazione di una equazione di Riccati più generale di quelle considerate da Malmstén, Brioschi e Siacci (dal Rend. della R. Acc. delle sc. F. e M. di Napoli). S. a. 8°.
- Pepere A.* — Sull'endotelioma dell' Utero. — Note anatomo-patologiche. Napoli, 1903. 8°.
- Pflüger E.* — Bemerkungen zur Analyse des Glykogenes. Bonn, 1903. 8°.
- Pincherle S.* — Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione. Bologna, 1903. 8°.
- Sulle Derivate ad indice qualunque. Bologna, 1902. 4°.
- Прокощевъ П. — Церковное судопроизводство въ періодъ вселенскихъ соборовъ (Accusatio) и влияние на него римско-византійскаго процессуальнаго права. Казань, 1900. 8°.
- Ricerche speciali eseguite nel biennio 1899-1900 nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna, diretto dal prof. G. Ciamician. Annate decima e undecima.
- Schuyten M. C.* — Over de snelheid der uitstralingswarmte van het lichaam (« Handelingen van het Zesde Vlaamsch Natuur-en Geneeskundig Congres »). Kortrijk, 1903. 4°.
- Segre C.* — Congetture intorno alla influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della Geometria non-Euclidea (dalla R. Acc. delle sc. di Torino). Torino, 1903. 8°.
- Shopp H.* — Beiträge zur Kenntnis der diluvialen Flussschotter im westlichen Rheinhessen. S. l. et a. 4°.
- Гаворскій А. — Матеріалы къ вопросу о патолого-анатомическомъ измѣненіи спинного мозга при сдавленіи его. Казань, 1901. 8°.

*Wadsworth F. L. O.* — On the optical conditions required to secure maximum accuracy of Measurement in the use of the Telescope and Spectroscope (from *Miscell. scient. Papers of the Allegheny Obs.*). Chicago, 1901-1902. 8°.

*Woodward H.* — Life of William Smith, LL. D., the "Father of English Geology" (from the "Proceed. of the Bath Nat. Hist. and Antiq. Field Club". 1902). 1902, s. l. 8°.

— Some Ideas on Life (from the *Journ. of the R. Micr. Soc.* 1903). S. l. 1903. 8°.

*Zwiers H. J.* — Recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique. Deuxième memoire. Leyde, 1902. 8°.

## DISSERTAZIONI ACCADEMICHE

DELLE UNIVERSITÀ DI KIEL, JENA, STRASSBURG E JURJEV.

*Albrecht A.* — Zur Entwicklungsgeschichte des Achsenskeletes der Teleostier. Strassburg, 1902. 8°.

*Alfers A.* — Ueber Zwangsvorstellungen. Kiel, 1902.

*Ahl J.* — Untersuchungen über geodätische Linien. Kiel, 1901. 8°.

*Amme O.* — Oxydation von Substitutionsproducten des p-Oxybenzaldehydphenylhydrazons zu Osazonen. Kiel, 1902. 8°.

*Ammer W.* — Zur Casuistik der Darmausschaltungen. Kiel, 1902. 8°.

*Arend W.* — Ueber Pityriasis rubra (Hebrae). Coburg, 1901. 8°.

*Backhaus F.* — Ueber Entstehung und Behandlung der kompletten Dammrisse. Kiel, 1902. 8°.

*Baedecker J.* — Die Arsonvalisation oder Behandlung mit Tesla-Strömen nach eigenen und anderen Befunden. Berlin-Wien, 1901. 8°.

*Bahrdt W.* — Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer rauen Fläche, insbesondere auf einem rauen Kreiscylinder und einem rauen Kreiskegel. Kiel, 1901. 8°.

*Barthelmé K.* — Zwei Fälle von Pityriasis rubra Hebrae. Strassburg, 1901. 8°.

*Bartsch E.* — Ueber Tuberkulose der Brustdrüse. 1901. 8°.

*Batt L.* — Ueber die Einwirkung von Zimmtaldehyd auf bernsteinsaures Natrium bei Gegenwart von Essigsäureanhydrid. Strassburg, 1901. 8°.

*Behncke F.* — Ueber Insufficienz der Aortenklappen auf luetischer Basis, Kiel, 1902. 8°.

- Behre A.* — Beiträge zur Kenntnis der O-Acylverbindungen einiger Keton-säureester, Diketone und verwandter Körper. Kiel, 1901. 8°.
- Berger H.* — Zur Lehre von der Blutzirkulation in der Schädelhöhle des Menschen namentlich unter dem Einfluss von Medikamenten. Jena, 1901. 8°.
- Bergemann W.* — Ueber die in der Kieler chirurgischen Klinik in den Etatsjahren 1899-1900 vorgekommenen Fälle von Osteomyelitis acuta. Kiel, 1902. 8°.
- Beutler E.* — Beiträge zur Pneumotomie. Kiel, 1901. 8°.
- Beyer A.* — Beiträge zur Aetiologie der Zahnverderbnis und Stomatitis in Thüringen. Jena, 1900. 8°.
- Billmann A.* — Ueber Fälle von Desmatropie bei substituirten Methylen-bisacetessigestern. Jena, 1900.
- Birmeyer F.* — Ueber die Diagnose von Nierentumoren. Strassburg, 1901. 8°.
- Blomberg H.* — Ueber die diagnostische Bedeutung der Menstruationscurve bei Tubenschwangerschaft. Kiel, 1901. 8°.
- Blum L.* — Ueber den Nährwerth der Heteroalbumose des Fibrins und der Protoalbumosen des Caseins. Strassburg, 1901. 8°.
- Blumensath F.* — Statistisch-klinische Mittheilungen über das runde Magengeschwür. Kiel, 1902. 8°.
- Bode A.* — Beitrag zur Lehre vom Hydrocephalus internus. Jena, 1901. 8°.
- Boeninghausen-Budberg (von) R. F.* — Ueber den Dickdarm erwachsener Menschen und einiger Mammalien, welcher dem Dickdarm des dritten menschlichen Entwicklungsmonates ähnlich ist. Jurjew (Dorpat), 1901. 8°.
- Bonnet H.* — Ein Fall von primärem Leberkrebs mit Schleim producirenden Metastasen. Kiel, 1902. 8°.
- Bresslau E.* — Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Mammarorgane bei den Beutelthieren. Stuttgart, 1901. 8°.
- Bretzl H.* — Botanische Forschungen des Alexanderzuges nach Theophrasts Auszügen aus den griechischen Generalstabsberichten. Strassburg, 1902. 8°.
- Brinckmann J.* — Zur Kenntniss der Thomsen'schen Krankheit. Kiel, 1902. 8°.
- Brölemann E.* — Beiträge zur Wirdigung der Nervendehnung. Kiel, 1902. 8°.
- Bruch F.* — Zur Diagnostik und operativen Therapie der Anuria calculosa. Strassburg, 1901. 8°.
- Buchholz O.* — Bruchoperationen bei Kindern in den ersten zwei Lebensjahren. Peine, 1902. 4°.
- Busleb H.* — Beiträge zur Kenntnis der Pyrroline. Jena, 1902. 8°.

- Buhtz W.* — Ueber zwei Fälle von Lahmungen der Augenmuskelnerven infolge Trauma. Kiel, 1901. 8°.
- Bürklee F. J.* — Venöse Stauung als Ursache von Haematocele retrorotunda. Freiburg, 1902. 8°.
- Callsen F.* — Ueber einen Fall von Hydrops des Processus vermiformis. Kiel, 1902. 8°.
- Christensen H.* — Ein Beitrag zur Würdigung der konservativen Behandlungsmethode der offenen Hydronephrose. Kiel, 1902. 8°.
- Cölle H.* — Ein Fall von Aneurysmabildung bei einem jugentlichen Individuum auf tuberkulöser Basis. Kiel, 1902. 8°.
- Dammer F.* — Ueber die Ursachen der Bremer'schen Reaktion. Jena, 1900. 8°.
- Dannenberg W.* — Ueber die Oxydation der Methyl- und Aethylmesakonsäure mit Kaliumpermanganat. Strassburg, 1902. 8°.
- Deitmer F.* — Ueber einen Fall von fötaler Peritonitis. Kiel, 1902. 8°.
- Delorme E.* — Ueber primäres Lungencarcinom. Jena, 1901. 8°.
- Diercks B.* — Ueber die Tenazität des Masern- und Röthelnvirus. Strassburg, 1901. 8°.
- Dietz F.* — Zwei Fälle von idiopathischer Atrophie der Haut. Strassburg, 1902. 8°.
- Dörfer J.* — Ueber Beziehungen der Lues zu anderen Krankheiten, insbesondere zu Tabes und progressiver Paralyse. Jena, 1901. 8°.
- Driver R.* — Ein Fall von Tuberkulose der Corneoskleralgrenze. Jena, 1901. 8°.
- Edens E.* — Tabes dorsalis und chronische Spinalmeningitis. Kiel, 1902. 8°.
- Ehrlich B.* — Die Reinigung des Obstes vor dem Genusse. München, 1901.
- Elze F.* — Zur Kenntniss der 1,5-Diketone. Jena, 1902. 8°.
- Eppestein O.* — Ueber die Dampfdruckerniedrigung verdünnter wässrige Lösungen. Breslau, 1900. 8°.
- Feder P.* — Ueber den gegenwärtigen Standpunkt unserer Kenntnisse von der Desinfektion der Mundhöhle. Jena, 1900. 8°.
- Fleischmann F.* — Ein Beitrag zur Therapie bei Placenta praevia. Kiel, 1901. 8°.
- Floren J.* — Geistesstörungen bei Aphasie. Kiel, 1902. 8°.
- Forster A.* — Beiträge zur Kenntniss der Entwicklungsgeschichte des Interparietale. Stuttgart, 1901. 8°.
- Forster E. R.* — Versuche über das Verhalten des Muskels wenn Muskel und Nerv zugleich electricisch durchströmt werden. Strassburg, 1901. 8°.
- Fortmann H.* — Ueber retropharyngeale Lymphosarkome nebst Mittheilung eines Falles von Lymphosarkoma colli et pharyngis. Kiel, 1902. 8°.
- Franck F.* — Die Veränderungen in den Betriebsgrössen und Anbauverhält-

- nissen sowie in der Viehhaltung der württembergischen Landwirtschaft in der 2<sup>ten</sup> Hälfte des 19<sup>ten</sup> Jahrhunderts. Halle, 1902. 8°.
- Freist G.* — Ueber  $\beta$ -Isobutylisochinolin. Kiel, 1902. 8°.
- Friedmann W.* — Ueber die Oxyisoterebinsäure und das Isoheptodilacton. Strassburg, 1902. 8°.
- Fujikawa Y.* — Ueber die Coincidenz von Tabes und Herzklappenfehlern. Jena, 1900. 8°.
- Gabler M.* — Ueber Abkömmlinge der Tetronsäure. Jena, 1900. 8°.
- Gagzow O.* — Der Kampf um Kalt- und Warmblut in der Pferdezucht der preussischen Remonteprovinzen. Posen, 1902. 8°.
- Gans R.* — Ueber Induction in Rotierenden Leitern. Leipzig, 1902. 8°.
- Gast E.* — Ueber Verletzungen krankhaft veränderter Augen. Coburg, 1902. 8°.
- Gau L.* — Ueber ausgedehnte Aderhaut- Netzhaut-Veränderungen nach Contusio bulbi ohne Skleralruptur. Jena, 1902. 8°.
- Geerkens A.* — Korrelation-Vererbungs- und Erscheinungenbe im Roggen, insbesondere die Kornfarbe betreffend. Dresden, 1901, 8°.
- Geese C.* — Zur Lehre vom Speiseröhrenkrebs. Kiel, 1902. 8°.
- Gerstein K.* — Ein Fall von primärem Krebs der rechten Ureterenmündung. Kiel, 1902. 8°.
- Giese A.* — Ein Fall von Osteom der linken Stirnhöhle und Orbita. Kiel, 1902. 8°.
- Giese E.* — Experimentelle Untersuchung über Erfrierung. Berlin, 1901. 8°.
- Giesecke K.* — Zur pathologischen Anatomie der Iridodialyse. Jena, 1902. 8°.
- Glaubitt O.* — Ueber Magentuberkulose. Kiel, 1901. 8°.
- Gleiss M.<sup>a</sup> W.<sup>e</sup>* — Händedesinfection und Wochenbettserkrankungen. Strassburg, 1901. 8°.
- Gloy H.* — Beitrag zum multiplen Auftreten primärer Carcinome. Kiel. 1902. 8°.
- Göbel A.* — Ueber Hernia duodenojejunalis Treitzii. Kiel, 1902.
- Gottgetreu H.* — Die Bedeutung der Vererbung bei der Dementia paralytica. Orimma, 1902. 8°.
- Gravemann B.* — Ein Beitrag zur Lehre der Pankreascysten. Lubbecke, 1902. 8°.
- Gray Th.* — Beiträge Zur Kenntniss des Acetonylacetons. Jena, 1901. 8°.
- Grevesen L.* — Ueber die in der Kieler chirurgischen Klinik im Etatsjahre 1899-1900 vorgekommenen Fälle von Herniotomie. Kiel, 1902. 8°.
- Grober J.* — Die Resorptionskraft der Pleura. Jena, 1901. 8°.
- Grohé B.* — Unsere Nierentumoren in therapeutischer, klinischer und pathologisch-anatomischer Beleuchtung. Leipzig, 1901. 8°.
- Gross E. G.* — Die Verletzungen des Penis nebst einem Fall von traumatischen Sequester der Corpora cavernosa penis. Kiel, 1902. 8°.

- Gross H.* — Zur Kenntniss des osteomyelitischen Knochenabscesses der langen Röhrenknochen in besonderer Berücksichtigung seines anatomischen Verhaltens. Tübingen, 1901. 8°.
- Gross J.* — Untersuchungen über das Ovarium des Hemipteren, zugleich ein Beitrag zur Amitosenfrage. Leipzig, 1900. 8°.
- Untersuchungen über das Ovarium der Hemipteren zugleich ein Beitrag zur Amitosenfrage. Leipzig, 1900. 8°.
- Gruener M.* — Seltenerer Einbruchsweg der eitrigen Leptomeningitis. Dresden. 1901. 8°.
- Gulcke N.* — Beitrag zur Statistik des Mamma-Carcinoms. Zusammenstellung der in der Klinik des Herrn Geheimrath Pr. Dr. E. von Bergmann in den Jahren 1882-1899 zur Beobachtung gelangten Fälle von Mamma-Carcinom. Berlin, 1902. 8°.
- Günther A.* — Ein Beitrag zur Kenntnis der Bernardt'schen sensibilitätsstörung am Oberschenkel im Gebiete des Nervus cutaneus femoris externus. Jena, 1901. 8°.
- Gutmann E.* — Zur Kenntnis der Verdauungsprodukte des Leims. Coburg, 1901. 8°.
- Haag A.* — Ein seltener Fall von teleangiectatischem hämatocystischem Uterusmyom mit Gravidität. Strassburg, 1902.
- Haas W.* — Zur Kasuistik der Pylorusresectionen. Kiel, 1901. 8°.
- Haerber C.* — Ueber einen Fall von Embolie des Ramus temporalis superior der Netzhautschlagader. Strassburg, 1902. 8°.
- Hagen K.* — Zur Kasuistik und Therapie der primären Carcinome des Ductus choledochus. Kiel, 1902. 8°.
- Hagmeister E.* — Ueber angeborenen Mangel der Fibula. Lübecke, 1902. 8°.
- Hagen G.* — Ueber die Zulässigkeit der Taxis bei Brucheinklemmung. Kiel, 1902. 8°.
- Halbey K. A.* — Das Vorkommen von Stauungsneuritis bei Hirnblutungen. Kiel, 1902. 8°.
- Hamann G.* — Die Backfähigkeit des Weizenmehles und ihre Bestimmung. Darmstadt, 1901. 8°.
- Hannemüller K.* — Gefässarrosionen im Verlaufe von Scharlach. Kiel, 1901. 8°.
- Heinrichs H.* — Ein Fall von primären Gallenblasenkrebs. Kiel, 1901. 8°.
- Heinsichsdorff P.* — Ueber traumatische Epiphysenlösungen. Kiel, 1901. 8°.
- Henneberg A.* — Ueber das Vorkommen und die Behandlung von Gelenkfracturen. Kiel, 1902. 8°.
- Hensel K.* — 40 Fälle von Eklampsie. Kiel, 1901. 8°.
- Hermann O.* — Hyperhidrosis unilateralis. Leipzig, 1901. 8°.
- Heyl F.* — Ueber Wanderung von Methylgruppen in Benzol- und Piridin-derivaten. Jena. 1901. 8°.

- Heyn-Cohn P.* — Experimentelle und mikroskopische Studien über die Unterbindung der Ureteren. Jena, 1901. 8°.
- Heynsius D.* — Ueber Pyrrolbasen der Camphergruppe. Jena, 1901. 8°.
- Hiltermann P.* — Drei Fälle von vollkommen glattwandig ausgeheilten grossen Lungenkavernen. Kiel, 1902. 8°.
- Hoffmann E.* — Ueber einen bemerkenswerten Fall von Eisensplitterverletzung des hinteren Bulbusabschnittes. Jena, 1902. 8°.
- Hoffmann L.* — Statistik der nicht diagnosticirten Krebse. Kiel, 1902. 8°.
- Hoffmann W.* — Zur Casuistik der Duodenalstenose und deren Behandlung durch Gastroenterostomie. Kiel, 1902. 8°.
- Höft R.* — Ein Fall von Magenkrebs und krebzigem Duodenalgeschwür. Kiel, 1902, 8°.
- Holzhausen Th.* — Beitrag zur Exstirpation des Thränensackes. Kiel 1902. 8°.
- Honneth A.* — Ueber Nierenzerreissungen, nebst Mittheilungen eines Falles aus der chirurgischen Klinik. Kiel, 1902. 8°.
- Hopf O.* — Zur pathologischen Anatomie des angeborenen Irismangels. Eisenach, s. a. 8°.
- Hoppe A.* — Statistischer Beitrag zur Kenntniss der progressiven Paralyse. Kiel, 1902. 8°.
- Hosemann G.* — Ueber einen Fall von fulminanter Embolie nach Perityphlitis. Kiel, 1902. 8°.
- Hövelmann R.* — Klinische und pathologisch-anatomische Untersuchung eines Falles von Wirbelfraktur und Compressionsmyelitis. Kiel, 1902. 8°.
- Hüttner M.* — Zur Psychologie des Zeitbewusstseins bei kontinuierlichen Lichtreizen. Leipzig, 1902. 8°.
- Illmann A.* — Zur Casuistik der Myositis ossificans. Kiel, 1901. 8°.
- Isermeyer R.* — Ueber die Häufigkeit einseitiger Nierentuberkulose. Ein Beitrag zur Nierenchirurgie. Kiel, 1902. 8°.
- Jacobi C.* — Beiträge zur Kenntnis der Pyrroline. Jena, 1901. 8°.
- Jacobsthal E.* — Typhusbazillen beim Rinde. Strassburg, 1902. 8°.
- Jaehne A.* — Ueber diabetische und senile Gangrän, insbesondere über den Ausgang der Amputationen nach derselben. Jena, 1901. 8°.
- Jahr R.* — Ueber künstliche Reifung immaturer Katarakte durch Massage. Jena, 1902. 8°.
- Janensch W.* — Die Jurensisschichten des Elsass. Strassburg., 1902. 8°.
- Janssen A.* — Unsere Plattfussbehandlung. Kiel, 1901. 8°.
- Jehl P.* — Ueber die sechs stereoisomeren Phenylparaconsäuren. Strassburg, 1901. 8°.
- Jenkins J. T.* — Alterbestimmung durch Otolithen bei den Clupeiden. Kiel, 1902. 4°.
- Jerke M.* — Zur Kenntnis der Oxyuren des Pferdes. Jena, 1901. 8°.
- Job K.* — Ueber die Dauer der Immunität nach der Vaccination und nach spontanem Ueberstehen der Pocken. Strassburg, 1901. 8°.

- Jouck K.* — Beiträge zur Kenntnis der Blausäure abspaltenden Glycoside. Strassburg, 1902. 8°.
- Junker H.* — Ueber Abkömmlinge der Tetronsäure und Bistetronsäure. Jena, 1901. 8°.
- Kaeuffer F.* — Ueber Laparatomie bei freier intraperitonealer Blutung infolge von frühgeborstener Tubenschwangerschaft. Kiel, 1901. 8°.
- Kammann O.* — Ueber Einwirkung des Chlors auf den m-Oxybenzaldehyd. Kiel, 1902. 8°.
- Kampmann E.* — Ueber die ursächlichen Beziehungen von Trauma und Gallenblasenerkrankungen. Strassburg, 1901. 8°.
- Kampsmeyer A.* — Zur Lehre der Chorea chronica progressiva. Lubbecke, 1902. 8°.
- Кауфмана М.* — Къ учению о разрывахъ влагалищнаго свода во время родовъ. Юрьевъ, 1901. 8°.
- Kaufmann W.* — Günstige Beeinflussung einer bestehenden Infektionskrankheit durch eine hinzutretende zweite. Kiel, 1901. 8°.
- Kessler R.* — Die Voroperation zur Freilegung und Exstirpation der Samenblasen und des Endstückes der Samenleiter. Kiel, 1901. 8°.
- Kessler C.* — Bericht über 31 Fälle von Dickdarmtumoren. Jena, 1902. 8°.
- Kettner A. H. E.* — Ueber Fütterungsversuche mit Chondroitinschwefelsäure. Leipzig, 1902. 8°.
- Kleberger W.* — Beitrag zur Beantwortung der Frage: „Welcher Zusammenhang besteht beim Rinde zwischen der Milchergiebigkeit und den durch Masse feststellbaren Formen des Tierkörpers?“. Jena, 1902. 8°.
- Kleinmanns J.* — Beitrag zur Lehre von den nach Kopftrauma auftretenden Geistesstörungen. Kiel, 1902. 8°.
- Kleinsorge J.* — Geschichte und Förderungsmassnahmen der landwirtschaftlichen Tierzucht Westfalens. Weilburg, 1902. 8°.
- Klemm W.* — Menstruatio praecox. Coburg, 1902. 8°.
- Klotzsch E.* — Ein Fall von Oesophagusdivertikel, operiert und geheilt. Kiel, 1902. 8°.
- Koch K.* — Ueber Fremdkörperverletzungen der vorderen Augenkammer. Jena, 1901. 8°.
- Kochmann M.* — Ueber Mischnarkosen. Jena, 1902. 8°.
- Koenig J.* — Ueber das Mucodilacton und die Mucolactonsäure. Strassburg, 1901. 8°.
- Koepp E.* — Ein Fall von Magencarcinom um eines altes Magenulcus mit Pleura- u. Peritoneumcarcinose. Kiel, 1901. 8°.
- Koeppen A.* — Ueber das Nonodilacton. Strassburg, 1902. 8°.
- Köhler W.* — Ueber einen Fall von Schulterverrenkung mit gleichzeitigem Torsionsbruche des Oberarmes. Kiel, 1901. 8°.

- König H.* — Ueber Kehlkopferkrankungen insbesondere über einen Fall von schwerer Kehlkopfgangrän bei Typhus abdominalis. Jena, 1900. 8°.
- Копыловъ Н. В.* — Шовъ пузыря при операциі каменной болѣзни по наблюденіямъ въ Пензенской больницѣ. Юрьевъ, 1901. 8°.
- Korn H.* — Ein Fall von Schussverletzung des Schädels und der Lunge. Kiel, 1902. 8°.
- Knabe H.* — Untersuchungen über die Lebensdauer nach erworbener Syphilis. Jena, 1902. 8°.
- Knochendöppel C.* — Ueber den Einfluss eines magnetischen Feldes auf das Entladungspotential in Geissler'schen Röhren. 1901. 8°.
- Kramm F.* — Die operative Behandlung der hochgradigen Myopie in der Universitäts-Klinik für Augenkrankheiten zu Strassburg. Strassburg, 1901. 8°.
- Krause L.* — Zur Casuistik der Exstirpation des Ganglion Gasseri. Kiel, 1902. 8°.
- Krücke L.* — Ein Fall von eitrig entzündeter Paehymeningitis haemorrhagica bei Difterie. Kiel, 1902. 8°.
- Krüger E.* — Fälle von Gangrän des Unterschenkels. Kiel, 1901. 8°.
- Krüger J.* — Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Wärmeleitung von Gläsern. Jena, 1901. 8°.
- Kuntzsch K.* — Beitrag zur diagnostischen Bedeutung der elektrischen Untersuchung des Gehörorgans. Kiel, 1901. 8°.
- Купница И. Д.* — Дальнѣйшія изслѣдованія относительно вредныхъ свойствъ Нефти и ея продуктовъ для рыбъ и животныхъ. С.-Петербургъ, 1901. 8°.
- Küchenhoff N.* — Ueber den otitischen Gehirnabscess und seine Folgerscheinungen, insbesondere die sensorische Aphonie. Kiel, 1902. 8°.
- Ладыженскаго М. А.* — Героинъ и кодеинъ (діацетилъ-и метилъ-морфинъ) и ихъ сравнительное фармакол огическое дѣйствіе на животный организмъ. Юрьевъ, 1901. 8°.
- Lange H.* — Beiträge zur Kenntnis der Pyrrole. Jena, 1901. 8°.
- Laplanche H.* — Ein Fall von Pankreas-Blutung und Fettgewebs-Nekrose. Kiel, 1901. 8°.
- Laval P. O.* — Ueber einen seltenen Fall von Missbildung der Arteria pulmonalis. Magdeburg, 1901. 8°.
- Leefhelm F.* — Ein Fall von Epitheliom des Unterkiefers nebst Bemerkungen über die Epitheliome der Kiefer im Allgemeinen. Kiel, 1902. 8°.
- Lehmann E.* — Ueber Pneumotyphus. Jena, 1902. 8°.
- Lehmann W.* — Beiträge zur Kenntnis der Acetalisierung bei den Aldehyden und Diacylmethanen. Kiel, 1902. 8°.
- Lemmermann O.* — Kritische Studien über Denitrifikationsvorgänge. Jena, 1900. 8°.

- Lengefeld H.* — Ueber die Erfolge der konservativen Behandlung der Appendicitis in der ärztlichen Praxis. Jena, 1901. 8°.
- Lentz F.* — Ueber Dioxysäuren und ein Dilacton aus dem Acetonylacetone. Strassburg, 1901. 8°.
- Levi H.* — Hysterie und progr. Paralyse, ein Beitrag zur Lehre der Combination organischer Hirn- und Rückenmarkskrankheiten mit Hysterie. Strassburg, 1901. 8°.
- Lichtenberg F.* — Ueber die Beweglichkeit des Beckens von Neugeborenen. Leipzig, 1902. 8°.
- Liebetrau H.* — Ueber primäre Sarkome des Calcaneus. Eisenach, 1902. 8°.
- Lippe A.* — Drei Fälle von Tetanus. Kiel, 1901. 8°.
- Lindig F.* — Ueber den Einfluss der Phasen auf die Klangfarbe. Voorde, 1902. 8°.
- Lommel F.* — Klinische Beobachtungen über Herzarhythmie. Naumburg, 1902. 8°.
- Lorenz O.* — Cavernöses Angiom des Rückenmarkes. Tödliche Blutung. Jena, 1901. 8°.
- Ludewig A.* — Ueber die in den letzten drei Jahren in der hiesigen chirurgischen Klinik zur Behandlung gekommenen Fälle von Struma. Kiel, 1902. 8°.
- Lurie M.* — Ueber  $\alpha$ -Aethyl  $\beta$ -oxybuttersäure und ihre Spaltungsprodukte. Strassburg, 1902. 8°.
- Lühmann O.* — Ein Fall von Spindelzellensarkom des Uterus mit multipler Metastasenbildung. Kiel, 1902. 8°.
- Lülfing H.* — Aetiologie und Therapie der akuten Osteomyelitis. Wurzen, 1902. 8°.
- Macintyre A. E.* — Ueber einige neue Basen der Camphergruppe. Jena, 1900. 8°.
- Mandelstam L.* — Bestimmung der Schwingungsdauer der oscillatorischen Condensatoren-Entladung. Strassburg, 1902. 8°.
- Manger C.* — Ueber das Auftreten von Brustdrüsenkrebs beim Manne, Jena, 1901. 8°.
- Mannes A.* — Ein Fall von posttyphöser Lähmung mit begleitenden psychischen Störungen (Korsakow'sche Psychose). Jena, 1902. 8°.
- Мазинга П. Ф.* — Химико-санитарное исследование продажнаго хлѣба въ городѣ юрьевѣ. Юрьевъ, 1901, 8°.
- Masch C.* — Intensität und atmosphärische Absorption aktinischer Sonnenstrahlen. Kiel, 1901. 8°.
- Mau A.* — Ueber primären Leberkrebs. Hamburg und Leipzig, 1901. 8°.
- Meder O.* — Beiträge zur Kenntnis der Pyrazolgruppe. Jena, 1901. 8°.
- Mehnert G.* — Ein seltener Fall von Splitterfractur der oberen Tibiaepiphyse mit Zerreiſsung der Arteria poplitea und nachfolgender Gangrän des Unterschenkels bei einem Tabiker. Kiel, 1902. 8°.

- Meller A.* — Zur Behandlung der Ruptur der männlichen Harnröhre. Kiel, 1901. 8°.
- Merkel A.* — Stoffwechselprodukte des Chinin. Leipzig, 1902. 8°.
- Mertz K.* — Ueber Verletzungen des Halsmarks, mit besonderer Berücksichtigung eines Falles von Schussverletzung mit hohen Temperaturen. Strassburg, 1902, 8°.
- Methling C.* — Zur Kenntnis des Vorkommens accidenteller Herzgeräusche in den ersten Lebensjahren. Kiel, 1901. 8°.
- Metz M.* — Ein klinischer Beitrag zur Casuistik der Carcinome und Sarcome des Oberkiefers. Jena, 1902. 8°.
- Meyer C.* — Zur pathologischen Anatomie der Eisensplitterverletzungen des Auges. Jena, 1901. 8°.
- Meyer E.* — Ueber den Bakteriengehalt der Jll oberhalb der Einmündung Strassburger Schmutzwässer. Strassburg, 1901. 8°.
- Meyer F.* — Ueber die Endresultate der operativen Behandlung tuberkulöser Lymphome. Kiel, 1902. 8°.
- Michaelis R.* — Combination von tertiären Lues mit primärem Cylinderzellen-carcinom an der Wandung der Nasenhöhle. Wiesbaden, 1901. 8°.
- Michels W.* — Zur Entstehung des fadenziehenden Brotes. Königsberg, 1902. 8°.
- Milham W. J.* — Ueber die Verwendbarkeit der Braun'schen Röhre zur Messung elektrischer Felder. Strassburg, 1901. 8°.
- Minssen O.* — Angina und Polyarthrits rheumatica. Kiel, 1901. 8°.
- Möhring C.* — Gelenkneurosen und Gelenkneuralgien. Stuttgart, 1901. 8°.
- Morawitz P.* — Zur Kenntniss der Knorpelkapseln und Chondrinballen des hyalinen Knorpels. Bonn, 1902. 8°.
- Müller A.* — Zur Casuistik der Schädelverletzungen mit besonderer Berücksichtigung ausgedehnter praeduraler Haematome. Kiel, 1902, 8°.
- Zur Lehre der Dystrophia muscularis progressiva — juvenile Form mit Beteiligung der Gesichtsmuskulatur und hereditäre Form. Lubbecke, 1902. 8°.
- Müller E.* — Zur Statistik der Aneurysmen. Jena, 1902. 8°.
- Müller F.* — Ueber die Aufspaltung des Antipyrins durch Hydrazine. Jena, 1902. 8°.
- Müller F. W.* — Über Kohärer insbesondere Untersuchung der Abhängigkeit des Kohärerkontaktwiderstandes von der Stromstärke. Strassburg, 1901. 8°.
- Müller H.* — Ueber die in der Kieler chirurgischen Klinik in den Jahren 1899, 1900 und 1901 beobachteten Fälle von Kryptorchismus. Kiel, 1902. 8°.
- Müller K.* — Ueber vordere traumatische Hüftgelenksluxationen, insbesondere über solche des höheren Alters. Kiel, 1902.
- Müller Reinh.* — Die Gallensteinoperationen der chirurgischen Klinik zu Kiel aus den Jahren 1899-1901. Kiel, 1902. 8°.

- Müller Rud.* — Ein Beitrag zur Casuistik der interparietalen Hernien. Kiel, 1901. 8°.
- Nahmmacher H. C.* — Zwei Fälle von primärem Carcinom der Vulva. Kiel, 1901, 8°.
- Nicks W.* — Zwei Beiträge zur Kasuistik der Tuberculosis herniosa. Kiel, 1902. 8°.
- Nitzsche E.* — Beitrag zur Kenntnis der Augenerkrankungen bei Diabetes mellitus. Jena, 1901. 8°.
- Noll A.* — Morphologische Veränderungen der Tränendrüse bei der Secretion. Zugleich ein Beitrag zur Granula-Lehre. Frankfurt, 1901 8°.
- Nordauhsen M.* — Untersuchungen über Asymmetrie von Laubblättern höherer Pflanzen nebst Bemerkungen zur Anisophyllie. Leipzig, 1902. 8°.
- Oppeheimer M.* — Beitrag zur Kasuistik der Nerven Chirurgie (Neurolysis und Nerven naht). Kiel, 1902. 8°.
- Оссендовскаго В. — Къ вопросу объ измѣненіи крови у сифилитиковъ подъ вліяніемъ леченія. Рига, 1902. 8°.
- Otten M.* — Ein Fall von Stichverletzung der arteria brachialis. Kiel, 1901. 8°.
- Otto A.* — Lupusbehandlung in der Kieler chirurgischen Klinik. Kiel, 1902. 8°.
- Paetzold E.* — Beiträge zur pharmacognostischen und chemischen Kenntnis des Harzes und Holzes von Guajacum officinale L. sowie des „Palo Balsamo“. Strassburg, 1901. 8°.
- Панова Н. — О бугорчаткѣ, вызываемой у животныхъ мертвыми туберкулезными бактеріями. Юрьевъ.
- Parczewski (E. von)* — Prognose der Zangenoperationen nach den Resultaten der Universitätsklinik zu Strassburg in den 10 Jahren 1891-1900. Strassburg, 1902. 8°.
- Pentz A.* — Zur Behandlung der Varicen und der varicösen Ulcera. Kiel, 1902. 8°.
- Perlewitz P.* — Versuch einer Darstellung der Isothermen des Deutschen Reichs für Jahr. Januar und Juli nebst Untersuchungen über regionale thermische Anomalieen. (Mit 3 Karten). Stuttgart, 1902. 8°.
- Pernhorst G.* — Ueber die Entstehung von peritonealen Verwachsungen nach Laparatomie. Kiel, 1901. 8°.
- Peters A.* — Zur Kasuistik der schwersten Formen von Perityphlitis. Kiel, 1902. 8°.
- Pfannkuche A.* — Zur Kenntniss der serösen Peritonitis und der Perihepatitis im Zusammenhang mit Pericarditis und Pleuritis. Kiel, 1901. 8°.
- Pinczakowski F.* — Die Verbreitung des Trachoms in Schleswig-Holstein. Kiel, 1901. 8°.
- Prahl E.* — Zur Frage des durch ein Trauma bedingten Locus minoris resistentiae in Knochen und Gelenken. Kiel, 1902. 8°.

- Preller K.* — Ueber Keratoconus, besonders den pulsierenden. Jena, 1902. 8°.
- Raben E.* — Beiträge zur Kenntniss der Acetalisirung bei den Aldehyden  
\* und Ketonen. Kiel, 1902. 8°.
- Rechenberg (E. v.)* — Ueber Einschränkung des Getreidebaues zu Gunsten  
der Viehhaltung. Neiste, 1902. 8°.
- Reek Th.* — Beitrag zur Symptomatologie der Paralysis agitans. Kiel, 1902. 8°.
- Rehekampff A. v.* — Die wirtschaftlichen Verhältnisse des baltischen Insel-  
bezirks. Jena, 1901. 8°.
- Reibisch J.* — Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Entwicklung von  
Fisch-Eiern. Kiel, 1902. 4°.
- Reinecke R.* — Ein Fall von Aorten-Aneurisma mit Lungengangrän. Kiel,  
1902. 8°.
- Reiss Ed.* — Klinische Beobachtungen über Osteomyelitis der langen Röh-  
renknochen, besonders in Bezug auf die Epiphysenknorpelfuge und die  
begleitenden Gelenkaffektionen. Berlin, 1901. 8°.
- Reiss Em.* — Der Brechungskoeffizient des Blutserums als Indikator für den  
Eiweissgehalt. Strassburg, 1902. 8°.
- Revenstorf H.* — Ueber die Implantation der Ureteren in den Darm zur  
Heilung der Ektopia vesicae. Kiel, 1901. 8°.
- Richter A.* — Zwei Fälle von Aktinomykose als Beitrag zur Kenntnis der  
Generalisation aktinomykotischer Erkrankungen. Kiel, 1901. 8°.
- Rigler O.* — Die Aktinomykose in Thüringen. Jena, 1901. 8°.
- Rödiger C.* — Untersuchungen über das Doppelsternsystem Algal. Königs-  
berg, 1902. 8°.
- Rohmer P.* — Ueber Knochenbildung in verkalkten endocarditischen und  
endarteritischen Heerden. Berlin, 1901. 8°.
- Roosen-Runge C.* — Ueber die Bedeutung des Trauma in der Aetiologie der  
disseminirten Fettgewebsnekrose. Berlin, 1902. 8°.
- Rosell M.* — Ueber Nachweis und Verbreitung intracellulärer Fermente.  
Strassburg, 1901. 8°.
- Rosenthaler L.* — Phytochemische Untersuchung der Fischfangpflanze *Ver-  
bascum sinuatum* L. und einiger anderer Scrophulariaceen. Frankfurt,  
1901. 8°.
- Rössler P.* — Ueber einige Derivate des Aethanolamins. Jena, 1902. 8°.
- Rost G.* — Ein Beitrag zu den Vaginalcysten. Kiel, 1902, 8°.
- Rostock R.* — Ueber Aufnahme und Leitung des Wassers in der Laub-  
moospflanze. Erfurt, 1902. 8°.
- Rothmann J.* — Ueber das Vorkommen von Hydrocele bei Kryptorchismus.  
Kiel, 1902. 8°.
- Rücker H.* — Zur Kenntnis des Hämatoporphyrins und seiner Derivate.  
Strassburg, 1901. 8°.
- Saathoff L.* — Ein Fall von fast völliger fibröser Entartung der rechten  
Herzkammer. Kiel, 1902, 8°.

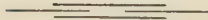
- Salomon O.* — Zur Kenntnis des Schrophuloderma. Kiel, 1901. 8°.
- Sauer F.* — Ueber einen eigentümlichen Fall von Luxatio patellae lateralis. Kiel, 1902. 8°.
- Schaumann L.* — Ueber  $\beta$ -Benzyltetrahydroisochinolin und demselben nahe-stehende Körper, nebst Beiträgen zur Kenntnis des  $\alpha$ -Benzylisochinolins. Kiel, 1902. 8°.
- Schaaß E.* — Die Methoden der Behandlung des Keratoconus. Strassburg, 1902. 8°.
- Schaeffer F.* — Zur Frage der Behandlung der Uterusruptur. Strassburg, 1902. 8°.
- Scheitz P.* — Die Exarticulatio femoris, ihre Geschichte und moderne Aus-führung. Jena, 1901. 8°.
- Schierning F.* — Ueber Stenose und ulceröse Zerstörung des Duodenums durch zerfallende käsige Portaldrüsen, grosse verkäsende Tumoren der Leber. Kiel, 1902. 8°.
- Schlagintweit O.* — Ueber Balkengeschwülste. Coburg, 1901. 8°.
- Schlegel M.* — Ueber physiologische und durch thermische Eingriffe bedingte Veränderungen der Trockensubstanz des Blutes. Jena, 1902. 8°.
- Schlüter R.* — Ein Fall von Carcinom des Pharynx und Larynx. Kiel, 1902. 8°.
- Schmitz F.* — Ueber Psychosen bei Herzfehlern. Kiel, 1902. 8°.
- Schneider A.* — Ein Beitrag zur Anatomie der Scheitelbeine des Menschen und der Affen. Strassburg, 1902. 8°.
- Schneider C.* — Zur Pathologie und Therapie eines durch Steinbildung in einem Ureter und Pyonephrose complicirten Falles von Inversio vesicae. Kiel, 1901. 8°.
- Schuster O.* — Ueber die Tuberkulose bei Handwerksburschen, Gelegenheits-arbeitern und Landstreichern. Kiel, 1901. 8°.
- Schütze J.* — Ueber Orbitalphlegmone nebst pathologisch-anatomischem Be-fund der in einem der Fälle beobachteten Skleral- und Cornealulceration. Jena, 1900. 8°.
- Schwenk J.* — Ueber die Endausgänge der Kalkverletzungen des Auges auf Grund von Beobachtung an der Strassburger Universitäts-Augenklinik. Strassburg, 1901. 8°.
- Schwarz W.* — Zur Würdigung der subkutanen Gelatine-Injectionen. Kiel, 1902. 8°.
- Smyth M.* — Beiträge zur Kenntniss der isomeren Diacetylbernsteinisäureester. Jena, 1901. 8°.
- Шиллинга Л. Г. — Материалы къ Фармакологин Ruta graveolens L. Юрьевъ, 1902. 8°.
- Soellner J.* — Geognostische Beschreibung der Schwarzen Berge in der süd-lichen Rhön. Berlin, 1901. 8°.

- Specht W.* — Zur Pathologie der Intentionspsychosen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Beziehung zu symptomatologisch ähnlichen Krankheitsbildern. Weimar, 1900. 8°.
- Spethmann H.* — Ueber Mammacarcinome. 42 Fälle aus der chirurgischen Klinik zu Kiel. Kiel, 1902. 8°.
- Spiethoff B.* — Ueber den Blutdruck bei Morbus Basedow. Altenburg, 1902. 8°.
- Spiller K.* — Ueber Amaurose nach Blutungen. Lübeck, 1901. 8°.
- Springer E.* — Beiträge zur analitischen und toxikologischen Chemie der Alkaloide. Breslau, 1901. 8°.
- Stadtmayr F.* — Ueber die Einwirkung von Natronlauge auf  $\beta$ -Bromphenylbutyrolacton. Strassburg, 1902. 8°.
- Starcke E.* — Zur congenitalen Chorea. Jena, 1900. 8°.
- Stark O.* — Ueber ein Diketonsäure und ein Ketolacton aus dem Acetylaceton. Strassburg, 1902. 8°.
- Steffen W.* — Histologische Untersuchung eines Falles von Dystrofia musculorum progressiva. Kiel, 1901. 8°.
- Stein A.* — Die Spätausgänge der Extrauterinschwangerschaft. Strassburg, 1901. 8°.
- Stelling H.* — Ein Fall von Stichverletzung der Arteria glutea. Kiel, 1902. 8°.
- Stickel M.* — Über doppelte Perforation des Augapfels durch Schussverletzung. Jena, 1901. 8°.
- Straehler L.* — Nephrolithiasis mit besonderer Berücksichtigung durch Röntgenstrahlen und Heilung durch Nephrotomie. Jena, 1900. 8°.
- Strassburg H.* — Ueber Peritonitis tuberculosa. Kiel, 1901. 8°.
- Stroehlein R.* — Ein Fall von ausgedehnter Thrombose des erweiterten linken Ventrikels. Kiel, 1901. 8°.
- Strohl E.* — Die Masernmortalität, ihr Verhältnis zu der an Scharlach, ihr Einfluss auf die Gesamtmortalität. Strassburg, 1901. 8°.
- Titschack F.* — Zur Casuistik des Mal perforant du pied mit besondere Berücksichtigung der hereditären Anlage. Kiel, 1902. 8°.
- Theodore E.* — Experimenteller Beitrag zur zeitlichen Entwicklung der secundären Degeneration im Hunderückenmark. Strassburg, 1902. 8°.
- Treff W.* — Ueber Pyrrolverbindungen der Camphergruppe. Leipzig, 1900. 8°.
- Trommsdorff H.* — Die Dispersion Jenaer Gläser im ultravioletten Strahlengebiet. Jena, 1901. 8°.
- Ulrich K.* — Die Bestäubung und Befruchtung der Roggens. Halle, 1902. 8°.
- Varley W. M.* — Ueber den im Eisen durch schnell oscillierende Stromfelder inducierten Magnetismus. Strassburg, 1901. 8°.
- Vix W.* — Ein Fall symmetrische von Gangrän der Lider und der Thränensackgegend Jena, 1901. 8°.
- Voretzsch O.* — Beitrag zur Statistik der Oesophagusdivertikel. Kiel, 1901. 8°.
- Vogel K.* — Einwirkung von Aldehyden auf Aceton-oxalester. Kiel, 1901. 8°.

- Vollner Th.* — Ein Fall von Aneurisma des Arcus mit Durchbruch in den Herzbeutel. Kiel, 1902. 8°.
- Wachter E.* — Ueber angeboren Hochstand des Schulterblattes Strassburg, 1901. 8°.
- Wagener O.* — Ueber die Methoden der Freilegung des Herzens zur Vornahme der Naht nach Verletzungen. Kiel, 1902. 8°.
- Walbaum H.* — Zur Methodik der bakteriologischen Wasseruntersuchung mit Angaben über Bereitung des Nähragars. Jena, 1901. 8°.
- Wallerstein S.* — Quantitative Bestimmung der Globuline im Blutserum und in anderen thierischen Flüssigkeiten. Strassburg, 1902. 8°.
- Wandersleb E.* — Ueber die anormale Aenderung des longitudinalen Elastizitätsmoduls einiger Gläser mit der Temperatur und die Ueberführung des nach Erhitzungen sich ergebenden Akkomodationszustandes in einen elastischen Normalzustand mittels gewisser Schwingungen. Jena, 1901. 4°.
- Waldschmidt M.* — Ueber die Erfahrungen bei der operativen Behandlung von Retrodeviationen des Uterus durch Verkürzung und Fixation der Ligamenta rotunda. Kiel, 1902. 8°.
- Waltermann A.* — Die Laparatomie bei Darminvagination im Kindesalter. Kiel 1902. 8°.
- Weber H.* — Ueber psychische Störungen bei Herzkranken. Jena, 1901. 8°.
- Weeber M.* — Ueber uterus bicornis unicollis und seine Beziehungen zu Schwangerschaft und Geburt. Strassburg, 1903. 8°.
- Weidanz O.* — Ueber spastische Oesophagustenosen. Kiel, 1902. 8°.
- Weigand F.* — Beiträge zur Kenntnis des Phenylpropargylaldehyds und des Monobromzimmtaldehyds. Kiel, 1902. 8°.
- Weinnoldt E.* — Ueber die Konstruktion von Isophengen auf Flächen 2. Ordnung. Leipzig, 1901. 8°.
- Weirich J.* — Ueber zwei Fälle von angeborenem Myxoedem. Coburg, 1901. 8°.
- Weiser O.* — Ein Fall von glaukomatöser Jritis. Jena, 1900. 8°.
- Weispfenning F.* — Zur operativen Behandlung des durch Lebereirrhose bedingten Ascites. Talma'sche Operation. Kiel, 1902. 8°.
- Weiss F.* — Die geodätischen Linien auf dem Catenoid. 8°.
- Weiss R.* — Ueber Cinnamylessigester und die beiden ( $\alpha$ - und  $\beta$ -) Naptoyl-essigester, nebst einigen Abkömmlingen derselben. Kiel, 1902. 8°.
- Weissbach E.* — Pathologisch-anatomische Untersuchung eines infolge von Exophthalmus pulsans erblindeten Auges. Jena, 1901. 8°.
- Wendt B.* — Ueber einen Fall von doppelseitiger metastatischen Ophthalmie bei einem 24 Wochen alten Kinde. Erlangen, 1901. 8°.
- Werner C.* — Zur Aetiologie der Spitzentuberkulose. Jena, 1901. 8°.
- Wessling F.* — Ueber einen Fall von eitriger Glaskörperinfiltration, ausgehende von einer Operationsnarbe. Jena, 1900. 8°.

- Westheimer B.* — Ueber den heutigen Stand der Lehre von der Angina lacunaris. Strassburg, 1901. 8°.
- Widera R.* — Pharmakognostisch-chemische Studie über die Verbreitung des Berberins, insbesondere in der Gattung Xanthoxylon. Strassburg, 1902. 8°.
- Wiens P.* — Ueber den Zusammenhang zwischen plötzlichen Todesfällen im Wasser und Veränderungen der Thymusdrüse. Kiel, 1902. 8°.
- Wilde P.* — Casuistischer Beitrag zur Embolie der Pulmonarterie bei Fracturen. Kiel, 1902. 8°.
- Wilke F.* — Ein Beitrag zur Würdigung der extracraniellen Resection des III Trigeminasastes nach Kocher. Kiel, 1902. 8°.
- Winter E.* — Ueber secundäre Degeneration nebst Bemerkungen über das Verhalten der Patellarreflexe bei hoher Querschnittsläsion des Rückenmarks. Berlin, 1902. 8°.
- Wilp J.* — Zur Kasuistik der Cucullarislähmungen. Kiel, 1902. 8°.
- Windrath F.* — Ueber Gastroenterostomie nebst Mittheilungen der vom 1, IV, 1899 bis 1, IV, 1901 and der chirurgischen Klinik zu Kiel zur Operation gelangten Fälle. Kiel, 1902. 8°.
- Wortmann J.* — Ein Fall von Enchondrom der Tibia. Kiel, 1902. 8°.
- Witschel. W. K.* — Ueber Ausfallerscheinungen nach Entfernung des weiblichen Sexualorgane. Strassburg, 1902.
- Worbes C.* — Das Krankheitsbild „Myokymie“. Erfurt, 1901. 8°.
- Woringer K. E.* — Ueber eine neue Methode die Lage des zweiten Herztons auf dem Kardiogramm zu bestimmen. Strassburg, 1901. 8°.
- Wübbena W.* — Zur Statistik der Keratitiden. Kiel, 1902. 8°.

V. C.



## INDICE DEL VOLUME XII, SERIE 5<sup>a</sup>. — RENDICONTI

1903 — 1° SEMESTRE.

### INDICE PER AUTORI

#### A

- ACCADEMIA. Deliberazione relativa ai premi Reali non conferiti. 548.
- AGAMENNONE. « Contributo alla storia del magnetismo terrestre ». 425.
- ANGELI e ANGELICO. « Sopra i nitropirroli ». 317; 344.
- ID. ID. e CASTELLANA. « Sopra alcuni derivati della canfora ». 428.
- ANGELICO. — V. *Angeli*.
- ARTOM. « Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica ». 147; 197.

#### B

- BARTOLI. Apertura di un piego suggellato da lui depositato nel 1882; la Memoria nel piego contenuta è rinviata all'esame di una Commissione. 100. — Relazione sulla precedente Memoria. 257.
- BIANCHI. « Sulle quadriche coniugate in deformazione ». 215.
- « Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni ». 224; 287.
- BRONDI. « Chiluria da filaria sanguinis hominis nocturna in Europa ». 538.

BISCONCINI. « Sulle vibrazioni trasversali di una lamina, che dipendono da due soli parametri ». 385.

BLASERNA (Vicepresidente). Presenta il 2° volume della Relazione sulla spedizione della « Stella Polare » inviato in dono da S. A. R. il Duca degli Abruzzi; e ne parla. 99.

— Propone, e l'Accademia approva, l'invio di un telegramma di felicitazione a G. Marconi per i risultati da lui recentemente ottenuti colla telegrafia senza fili. 22.

— Presenta il sig. Marconi all'Accademia e lo invita a fare una comunicazione. 363.

— « Commemorazione del Socio straniero von Wild ». 179.

BOGGIO. « Sulla legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di due cariche elettriche in movimento ». 507.

BORZI. « Biologia dei semi di alcune specie d'Inga ». 73; 126.

BRIZI. « Sulla Botrytis citricola n. sp. parassita degli agrumi ». 274; 318.

BRUNI e PADOA. « Nuove ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo ». 348.

BURGATTI. « Sulle condizioni d'integrabi-

lità di un particolare sistema d'equazioni alle derivate parziali, e loro applicazione a un problema di geometria n. 140.

## C

- CAPELLI. « Sulle relazioni algebriche fra le funzioni  $\theta$  di una variabile e sul teorema di addizione n. 152; 224.
- CAPELLINI. Fa omaggio di alcune pubblicazioni del Socio straniero *Lepsius* e ne parla. 181.
- CARPINI. « Variazioni dell'attrito interno dei liquidi magnetici in campo magnetico n. 341.
- CASTELLANA. — V. *Angeli*.
- CATTADORI. — V. *Plancher*.
- CERRUTI (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti. 23; 101; 181; 283; 363; 452.
- Presenta le pubblicazioni dei Soci: *Becconi*. 363; *Helmert*. 21; *de Lapparent*. 283; *Fischer*. 99; *Fouqué*. 283; *Jannsen*. 21; *Klein*. 180; *Lockyer*. 99; 363; *Noether*. 180; *Pascal*. 363; *Pflueger*. 21; 363; *Pirotta*. 99; *Pickering*, *Righi*, *Taramelli*. 363; *Wiesner*. 99; — e del prof. *C. Guidi*. 21.
- Fa menzione del vol. III delle « Opere di Galileo Galilei » e delle due pubblicazioni: « Il primo secolo dell'Ateneo di Brescia 1803-1902 » e « Joannis Bolyai in memoriam n. 99; di una Relazione della Società sismologica Italiana. 180; del fasc. 6° dell'Atlante fotografico della Luna. 180; del vol. IV, p. 1<sup>a</sup>, dell'opera: « The Danish Ingolf-Expedition » e del fasc. XXII delle Campagne del Principe di Monaco. 283; di alcune Note autobiografiche di Jac. Berzelius. 363.
- Fa omaggio di un opuscolo del prof. *Bortolotti* e ne parla. 214.
- Comunica gli elenchi dei lavori presentati per concorrere al premio Reale per l'*Astronomia*, a quelli del Ministero della P. I. per le *Scienze fisiche e chimiche* e al premio Carpi per la *Botanica*, pel 1902. 21; 100.

CHILESOTTI. « Sulla riduzione elettrolitica delle soluzioni acide di anidride moliblica e su alcuni composti del tricoloruro di molibdeno n. 515.

CHISTONI. « Misure pireliometriche eseguite a Corleto nell'estate del 1898 n. 10; 53.

— « Misure pireliometriche eseguite a Sestola e al Monte Cimone nell'estate 1899 n. 258.

CIAMICIAN e SILBER. « Azioni chimiche della luce n. 235.

CONTARINI. « Sul moto di un sistema olo-  
nomo di corpi rigidi n. 424; 507.

CREMONA. Annuncio della sua morte. 540.

## D

D'ACHIARDI. Annuncio della sua morte. 21.

DALL'ACQUA. « Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti n. 147; 153.

— « Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti n. 194; 243.

— « Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative n. 249; 332.

DE ANGELIS D'OSSAT. « Il *Clisiophyllum Thildae* n. sp. nel Parà n. 443; 515.

DE FRANCHIS. « Sulle corrispondenze algebriche fra due curve n. 194; 303.

DUCCESCHI. « Di una modificazione macroscopica del sangue che precede la coagulazione n. 94.

## E

ENRIQUES. « Sull'adattamento degli Infusori marini alla vita nell'acqua dolce n. 82.

— V. *Fano*.

## F

FANO ed ENRIQUES. « Sui così detti composti salino proteici n. 491.

FANTAPPIÈ. « Contribuzione allo studio dei Cimini n. 443.

— « Contribuzione allo studio dei Cimini. II. Sul Peperino n. 522.

- FOÀ. « Studio sui *Cytoryctes vaccinae* ». 88.  
FRATTINI. « Di un gruppo continuo di trasformazioni ». 48; 74.  
FUBINI. « Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito ». 158; 195.  
— « Ricerche gruppali relative alle equazioni della dinamica ». 424; 502.]

## G

- GEGENBAUR. Annuncio della sua morte. 540.  
GRASSI B. Fa omaggio di una sua pubblicazione. 363.  
— e MENARON. « Ricerche preliminari dirette a precisare la causa del gozzo e del cretinismo endemici ».  
GUGLIELMO. « Intorno ad un nuovo apparecchio per la determinazione dell'equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatometro, del termometro e dello psicometro ». 165; 204.  
— « Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido ». 165; 310.

## H

- HELBIG D. « Nuova sintesi dell'anidride nitrica ». 148; 211.  
— « Sintesi diretta dell'anidride nitrosa ». 148; 166.

## I

- INGHILLERI. « Sulla eziologia e patogenesi della peste rossa delle anguille ». 13.

## K

- KOERNER e VANZETTI. « Intorno all'olivile e la sua composizione e costituzione ». 73; 122.

## L

- LONGO. « La nutrizione dell'embrione delle *Cucurbita* operata per mezzo del tubetto pollinico ». 359.

## M

- MAFFUCCI. « I discendenti dei genitori tubercolotici (Polli) ». 421.  
MARCONI. Riceve dall'Accademia un telegramma di felicitazione. 22; ringrazia. 101.  
— Fa una comunicazione sulle sue esperienze riguardanti la sintonia, e i suoi impianti ultrapotenti. 363.  
MARRO. V. *Mosso*.  
MENGARINI. « Sulla coniugazione delle amebe ». 274.  
MENOZZI. « Identità della colesterina del latte con quella della bile ». 73; 126.  
MILLOSEVICH. « Osservazioni delle comete 1902 *d* Giacobini e 1903 *a* Giacobini, fatte all'equatoriale di 38 cm. ». 152.  
— « La stella nuova (variabile?) in Gemini. Le ultime posizioni della cometa 1903 *a* ». 234.  
— « Osservazioni dei pianetini LT ed LU Dugan. 1903 fatte all'equatoriale di 39 cm. del R. Osservatorio del Collegio Romano ». 420.  
MINISTERO DELLA MARINA. « Relazione sommaria sull'esperimento di radiotelegrafia sintonica eseguito a Spezia fra le stazioni di S. Vito, Palmaria e Livorno ». 389.  
MORERA. « Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton ». 73; 113; 149; 297.  
Mosso e MARRO. « L'acapnia prodotta nell'uomo dalla diminuita pressione barometrica ». 378; 453.  
— « Analisi del gas del sangue a differenti pressioni barometriche ». 378; 460.  
— « Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa ». 378; 466.

## N

- NICCOLETTI. « Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche ». 3.

O

- ODDO. « L'impiego di alcune anidridi e cloroanidridi in alcalimetria » n. 10; 58.  
— « Dosaggio volumetrico del rame per mezzo dello xantogenato potassico » n. 435.  
OEHL. Annunzio della sua morte. 362.

P

- PACINI. « Sulla scarica per effluvio in seno ai gas » n. 515.  
PADOA. « Nuove ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo » n. 391.  
— V. *Bruni*.  
PALATINI. « Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari » n. 378.  
PASCAL. « I problemi di riduzione di Pfaff e di Jacobi nel caso del second'ordine » n. 31.  
— « Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque » n. 325.  
— « Sulla costruzione dei simboli a carattere invariante nella teoria delle forme differenziali di ordine qualunque » n. 367.  
— « Una classe di covarianti simultanei di una forma differenziale di ordine qualunque, e di una alle derivate parziali » n. 399.  
PEGLION. « Di una speciale infezione crittogamica dei semi d'erba medica e di trifoglio » n. 270.  
PICCIATI. « Campo elettromagnetico generato da una carica elettrica in moto circolare uniforme » n. 10; 41.  
— « Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito » n. 147; 185.  
PIERI. « Uncinaria duodenalis e uncinaria americana » n. 148.  
PITTALUGA. « Sulla presenza e distribuzione del genere *Anopheles* in alcune regioni della penisola Iberica, e suoi rapporti col parassita della malaria umana » n. 454. 529.

- PLANCHER e CATTADORI. « Sull'ossidazione del dimetilpirrolo asimmetrico » n. 10.  
POUCHAIN. « Sulle esperienze di sintonia eseguite dalla R. Marina a Spezia » n. 390.

R

- RICCI. « Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni » n. 377; 409.  
RICCÒ « Lavoro della stazione internazionale nell'Osservatorio di Catania per la Carta fotografica del Cielo » n. 25.  
— « Riassunto delle determinazioni di gravità relative fatte nella Sicilia Orientale in Calabria e nelle isole Eolie » n. 421; 483.  
RIMATORI. « La Galena bismutifera di Rosas (Sulcis) e Blende di diverse località di Sardegna » n. 263.  
RÒITI e VOLTERRA. « Relazione su di una Memoria contenuta in un piego suggellato presentato nel 1882 dal prof. A. Bartoli » n. 257.

S

- SELLA. « Sensibilità del ferro alle onde elettriche nell'isteresi magneto-elastica » n. 340.  
STOKES. Annuncio della sua morte e sua Commemorazione. 174.

T

- TACCONI. « Sopra alcuni minerali del granito di Montorfano » n. 355.  
TODARO. Fa omaggio di una pubblicazione dei proff. *Marchiafava* e *Bignami* e ne parla. 21.

U

- ULPIANI. « Per la sintesi degli  $\alpha$ -nitroeteri » n. 439.

V

- VERONESE. « Relazione sul concorso al

premio Reale, del 1901, per la Matematica ». 540.

VITERBI. « Sull'equilibrio d'un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo ». 158; 249; 300.

VOLTERRA. « Commemorazione del Socio straniero *G. G. Stokes* ». 174.

— Presenta alcune pubblicazioni dei proff. *Günther* e *Lebon*. 540.

— Proposta relativa ai premi Reali non conferiti. 548.

VOLTERRA. V. *Rditi*.

## W

WILD. Annunzio della sua morte e sua Commemorazione. 179.

## Z

ZAMBIASI. « Composizione ottica dei movimenti vibratorii di tre o più suoni ». 48.

## INDICE PER MATERIE

---

### A

- ASTRONOMIA « Osservazioni delle comete 1902 *d* Giacobini e 1903 *a* Giacobini, fatte all'equatoriale di 38 cm. ». *E. Millosevich*. 152.
- « La stella nuova (variabile?) in Gemini. Le ultime posizioni della cometa 1903 *a* ». *Id.* 234.
- Osservazioni dei pianetini LT ed LU Dugan 1903 fatte all'equatoriale di 39 cm. del R. Osservatorio del Collegio Romano ». *Id.* 420.

### B

- BOTANICA. « Biologia dei semi di alcune specie d'Inga ». *A. Borzi*. 73; 126.
- « La nutrizione dell'embrione delle Cucurbita operata per mezzo del tubetto pollinico ». *B. Longo*. 359.

### C

- CHIMICA. « Sopra i nitropirrololi ». *A. Angelini* e *F. Angelico*. 317; 344.
- « Sopra alcuni derivati della canfora ». *Id. Id.* e *V. Castellana*. 428.
- « Nuove ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo ». *G. Bruni* e *M. Padoa*. 348.
- « Sulla riduzione elettrolitica delle soluzioni acide di anidride molibdenica e su alcuni composti del tricloruro di molibdeno ». *A. Chilesotti*. 515.
- « Azioni chimiche della luce ». *G. Ciamician* e *P. Silber*. 235.
- « Sintesi diretta dell'anidride nitrosa ». *D. Helbig*. 148; 166.
- « Nuova sintesi dell'anidride nitrica ». *Id.* 148; 211.

CHIMICA. « Intorno all'olivile e la sua composizione e costituzione ». *G. Koerner* e *L. Vanzetti*. 73; 122.

- « L'impiego di alcune anidridi e cloroanidridi in alcalimetria ». *B. Oddo*. 10; 58.
- « Dosaggio volumetrico del rame per mezzo dello xantogenato potassico ». *Id.* 435.
- « Nuove ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo ». *M. Padoa*. 391.
- « Sull'ossidazione del dimetilpirrolo asimmetrico ». *G. Plancher* e *F. Cattadori*. 10.
- « Per la sintesi degli  $\alpha$ -nitro-eteri ». *C. Ulpiani*. 439.

CHIMICA FISIOLOGICA. « Identità della colessterina del latte con quella della bile ». *A. Menozzi*. 73; 126.

Concorsi a premi. Elenchi dei lavori presentati per concorrere al premio Reale per l'*Astronomia*, a quelli del Ministero della P. I. per le *Scienze fisiche e chimiche*, e al premio Carpi per la *Botanica*, pel 1902. 21; 100.

- Tema del concorso al premio *Carpi* pel 1903-904. 100.
- Relazione sul concorso al premio Reale, del 1901, per la *Matematica*. 540.
- Corrispondenza relativa al cambio degli Atti. 23; 101; 181; 283; 363; 452.

### F

FISICA. « Sulla produzione dei raggi di forza elettrica a polarizzazione circolare od ellittica ». *A. Artom*. 147; 197.

- « Variazione dell'attrito interno dei liquidi magnetici in campo magnetico ». *C. Carpinì*. 341.
- « Intorno ad un nuovo apparecchio per

la determinazione dell'equivalente meccanico della caloria e ad alcune modificazioni del calorimetro solare, del dilatometro, del termometro e dello psicometro ». *G. Guglielmo*. 165; 204.

FISICA. « Intorno alla determinazione della densità e della massa di quantità minime di un solido ». *Id.* 165; 310.

— « Sulla scarica per effluvio in seno ai gas ». *D. Pacini*. 515.

— « Relazione su di una Memoria contenuta in un piego suggellato, presentato nel 1882 dal prof. *A. Bartoli* ». *A. Ròiti e V. Volterra*. 257.

— « Sensibilità del ferro alle onde elettriche nell'isteresi magneto-elastica ». *A. Sella*. 340.

— « Composizione ottica dei movimenti vibratorii di tre o più suoni ». *G. Zambiasi*. 48.

FISICA MATEMATICA. « Sulla legge elementare di Weber relativa alle azioni elettrodinamiche di due cariche elettriche in movimento ». *T. Boggio*. 507.

— « Campo elettromagnetico generato da una carica elettrica in moto circolare uniforme ». *G. Picciati*. 10; 41.

— « Campo elettromagnetico generato dal moto circolare uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito ». *Id.* 147; 185.

FISICA TERRESTRE. « Contributo alla storia del magnetismo terrestre ». *G. Agamennone*. 425.

— « Misure pireliometriche eseguite a Corleto nell'estate del 1898 ». *C. Chistoni*. 10; 53.

— « Misure pireliometriche eseguite a Setola e al Monte Cimone nell'estate 1899 ». *Id.* 258.

— « Riassunto delle determinazioni di gravità relative fatte nella Sicilia Orientale, in Calabria e nelle isole Eolie ». *A. Riccò*. 421; 483.

FISIOLOGIA. « Di una modificazione macroscopica del sangue che precede la coagulazione ». *V. Ducceschi*. 94.

— « Sui così detti composti salino-proteici. *G. Fano e P. Enriques*. 491.

— « L'acapnia prodotta nell'uomo dalla

diminuita pressione barometrica ». *Id.* 378; 453.

FISIOLOGIA. « Analisi del gas del sangue a differenti pressioni barometriche ». *A. Mosso e G. Marro*. 378; 460.

— « Le variazioni che succedono nei gas del sangue sulla vetta del Monte Rosa ». *Id. Id.* 378; 466.

FOTOGRAFIA DEL CIELO. « Lavoro della Stazione internazionale nell'Osservatorio di Catania per la Carta fotografica del Cielo ». *A. Riccò*. 25.

## G

GEOLOGIA. « Contribuzione allo studio dei Cimini ». *L. Fantappiè*. 443; 443.

— Contribuzione allo studio dei Cimini. II. Sul Peperino. *Id.* 522.

MATEMATICA. « Sulle quadriche coniugate in deformazione ». *L. Bianchi*. 215.

— « Sulla nozione di gruppo complementare e di gruppo derivato nella teoria dei gruppi continui di trasformazioni ». *Id.* 224; 287.

— « Sulle condizioni d'integrabilità di un particolare sistema d'equazioni alle derivate parziali, e loro applicazione a un problema di geometria ». *P. Burgatti*. 140.

— « Sulle relazioni algebriche fra le funzioni  $\mathfrak{S}$  di una variabile e sul teorema di addizione ». *A. Capelli*. 152; 224.

— « Sulle terne ortogonali di congruenze a invarianti costanti ». *A. F. Dall'Acqua*. 147; 153.

— « Sulle corrispondenze algebriche fra due curve ». *M. De Franchis*. 194; 303.

— « Di un gruppo continuo di trasformazioni ». *G. Frattini*. 48; 74.

— « Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito ». *G. Fubini*. 158; 195.

— « Ricerche gruppi relative alle equazioni della dinamica ». *Id.* 424; 502.

— « Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton ». *G. Morera*. 73; 113; 149; 297.

MATEMATICA. « Sulle proprietà aritmetiche delle funzioni analitiche ». *O. Nicoletti*. 3.

— « Sulla rappresentazione delle forme ternarie mediante la somma di potenze di forme lineari ». *F. Palatini*. 378.

— « I problemi di riduzione di Pfaff e di Jacobi nel caso del second'ordine ». *E. Pascal*. 31.

— « Introduzione alla teoria delle forme differenziali di ordine qualunque ». *Id.* 325.

— « Sulla costruzione dei simboli a carattere invariantivo nella teoria delle forme differenziali di ordine qualunque ». *Id.* 367.

— « Una classe di covarianti simultanei di una forma differenziale di ordine qualunque, e di una alle derivate parziali ». *Id.* 399.

— « Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni ». *G. Ricci*. 377; 409.

MECCANICA. « Sulle vibrazioni trasversali di una lamina, che dipendono da due soli parametri ». *G. Bisconcini*. 385.

— « Sul moto di un sistema olonomo di corpi rigidi ». *M. Contarini*. 424; 507.

— « Moti di un punto libero a caratteristiche indipendenti ». *A. F. Dall'Acqua*. 194; 243.

— « Traiettorie dinamiche di un punto libero, sollecitato da forze conservative ». *Id.* 249; 332.

— « Sull'equilibrio d'un elissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo ». *A. Viterbi*. 158; 249; 300.

MINERALOGIA. « La Galena bismutifera di Rosas (Sulcis) e Blende di diverse località di Sardegna ». *C. Rimatori*. 263.

— « Sopra alcuni minerali del granito di Montorfano ». *E. Tacconi*. 355.

## N

NECROLOGIE. Annuncio della morte dei Corrispondenti: *D'Achiardi*. 21, *Oehl*. 362; del Socio nazionale *Cremona*. 540; del Socio straniero *Gegenbaur*. 540;

e Commemorazione dei Soci stranieri: *Stokes*. 174; *von Wild*. 179.

## P

PALEONTOLOGIA. Il « *Clisiophyllum Thildae* n. sp. nel Parà ». *G. De Angelis d'Ossat*. 443; 515.

PARASSITOLOGIA. « Studio sui *Cytoryctes vaccinae* ». *A. Foa*. 88.

— « Ricerche preliminari dirette a precisare la causa del gozzo e del cretinismo endemici ». *B. Grassi* e *L. Munaron*. 477.

PATOLOGIA. « *Chiluria da filaria sanguinis hominis nocturna* in Europa ». *D. Biondi*. 538.

— « Sulla eziologia e patogenesi della peste rossa delle anguille ». *F. Ingillieri*. 13.

— « I discendenti dei genitori tubercolotici (Polli) ». *A. Maffucci*. 421.

PATOLOGIA VEGETALE. « Sulla *Botritis citricola* n. sp. parassita degli agrumi ». *U. Brizi*. 274; 318.

— « Di una speciale infezione crittogamica dei semi d'erba medica e di trifoglio ». *V. Peglion*. 270.

PIEGO SUGGELLATO. Apertura di un piego suggellato inviato dal prof. *A. Bartoli*. 100.

PREMI REALI. Deliberazione dell'Accademia relativa ai premi Reali non conferiti. 548.

## R

RADIOTELEGRAFIA. « Comunicazione verbale sulle esperienze riguardanti la sintonia e gli impianti ultrapotenti per la telegrafia senza fili ». *G. Marconi*. 363.

— « Relazione sommaria del Ministero della Marina, sull'esperimento di radiotelegrafia sintonica eseguito a Spezia fra le stazioni di S. Vito, Palmaria e Livorno ». 389.

— « Sulle esperienze di sintonia eseguite dalla R. Marina a Spezia ». *A. Pouchain*. 390.

Z

ZOOLOGIA. « Sull'adattamento degli Infusorii marini alla vita nell'acqua dolce ».

*P. Enriques*, 82.

— « *Uncinaria duodenalis* e *uncinaria americana* ». *G. Pieri*, 148.

ZOOLOGIA. « Sulla presenza e distribuzione del genere *Anopheles* in alcune regioni della penisola Iberica, e sui rapporti col parassita della malaria umana ». *G. Pittaluga*, 451; 529.

— « Sulla coniugazione delle amebe ». *M. Traube Mengarini*, 274.

ERRATA-CORRIGE

A pag. 55 il primo periodo: « In questa formola  $\theta$ , ecc. » deve seguire l'ultima formola a piè di pagina.

» » 301 lin. 2 invece di  $1 + 4 > \frac{4}{3}$  legg.  $1 + 2 > \frac{4}{3}$

» » 302 lin. 2 » di  $l = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} = 0,0825$  legg.  $l^2 = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2} = 0,0068$

---





